

Risikoquantifizierung: Charakteristische Funktion und numerische Methoden als Alternative zur Monte-Carlo-Simulation

- Fallbeispiele zu kombinierten Verteilungen

Ralf Knobloch

ivwKöln
Institut für Versicherungswesen

Fakultät für Wirtschafts-
und Rechtswissenschaften

**Technology
Arts Sciences
TH Köln**

Risikoquantifizierung: Charakteristische Funktion und numerische Methoden als Alternative zur Monte-Carlo-Simulation - Fallbeispiele zu kombinierten Verteilungen

Zusammenfassung

Für Unternehmen werden die Anforderungen an die Genauigkeit bei der Bewertung von Risiken aufgrund interner und externer Faktoren zunehmend höher. Dies erfordert komplexere Modelle und Berechnungsmethoden, sowohl auf der Ebene von Einzelrisiken als auch auf der Ebene von Risikoportfolios. Häufig führen Unternehmen daher Monte-Carlo-Simulationen zur Ermittlung von Risiko-Kennzahlen durch. In der vorliegenden Arbeit wird eine numerische Alternative, basierend auf dem stochastischen Begriff der charakteristischen Funktion, vorgestellt und in drei komplexeren Fallbeispielen angewendet. Es zeigt sich, dass bei den hier gewählten Fallbeispielen die Abweichungen zwischen den Ergebnissen der beiden Methoden nicht signifikant sind.

Abstract

For companies, the requirements for accuracy in risk assessment are becoming increasingly stringent due to internal and external factors. This necessitates more complex models and calculation methods, both at the level of individual risks and at the level of risk portfolios. Companies therefore often use Monte Carlo simulations to determine risk indicators. This paper presents a numerical alternative based on the stochastic concept of the characteristic function and applies it to three complex case studies. It shows that, in the case studies selected here, the differences between the results of the two methods are not significant.

Schlagwörter:

Risikoquantifizierung, charakteristische Funktion, numerisches Ableiten, numerische Integration, kombinierte Verteilungen, operationelle Risiken

Keywords:

Risk quantification, characteristic function, numerical differentiation, numerical integration, combined distributions, operational risks

Inhaltsverzeichnis

1. EINLEITUNG	2
2. CHARAKTERISTISCHE FUNKTION – DEFINITION UND WICHTIGE ERGEBNISSE	3
3. DAS MODELL	6
4. BERECHNUNG VON KENNZAHLEN FÜR DEN GESAMTPERIODENVERLUST	16
5. FALLBEISPIEL 1	18
6. FALLBEISPIEL 2	25
7. FALLBEISPIEL 3	30
8. FAZIT UND AUSBLICK	34
LITERATURVERZEICHNIS	35

1. Einleitung

In der Betriebswirtschaftslehre gewinnt das quantitative Risikomanagement zunehmend an Bedeutung. Verstärkt durch zusätzliche Anforderungen – allgemein, regulatorisch und branchenbezogen – beschäftigen sich Unternehmen mit der Frage, wie sie ihre Risiken noch genauer bewerten können. Dabei spielen sowohl die verwendeten Kennzahlen zur Risikoquantifizierung (Risikomaße, z.B. Value at Risk und Expected Shortfall) als auch die Modellierung der Risiken eine Rolle. Je komplexer jedoch die verwendeten wahrscheinlichkeitstheoretischen Modelle sind, desto komplizierter werden die benötigten stochastischen Methoden zur Berechnung der Kennzahlen.

Zum einen beobachtet man dies bei der Risikoaggregation, d.h. der Zusammenfassung verschiedener Risikopositionen zu einem einzigen Wert (vgl. [3], [5], [7], [8]). Zum anderen kann es aber auch anspruchsvoll sein, ein Einzelrisiko zu bewerten, z.B. wenn man zur Modellierung eine kombinierte Verteilung verwendet. Bei einer kombinierten Verteilung werden die Häufigkeit, mit der das Risiko (pro Periode) eintritt, und der Verlust, der mit dem Eintritt des Risikos verbunden ist, separat modelliert. Anschließend werden beide Komponenten zu einer Verteilung (zu einem wahrscheinlichkeitstheoretischen Modell) zusammengesetzt (vgl. [7] S.44). Diese Vorgehensweise kennt man bereits aus der Versicherungsmathematik (vgl. [10]).

I.d.R. steht Unternehmen zur Bearbeitung komplexer Risikoquantifizierungen (z.B. Risikoaggregation und Bewertung komplexer Einzelrisiken) als Technik die Monte-Carlo-Simulation zur Verfügung. Daneben gibt es aber auch die Möglichkeit, den Wert der Kennzahlen mit analytischen bzw. numerischen Methoden auf Basis der charakteristischen Funktion zu ermitteln. In dem vorliegenden Artikel werden anhand von drei Fallbeispielen die Verfahren zur Quantifizierung bei komplexen Einzelrisiken gegenübergestellt: Monte-Carlo-Simulation und analytische bzw. numerische Methoden.

Im Focus stehen bei den Fallbeispielen die bereits oben erwähnten kombinierten Verteilungen zur Modellierung eines Einzelrisikos. Angewendet wird diese Modellierung z.B. bei operationellen Risiken bzw. Betriebsrisiken. Also bei Risiken, die nicht den unternehmerischen Risiken zugeordnet werden. Man versteht darunter Gefahren, die durch das Versagen von Prozessen, Menschen und Systemen oder durch externe Einflüsse bedingt sind (vgl. [6]). Im Industriebereich sind dies z.B. Ausfallrisiken von Maschinen, im Allgemeinen z.B. Rechtsrisiken und bestimmte IT- und Cyberrisiken.

Von zentraler Bedeutung für die analytischen und numerischen Methoden zur Berechnung der Kennzahlen ist die charakteristische Funktion einer Verteilung. Deshalb werden im zweiten Abschnitt zunächst wichtige Ergebnisse zu diesem stochastischen Begriff zusammengestellt. Anschließend wird im dritten Abschnitt das diesem Artikel zugrunde liegende Modell vorgestellt und im vierten Abschnitt die Methoden im Grundsatz erläutert. Danach folgen die drei Fallbeispiele, in denen die Methoden angewendet und anhand der Ergebnisse gegenübergestellt werden.

2. Charakteristische Funktion – Definition und wichtige Ergebnisse

Aus Sicht der Stochastik ist für die vorliegende Ausarbeitung wie bereits erwähnt der Begriff der charakteristischen Funktion von zentraler Bedeutung. Deshalb werden in diesem Abschnitt die Definition und die für den Fortgang des Artikels wichtigen Eigenschaften von charakteristischen Funktionen zusammengestellt.

Gegeben sei eine reell-wertige Zufallsvariable U mit der Verteilungsfunktion F_U und der charakteristischen Funktion

$$\psi_U(t) := E(e^{i \cdot t \cdot U}), t \in \mathbb{R},$$

wobei $i = \sqrt{-1}$.

Als erste wichtige Eigenschaft ergibt sich der folgende Zusammenhang zwischen den Ableitungen der charakteristischen Funktion und den Momenten:

Ist $E(|U|^n) < \infty$ für $n \in \mathbb{N}$, dann ist ψ_U n -mal differenzierbar und es gilt

$$\psi_U^{(k)}(t) = i^k \cdot E(U^k \cdot e^{i \cdot t \cdot U})$$

bzw. insbesondere

$$\psi_U^{(k)}(0) = i^k \cdot E(U^k)$$

für $k = 0, 1, 2, \dots, n$. (vgl. [9] S.385)

Als Umkehrformel wird im Kontext von charakteristischen Funktionen das folgende Ergebnis bezeichnet:

Es sei

$$g(t, a, b) := \begin{cases} \frac{e^{-i \cdot a \cdot t} - e^{-i \cdot b \cdot t}}{i \cdot t} & , t \neq 0, \\ b - a & , t = 0 \end{cases}$$

$a < b$ und $P(U = a) = P(U = b) = 0$. Dann gilt

$$P(a < U \leq b) = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \lim_{z \rightarrow \infty} \int_{-z}^z g(t, a, b) \cdot \psi_U(t) dt.$$

(vgl. [9] S.386)

Aufgrund des Beweises der Umkehrformel kann dieses Ergebnis ohne die Voraussetzung $P(U = a) = P(U = b) = 0$ wie folgt modifiziert werden:

$$\frac{1}{2} \cdot P(U = a) + P(a < U < b) + \frac{1}{2} \cdot P(U = b) = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \lim_{z \rightarrow \infty} \int_{-z}^z g(t, a, b) \cdot \psi_U(t) dt$$

(vgl. [11] S.209f)

Ist U eine nichtnegative reell-wertigen Zufallsvariable mit $P(U = b) = 0$ für $b > 0$ und $P(U = 0) > 0$, so ergibt sich daraus:

$$F_U(b) = P(0 \leq U \leq b) = \frac{1}{2} \cdot P(U = 0) + \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \lim_{z \rightarrow \infty} \int_{-z}^z g(t, 0, b) \cdot \psi_U(t) dt$$

Mit dieser Formel lassen sich dann im Spezialfall einer nichtnegativen Zufallsvariablen mithilfe der charakteristischen Funktion die Quantile der Verteilung berechnen.

Der Integrand lässt sich dabei im Fall $t \neq 0$ wie folgt umformen:

$$\begin{aligned} g(t, 0, b) \cdot \psi_U(t) &= \frac{1 - e^{-i \cdot b \cdot t}}{i \cdot t} \cdot E(e^{i \cdot t \cdot U}) \\ &= \frac{1 - \cos(-b \cdot t) - i \cdot \sin(-b \cdot t)}{i \cdot t} \cdot E(\cos(t \cdot U) + i \cdot \sin(t \cdot U)) \\ &= E \left(-i \cdot \frac{\cos(t \cdot U)}{t} + \frac{\sin(t \cdot U)}{t} + i \cdot \frac{\cos(-b \cdot t) \cdot \cos(t \cdot U)}{t} - \frac{\cos(-b \cdot t) \cdot \sin(t \cdot U)}{t} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\sin(-b \cdot t) \cdot \cos(t \cdot U)}{t} - i \cdot \frac{\sin(-b \cdot t) \cdot \sin(t \cdot U)}{t} \right) \\ &= E \left(-i \cdot \frac{\cos(t \cdot U)}{t} + \frac{\sin(t \cdot U)}{t} + i \cdot \frac{\cos(-b \cdot t + t \cdot U)}{t} - \frac{\sin(-b \cdot t + t \cdot U)}{t} \right) \end{aligned}$$

Die letzte Umformung ergibt sich aus den Additionstheoremen für trigonometrische Funktionen. Als Realteil des Integranden erhält man dann

$$Re(g(t, 0, b) \cdot \psi_U(t)) = E \left(\frac{\sin(t \cdot U)}{t} - \frac{\sin(-b \cdot t + t \cdot U)}{t} \right)$$

als Imaginärteil

$$Im(g(t, 0, b) \cdot \psi_U(t)) = E \left(-\frac{\cos(t \cdot U)}{t} + \frac{\cos(-b \cdot t + t \cdot U)}{t} \right).$$

Wegen

$$\begin{aligned} Re(g(-t, 0, b) \cdot \psi_U(-t)) &= E \left(\frac{\sin(-t \cdot U)}{-t} - \frac{\sin(b \cdot t - t \cdot U)}{-t} \right) = \\ &= E \left(\frac{\sin(t \cdot U)}{t} - \frac{\sin(-b \cdot t + t \cdot U)}{t} \right) = Re(g(t, 0, b) \cdot \psi_U(t)) \end{aligned}$$

ist der Realteil des Integranden achsensymmetrisch zur vertikalen Achse des Koordinatensystems durch den Ursprung und wegen

$$\begin{aligned} Im(g(-t, 0, b) \cdot \psi_U(-t)) &= E \left(-\frac{\cos(-t \cdot U)}{-t} + \frac{\cos(b \cdot t - t \cdot U)}{-t} \right) \\ &= -E \left(-\frac{\cos(t \cdot U)}{t} + \frac{\cos(-b \cdot t + t \cdot U)}{t} \right) = -Im(g(t, 0, b) \cdot \psi_U(t)) \end{aligned}$$

ist der Imaginärteil punktsymmetrisch zum Ursprung des Koordinatensystems.

Ferner gilt

$$\begin{aligned}
& \lim_{z \rightarrow \infty} \int_{-z}^z g(t, 0, b) \cdot \psi_U(t) dt \\
&= \lim_{z \rightarrow \infty} \int_{-z}^z \operatorname{Re}(g(t, 0, b) \cdot \psi_U(t)) + i \cdot \operatorname{Im}(g(t, 0, b) \cdot \psi_U(t)) dt \\
&= \lim_{z \rightarrow \infty} \int_{-z}^z \operatorname{Re}(g(t, 0, b) \cdot \psi_U(t)) dt + i \cdot \lim_{z \rightarrow \infty} \int_{-z}^z \operatorname{Im}(g(t, 0, b) \cdot \psi_U(t)) dt
\end{aligned}$$

Wegen der Punktsymmetrie des Imaginärteils gilt

$$\int_{-z}^z \operatorname{Im}(g(t, 0, b) \cdot \psi_U(t)) dt = 0,$$

und wegen der Achsensymmetrie des Realteils

$$\int_{-z}^z \operatorname{Re}(g(t, 0, b) \cdot \psi_U(t)) dt = 2 \cdot \int_0^z \operatorname{Re}(g(t, 0, b) \cdot \psi_U(t)) dt,$$

jeweils für alle $z > 0$.

Damit ergibt sich für die obige Formel die Darstellung

$$F_U(b) = P(0 \leq U \leq b) = \frac{1}{2} \cdot P(U = 0) + \frac{1}{\pi} \cdot \lim_{z \rightarrow \infty} \int_0^z \operatorname{Re}(g(t, 0, b) \cdot \psi_U(t)) dt.$$

Zu erwähnen ist dabei noch, dass der Integrand wegen der Stetigkeit der charakteristischen Funktion (vgl. [9] S.385) und wegen

$$\lim_{t \rightarrow 0} g(t, 0, b) = b = g(0, 0, b)$$

ebenfalls stetig ist in $t = 0$. Somit beziehen sich alle Integrale auf eine stetige Funktion.

Ein weiteres grundlegendes Ergebnis liefert der Eindeutigkeitssatz: Sei V eine zweite reell-wertige Zufallsvariable mit der Verteilungsfunktion F_V und der charakteristischen Funktion

$$\psi_V(t) := E(e^{i \cdot t \cdot V}), t \in \mathbb{R},$$

so ist $\psi_U = \psi_V$ äquivalent zu $F_U = F_V$.

D.h. die Verteilung einer Zufallsvariablen ist durch die charakteristische Funktion eindeutig festgelegt. (vgl. [9] S.388)

3. Das Modell

Die Häufigkeit des Eintritts des Risikos pro Periode ist gegeben durch die \mathbb{N}_0 -wertige Zufallsvariable N . Des Weiteren sind die Verluste, die mit dem Eintritt des Risikos verbunden sind, gegeben durch die nichtnegativen Zufallsvariablen X_1, X_2, X_3, \dots . Hierbei handelt es sich gegeben N um stochastisch unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen, die ebenfalls stochastisch unabhängig sind von der Häufigkeit des Eintritts, d.h. von der Zufallsvariablen N . Im Folgenden wird für einen repräsentativen Verlust die Zufallsvariable X verwendet, d.h. X ist nichtnegativ und genügt der gleichen Verteilung wie $X_k, k = 1, 2, 3, \dots$.

Es seien

$$p_k := P(N = k), k = 0, 1, 2, 3, \dots,$$

die Einzelwahrscheinlichkeiten,

$$F_N(x) := P(N \leq x), x \in \mathbb{R},$$

die Verteilungsfunktion,

$$\mu_N := E(N)$$

der Erwartungswert,

$$\sigma_N := \sqrt{\text{Var}(N)} < \infty$$

die Standardabweichung und

$$h(s) := E(s^N), s \in [0, 1]$$

die wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion der Zufallsvariablen N . Dabei gilt der Zusammenhang $h'(1) = E(N)$ und $h''(1) = E(N \cdot (N - 1))$.

Für die Verteilung der Verluste seien $F_X(x), x \in \mathbb{R}$, die Verteilungsfunktion, μ_X der Erwartungswert, $\sigma_X < \infty$ die Standardabweichung und

$$\varphi_X(u) := E(e^{i \cdot u \cdot X}), u \in \mathbb{R},$$

die charakteristische Funktion. Handelt es sich hierbei um eine stetige Verteilung, so sei $f_X(x), x \in \mathbb{R}$, die Dichtefunktion.

Der Gesamtperiodenverlust ist dann gegeben durch

$$Z := X_1 + X_2 + \dots + X_N.$$

μ sei der Erwartungswert, σ die Standardabweichung und

$$\Phi(u) := E(e^{i \cdot u \cdot Z}), u \in \mathbb{R},$$

die charakteristische Funktion der Zufallsvariablen Z . Mit der charakteristischen Funktion ist die Verteilung von Z eindeutig festgelegt (vgl. Abschnitt 2).

Es gilt nun $E(|Z|^2) < \infty$. Dies kann mithilfe der Jensenschen Ungleichung (vgl. [9] S.280) wie folgt gezeigt werden:

$$\begin{aligned}
E(|Z|^2) &= E(Z^2) = E\left(\chi_{\{N \neq 0\}} \cdot \left(\sum_{k=1}^N X_k\right)^2\right) = E\left(\chi_{\{N \neq 0\}} \cdot N^2 \cdot \left(\sum_{k=1}^N \frac{1}{N} \cdot X_k\right)^2\right) \\
&\stackrel{\text{Jensensche Ungl.}}{\leq} E\left(\chi_{\{N \neq 0\}} \cdot N^2 \cdot \sum_{k=1}^N \frac{1}{N} \cdot X_k^2\right) = E\left(N \cdot \sum_{k=1}^N X_k^2\right) = E\left(E(N \cdot \sum_{k=1}^N X_k^2 | N)\right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} E(N \cdot \sum_{k=1}^N X_k^2 | N = n) \cdot p_n = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot \sum_{k=1}^n E(X_k^2) \cdot p_n = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 \cdot E(X^2) \cdot p_n \\
&= E(X^2) \cdot E(N^2) = (\sigma_X^2 + \mu_X^2) \cdot (\sigma_N^2 + \mu_N^2) < \infty
\end{aligned}$$

Somit ergibt sich u.a. mithilfe der Differentialrechnung der folgende Satz.

Satz:

Es gilt:

a) $\Phi(u) = h(\varphi_X(u))$, $u \in \mathbb{R}$.

b) $\mu = \mu_N \cdot \mu_X$

c) $\sigma^2 = \sigma_N^2 \cdot \mu_X^2 + \mu_N \cdot \sigma_X^2$

(vgl. [10] S.115ff)

Beweis:

Zu a):

$$\begin{aligned}
\Phi(u) &= E(e^{i \cdot u \cdot Z}) = E(e^{i \cdot u \cdot (X_1 + X_2 + \dots + X_N)}) \\
&= E\left(E\left(e^{i \cdot u \cdot (X_1 + X_2 + \dots + X_N)} | N\right)\right) = E\left(E\left(\prod_{k=1}^N e^{i \cdot u \cdot X_k} | N\right)\right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} E\left(\prod_{k=1}^N e^{i \cdot u \cdot X_k} | N = n\right) \cdot p_n = \sum_{n=0}^{\infty} \prod_{k=1}^n E\left(e^{i \cdot u \cdot X_k} | N = n\right) \cdot p_n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \prod_{k=1}^n E\left(e^{i \cdot u \cdot X_k}\right) \cdot p_n = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_X(u)^n \cdot p_n = E(\varphi_X(u)^N) = h(\varphi_X(u))
\end{aligned}$$

Zu b) und c):

Es gilt (Kettenregel)

$$\Phi'(u) = h'(\varphi_X(u)) \cdot \varphi'(u)$$

und (Produkt und Kettenregel)

$$\Phi''(u) = h''(\varphi_X(u)) \cdot (\varphi'(u))^2 + h'(\varphi_X(u)) \cdot \varphi''(u)$$

für alle $u \in \mathbb{R}$.

Damit ergibt sich

$$\mu = E(Z) = \frac{1}{i} \cdot \Phi'(0) = \frac{1}{i} \cdot h'(\varphi_x(0)) \cdot \varphi'(0) = \frac{1}{i} \cdot h'(1) \cdot i \cdot \mu_x = \mu_N \cdot \mu_x$$

und

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= Var(Z) = E(Z^2) - \mu_Z^2 = -\Phi''(0) - \mu_Z^2 \\ &= -h''(\varphi_x(0)) \cdot (\varphi'(0))^2 - h'(\varphi_x(0)) \cdot \varphi''(0) - \mu_Z^2 \\ &= -h''(1) \cdot (i \cdot \mu_x)^2 - h'(1) \cdot \varphi''(0) - (\mu_N \cdot \mu_x)^2 \\ &= E(N \cdot (N-1)) \cdot \mu_X^2 + \mu_N \cdot (\sigma_X^2 + \mu_X^2) - \mu_N^2 \cdot \mu_X^2 \\ &= E(N^2) \cdot \mu_X^2 - \mu_N \cdot \mu_X^2 + \mu_N \cdot \sigma_X^2 + \mu_N \cdot \mu_X^2 - \mu_N^2 \cdot \mu_X^2 \\ &= E(N^2) \cdot \mu_X^2 + \mu_N \cdot \sigma_X^2 - \mu_N^2 \cdot \mu_X^2 = \sigma_N^2 \cdot \mu_X^2 + \mu_N \cdot \sigma_X^2 \end{aligned}$$

□

In den beiden folgenden Beispielen werden geeignete Verteilungen für die Häufigkeit des Eintritts eines Risikos und den Verlust, der mit dem Eintritt des Risikos verbunden ist, zusammengestellt.

Beispiel 1:

Für die Häufigkeit des Eintritts eines Risikos können in Anlehnung an die Versicherungsmathematik u.a. die folgenden Verteilungen verwendet werden.

a) Wir betrachten zunächst den allgemeinen Fall, dass die Zufallsvariable N Werte in der Menge $\{0, 1, 2, \dots, n\}$ annimmt, d.h. die Einzelwahrscheinlichkeiten sind gegeben durch

$$p_k = P(N = k), k = 0, 1, 2, \dots, n,$$

wobei $\sum_{k=0}^n p_k = 1$. Dann ergeben sich der Erwartungswert, die Standardabweichung und die wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion allgemein durch:

$$\mu_N = \sum_{k=0}^n k \cdot p_k$$

$$\sigma_N = \sqrt{\sum_{k=0}^n (k - \mu_N)^2 \cdot p_k} = \sqrt{\sum_{k=0}^n k^2 \cdot p_k - \mu_N^2}$$

$$h(s) = \sum_{k=0}^n s^k \cdot p_k, s \in [0,1]$$

- b) Das einfachste Modell für die Zufallsvariable N ist die Bernoulli-Verteilung mit dem Parameter $p \in (0,1)$. Dabei gilt

$$p_0 = P(N = 0) = 1 - p \text{ und } p_1 = P(N = 1) = p.$$

Damit ergibt sich für den Erwartungswert $\mu_N = p$, für die Standardabweichung $\sigma_N = \sqrt{p - p^2} = \sqrt{p \cdot (1 - p)}$ und für die wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion

$$h(s) = (1 - p) + s \cdot p, s \in [0,1].$$

- c) Die Binomial-Verteilung mit den Parametern $n \in \mathbb{N}$ und $p \in [0,1]$ als Verallgemeinerung der Bernoulli-Verteilung ist gegeben durch

$$p_k = P(N = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k}, k = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Als Erwartungswert erhält man $\mu_N = n \cdot p$, als Standardabweichung $\sigma_N = \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)}$ und als wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion

$$h(s) = ((1 - p) + s \cdot p)^n, s \in [0,1]$$

(vgl. [10] S.332). Insbesondere ist eine Bernoulli-Verteilung mit Parameter p eine Binomial-Verteilung mit den Parametern $n = 1$ und p .

- d) Setzt man für die Zufallsvariable N die Poisson-Verteilung mit dem Parameter $\lambda > 0$ voraus, so haben alle Elemente aus \mathbb{N}_0 eine positive Wahrscheinlichkeit:

$$p_k = P(N = k) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}, k = 0, 1, 2, \dots$$

Als Erwartungswert ergibt sich $\mu_N = \lambda$, als Standardabweichung $\sigma_N = \sqrt{\lambda}$ und als wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion

$$h(s) = e^{\lambda \cdot (s-1)}, s \in [0,1].$$

(Vgl. [10] S.333f)

Beispiel 2:

Für den Verlust, der mit dem Eintritt des Risikos verbunden ist, können ebenfalls in Anlehnung an die Versicherungsmathematik u.a. die folgenden Verteilungen verwendet werden.

- a) Für den Wert des Verlustes X gibt es nur endlich viele Möglichkeiten $\{x_k | x_k \geq 0, k = 1, 2, \dots, n\}$. Dann gilt:

$$\mu_X = \sum_{k=1}^n x_k \cdot P(X = x_k)$$

$$\sigma_X = \sqrt{\sum_{k=1}^n (x_k - \mu_X)^2 \cdot P(X = x_k)} = \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2 \cdot P(X = x_k) - \mu_X^2}$$

$$\varphi_X(u) = \sum_{k=0}^n e^{i \cdot u \cdot x_k} \cdot P(X = x_k), u \in \mathbb{R}$$

- b) Ist der Verlust X gleichverteilt auf dem Intervall $[0, M], M > 0$, hat man $\mu_X = \frac{M}{2}, \sigma_X = \frac{M}{\sqrt{12}}$ und

$$\varphi_X(u) = \frac{e^{i \cdot u \cdot M} - 1}{M \cdot i \cdot u}, u \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

(vgl. [9] S.278, 287, 383).

Mit der Regel von L'Hospital ergibt sich

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{e^{i \cdot u \cdot M} - 1}{M \cdot i \cdot u} = 1.$$

- c) Eine in der Praxis oft verwendete Verteilung ist die Dreiecks-Verteilung. Die Parameter sind a als best case, b als normal case und c als worst case, mit $a < b < c$. Nimmt nun man an, dass die Verluste im Intervall $[0, M]$ liegen, so wären $a = 0$ und $c = M$.

Die Dichtefunktion der Dreiecks-Verteilung ist gegeben durch

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & , x \leq a \\ \frac{2}{(b-a) \cdot (c-a)} \cdot (x-a) & , a < x \leq b \\ \frac{2}{(c-b) \cdot (c-a)} \cdot (c-x) & , b < x < c \\ 0 & , x \geq c \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 & , x \leq 0 \\ \frac{2}{b \cdot M} \cdot x & , 0 < x \leq b \\ \frac{2}{(M-b) \cdot M} \cdot (M-x) & , b < x < M \\ 0 & , x \geq M \end{cases}$$

(vgl. [2] S.45f).

Für den Erwartungswert gilt dann

$$\mu_X = \frac{a + b + c}{3} = \frac{b + M}{3}$$

und für die Standardabweichung

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{(c-a)^2 + (c-b)^2 + (b-a)^2}{36}} = \sqrt{\frac{M^2 + (M-b)^2 + b^2}{36}}$$

Ferner ist der normal case b auch der Modus.

Die Charakteristische Funktion berechnet sich für $u \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ wie folgt

$$\begin{aligned}\varphi_X(u) &= E(e^{i \cdot u \cdot X}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i \cdot u \cdot x} \cdot f_X(x) dx \\ &= \int_0^b e^{i \cdot u \cdot x} \cdot \frac{2}{b \cdot M} \cdot x dx + \int_b^M e^{i \cdot u \cdot x} \cdot \frac{2}{(M-b) \cdot M} \cdot (M-x) dx\end{aligned}$$

Wendet man die partielle Integration an, so erhält man für das erste Integral:

$$\begin{aligned}&\left[\frac{1}{i \cdot u} \cdot e^{i \cdot u \cdot x} \cdot \frac{2}{b \cdot M} \cdot x \right]_0^b - \int_0^b \frac{1}{i \cdot u} \cdot e^{i \cdot u \cdot x} \cdot \frac{2}{b \cdot M} dx \\ &= \left[\frac{1}{i \cdot u} \cdot e^{i \cdot u \cdot x} \cdot \frac{2}{b \cdot M} \cdot x \right]_0^b - \left[-\frac{1}{u^2} \cdot e^{i \cdot u \cdot x} \cdot \frac{2}{b \cdot M} \right]_0^b \\ &= \frac{2}{i \cdot u \cdot M} \cdot e^{i \cdot u \cdot b} + \frac{2}{u^2 \cdot b \cdot M} \cdot e^{i \cdot u \cdot b} - \frac{2}{u^2 \cdot b \cdot M} \\ &= \frac{2}{u \cdot M} \cdot \left(\frac{1}{i} \cdot e^{i \cdot u \cdot b} + \frac{1}{u \cdot b} \cdot e^{i \cdot u \cdot b} - \frac{1}{u \cdot b} \right)\end{aligned}$$

Für das zweite Integral erhält man ebenfalls mit partieller Integration:

$$\begin{aligned}&\left[\frac{1}{i \cdot u} \cdot e^{i \cdot u \cdot x} \cdot \frac{2}{(M-b) \cdot M} \cdot (M-x) \right]_b^M + \int_b^M \frac{1}{i \cdot u} \cdot e^{i \cdot u \cdot x} \cdot \frac{2}{(M-b) \cdot M} dx \\ &= \left[\frac{1}{i \cdot u} \cdot e^{i \cdot u \cdot x} \cdot \frac{2}{(M-b) \cdot M} \cdot (M-x) \right]_b^M + \left[-\frac{1}{u^2} \cdot e^{i \cdot u \cdot x} \cdot \frac{2}{(M-b) \cdot M} \right]_b^M \\ &= -\frac{2}{i \cdot u \cdot M} \cdot e^{i \cdot u \cdot b} - \frac{2}{u^2 \cdot (M-b) \cdot M} \cdot e^{i \cdot u \cdot M} + \frac{2}{u^2 \cdot (M-b) \cdot M} \cdot e^{i \cdot u \cdot b} \\ &= \frac{2}{u \cdot M} \cdot \left(-\frac{1}{i} \cdot e^{i \cdot u \cdot b} - \frac{1}{u \cdot (M-b)} \cdot e^{i \cdot u \cdot M} + \frac{1}{u \cdot (M-b)} \cdot e^{i \cdot u \cdot b} \right)\end{aligned}$$

Damit ergibt sich als charakteristische Funktion für $u \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$:

$$\begin{aligned}\varphi_X(u) &= \frac{2}{u \cdot M} \cdot \left(\frac{1}{u \cdot b} \cdot e^{i \cdot u \cdot b} - \frac{1}{u \cdot b} - \frac{1}{u \cdot (M-b)} \cdot e^{i \cdot u \cdot M} + \frac{1}{u \cdot (M-b)} \cdot e^{i \cdot u \cdot b} \right) \\ &= \frac{2}{u^2 \cdot M} \cdot \left(\frac{1}{b} \cdot e^{i \cdot u \cdot b} - \frac{1}{b} - \frac{1}{M-b} \cdot e^{i \cdot u \cdot M} + \frac{1}{M-b} \cdot e^{i \cdot u \cdot b} \right)\end{aligned}$$

$$= \frac{2}{u^2 \cdot M} \cdot \left(\frac{M}{b \cdot M - b^2} \cdot e^{i \cdot u \cdot b} - \frac{1}{b} - \frac{1}{M - b} \cdot e^{i \cdot u \cdot M} \right)$$

Durch zweimalige Anwendung der Regel von L'Hospital ergibt sich

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{2}{u^2 \cdot M} \cdot \left(\frac{M}{b \cdot M - b^2} \cdot e^{i \cdot u \cdot b} - \frac{1}{b} - \frac{1}{M - b} \cdot e^{i \cdot u \cdot M} \right) = 1.$$

- d) Genügt der Verlust X einer Exponential-Verteilung mit dem Parameter $\lambda > 0$, d.h. die Zufallsvariable hat die Dichtefunktion

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & , x \leq 0 \\ \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot x} & , x > 0 \end{cases}$$

so gilt $\mu_X = \frac{1}{\lambda}$, $\sigma_X = \frac{1}{\lambda}$ und

$$\varphi_X(u) = \frac{\lambda}{\lambda - i \cdot u}, u \in \mathbb{R}.$$

(vgl. [9] S.257, 278, 287, 383)

- e) Gegeben sei eine normalverteilte Zufallsvariable Y mit Erwartungswert μ_Y und Standardabweichung σ_Y . Die Zufallsvariable e^Y wird dann als log-normalverteilt bezeichnet. Da es sich um eine nichtnegative Zufallsvariable handelt, ist die Verteilung für den mit dem Eintritt des Risikos verbundenen Verlust geeignet. Wählt man für den Verlust X die Log-Normalverteilung mit den Parametern μ und σ , so ist die Dichtefunktion gegeben durch

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & , x \leq 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot \sigma^2}} \cdot \frac{1}{x} \cdot e^{-\frac{(\ln(x)-\mu)^2}{2 \cdot \sigma^2}} & , x > 0 \end{cases}$$

Als Erwartungswert ergibt sich

$$\mu_X = e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}},$$

als Standardabweichung

$$\sigma_X = \sqrt{e^{2 \cdot \mu + \sigma^2} \cdot (e^{\sigma^2} - 1)}.$$

Die charakteristische Funktion kann nicht als geschlossener Ausdruck dargestellt werden.

(vgl. [10] S.338)

- f) Genügt der Verlust X einer Gamma-Verteilung mit den Parametern $\alpha, \gamma > 0$, d.h. die Zufallsvariable hat die Dichtefunktion

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & , x \leq 0 \\ \frac{\alpha^\gamma}{\Gamma(\gamma)} \cdot e^{-\alpha \cdot x} \cdot x^{\gamma-1} & , x > 0 \end{cases}$$

wobei die Gamma-Funktion definiert ist durch

$$\Gamma(\gamma) = \int_0^\infty e^{-z} \cdot z^{\gamma-1} dz,$$

so gilt $\mu_X = \frac{\gamma}{\alpha}$, $\sigma_X = \frac{\sqrt{\gamma}}{\alpha}$ und

$$\varphi_X(u) = \left(\frac{\alpha}{\alpha - i \cdot u} \right)^\gamma, u \in \mathbb{R}.$$

Insbesondere ist eine Exponential-Verteilung mit dem Parameter $\lambda > 0$ eine Gamma-Verteilung mit den Parametern $\alpha = \lambda$ und $\gamma = 1$.

(vgl. [9] S.186, 257, 278, 287, 383)

- g) Wir betrachten zunächst eine Beta-Verteilung auf dem Intervall $[0,1]$. Sei also Y eine Zufallsvariable mit der Dichtefunktion

$$g(y) = \begin{cases} 0 & , y \leq 0 \\ \frac{1}{B(\alpha, \beta)} \cdot y^{\alpha-1} \cdot (1-y)^{\beta-1} & , 0 < y < 1 \\ 0 & , y \geq 1 \end{cases}$$

wobei $\alpha, \beta > 0$ sei und die Beta-Funktion definiert ist durch

$$B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha) \cdot \Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)},$$

so gilt $\mu_Y = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}$ und $\sigma_Y = \frac{\sqrt{\alpha \beta}}{\sqrt{\alpha + \beta + 1} \cdot (\alpha + \beta)}$.

(vgl. Wolfsdorf S.340, Schmidt S.186, 256, 278, 287,

Setzt man nun den Verlust mit $X := M \cdot Y$ an, so genügt der Verlust einer Beta-Verteilung auf dem Intervall $[0, M]$ mit den Parametern $\alpha, \beta, M > 0$, d.h. die Zufallsvariable hat die Dichtefunktion

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & , x \leq 0 \\ \frac{1}{M^{\alpha+\beta-1} \cdot B(\alpha, \beta)} \cdot x^{\alpha-1} \cdot (M-x)^{\beta-1} & , 0 < x < M \\ 0 & , x \geq M \end{cases}$$

(vgl. [2] S.44)

Ferner gilt

$$\mu_X = M \cdot \mu_Y = M \cdot \frac{\alpha}{\alpha + \beta}$$

und

$$\sigma_X = M \cdot \sigma_Y = M \cdot \frac{\sqrt{\alpha \cdot \beta}}{\sqrt{\alpha + \beta + 1} \cdot (\alpha + \beta)}.$$

Angemerkt werden kann noch, dass der Fall $\alpha = \beta = 1$ der Gleichverteilung auf dem Intervall $[0, M]$ entspricht. Dies ist anhand der Dichte der Beta-Verteilung wegen $B(1,1) = \frac{\Gamma(1) \cdot \Gamma(1)}{\Gamma(2)} = \frac{\Gamma(1) \cdot \Gamma(1)}{1 \cdot \Gamma(1)} = \Gamma(1) = 1$ leicht nachvollziehbar.

Den Modus (d.h. die Maximalstelle der Dichte) im Fall $\alpha, \beta > 1$ erhält man mithilfe der Differentialrechnung wie folgt. Zunächst lautet die erste Ableitung der Dichtefunktion für $0 < x < M$:

$$\frac{1}{M^{\alpha+\beta-1} \cdot B(\alpha, \beta)} \cdot \left((\alpha - 1) \cdot x^{\alpha-2} \cdot (M - x)^{\beta-1} + (\beta - 1) \cdot x^{\alpha-1} \cdot (M - x)^{\beta-2} \right)$$

Setzt man die erste Ableitung gleich null, so ergibt sich

$$\begin{aligned} & (\alpha - 1) \cdot x^{\alpha-2} \cdot (M - x)^{\beta-1} - (\beta - 1) \cdot x^{\alpha-1} \cdot (M - x)^{\beta-2} = 0 \\ \Leftrightarrow & x^{\alpha-2} \cdot (M - x)^{\beta-2} \cdot ((\alpha - 1) \cdot (M - x) - (\beta - 1) \cdot x) = 0 \end{aligned}$$

Diese Gleichung ist für $x \notin \{0, M\}$ genau dann erfüllt, wenn

$$(\alpha - 1) \cdot (M - x) - (\beta - 1) \cdot x = 0$$

Dies ist äquivalent zu

$$(\alpha - 1) \cdot M = (\alpha + \beta - 2) \cdot x$$

bzw.

$$x = \frac{(\alpha - 1) \cdot M}{\alpha + \beta - 2}.$$

Wegen $\alpha, \beta > 1$ erhält man für die beiden Grenzwerte $\lim_{x \downarrow 0} f_X(x) = 0$ und $\lim_{x \uparrow M} f_X(x) = 0$. Somit handelt es sich bei der Lösung um das Maximum bzw. den Modus.

- h) Eine in der Praxis verwendete Verteilung ist die Pert-Verteilung. Dabei handelt es sich um eine spezielle Beta-Verteilung. Sie wird auch als Alternative zur Dreiecks-Verteilung mit differenzierbarer Dichtefunktion angesehen. Die Parameter seien analog zur Dreiecks-Verteilung a (best case), b (normal case) und c (worst case) mit $a < b < c$. Nimmt nun man wieder an, dass die Verluste im Intervall $[0, M]$ liegen, so sind $a = 0$ und $c = M$.

Die beiden Parameter der Beta-Verteilung wählt man mit

$$\alpha = \frac{-5 \cdot a + 4 \cdot b + c}{c} = \frac{4 \cdot b + M}{M} > 1$$

und

$$\beta = \frac{-a - 4 \cdot b + 5 \cdot c}{c} = \frac{-4 \cdot b + 5 \cdot M}{M} > 1.$$

Damit erhält man für den Erwartungswert

$$\mu_X = M \cdot \frac{\alpha}{\alpha + \beta} = M \cdot \frac{\frac{4 \cdot b + M}{M}}{\frac{4 \cdot b + M}{M} + \frac{-4 \cdot b + 5 \cdot M}{M}} = M \cdot \frac{4 \cdot b + M}{6 \cdot M} = \frac{4 \cdot b + M}{6}$$

Die Standardabweichung kann ebenfalls mit der bei der Beta-Verteilung gültigen Formel berechnet werden. Da $\alpha, \beta > 1$ berechnet sich der Modus durch

$$\frac{(\alpha - 1) \cdot M}{\alpha + \beta - 2} = \frac{\left(\frac{4 \cdot b + M}{M} - 1\right) \cdot M}{\frac{4 \cdot b + M}{M} + \frac{-4 \cdot b + 5 \cdot M}{M} - 2} = \frac{4 \cdot b}{4} = b.$$

Somit handelt es sich bei der hier gewählten Pert-Verteilung um eine spezielle Beta-Verteilung auf dem Intervall $[0, M]$. Der best case und worst case sind durch die Intervallgrenzen gegeben und der normal case analog zur obigen Dreiecks-Verteilung durch den Modus.

4. Berechnung von Kennzahlen für den Gesamtperiodenverlust

Zur Berechnung von Kennzahlen für den Gesamtperiodenverlust gibt es mehrere methodische Ansätze. Zunächst lassen sich im vorliegenden Modell Kennzahlen direkt analytisch aus den Verteilungsannahmen für die Häufigkeit des Eintritts des Risikos pro Periode und den Verlust, der mit dem Eintritt eines Risikos verbunden ist, berechnen. Für den Erwartungswert, die Varianz und die Standardabweichung lassen sich entsprechende Formeln herleiten (vgl. Satz aus Abschnitt 3). Will man hingegen Quantile der Verteilung des Gesamtperiodenverlustes aus den im Modell für die beiden Komponenten Häufigkeit und Verlsthöhe vorgegebenen Verteilungsannahmen ermitteln, so stößt man mit dieser Vorgehensweise wegen der Komplexität des hier verwendeten Modells bis auf Ausnahmen an rechentechnische Grenzen.

Aufgrund möglicher analytischer Probleme bei der Berechnung von Kennzahlen einer Zufallsvariablen hat sich als übliche Methodik bei der Risikoquantifizierung die Monte-Carlo-Simulation etabliert. Dabei wird das Schicksal des Risikos mithilfe einer Softwarelösung hinreichend oft ausgewürfelt. Die entstehenden fiktiven Ergebnisse für den Verlust werden dann mit den Methoden der deskriptiven und der induktiven Statistik ausgewertet. Der Erwartungswert wird hierbei mit dem arithmetischen Mittel und die (theoretische) Standardabweichung mit der empirischen Standardabweichung gleichgesetzt bzw. geschätzt. Auch Quantile, z.B. der Value at Risk, sowie der Expected Shortfall des Verlustes können aus den simulierten Ergebnissen näherungsweise ermittelt werden. Grundlegend für diese Methodik sind die Grenzwertsätze der Stochastik, z.B. das Gesetz der großen Zahlen.

Eine andere eher analytische Methode ergibt sich aus dem Eindeutigkeitssatz und der Umkehrformel für charakteristische Funktionen. Der Eindeutigkeitssatz besagt, dass durch die charakteristische Funktion die Verteilung einer Zufallsvariablen eindeutig festgelegt ist, die Umkehrformel, dass man durch Integration des Produkts aus charakteristischer Funktion und einer speziellen komplex-wertigen Funktion u.a. Quantile der zugehörigen Verteilung berechnen kann (vgl. Abschnitt 2). Darüber hinaus lassen sich mithilfe der Ableitungen der charakteristischen Funktion die Momente einer Zufallsvariablen bestimmen. Dieser Ansatz wurde bereits in Abschnitt 2 erläutert und im Beweis zum Satz aus Abschnitt 3 verwendet.

Wegen der Komplexität des Funktionsterms der charakteristischen Funktion des Gesamtperiodenverlustes in den hier verwendeten Modellierungen ist eine Integration mithilfe einer Stammfunktion i.d.R. nicht möglich. Daher wird im Folgenden die hier beschriebene Vorgehensweise mit numerischen Methoden umgesetzt. D.h. in den Fallbeispielen erfolgt u.a. die Integration des Produkts aus charakteristischer Funktion des Gesamtperiodenverlustes und der speziellen komplex-wertigen Funktion mithilfe numerischer Methoden.

Damit stehen für die vorliegende Ausarbeitung drei methodische Ansätze für die Ermittlung der Kennzahlen des Gesamtperiodenverlustes zur Verfügung:

- Analytische Methoden, d.h. direkte Berechnung aus den Verteilungsannahmen
- Monte-Carlo-Simulation
- Numerische Methoden, insbesondere numerisches Integrieren

Diese drei Methoden werden in den folgenden drei Fallbeispielen bei unterschiedlichen Modellannahmen bezüglich der Häufigkeit des Eintritts eines Risikos und der Höhe des Verlustes bei Eintritt des Risikos gegenübergestellt.

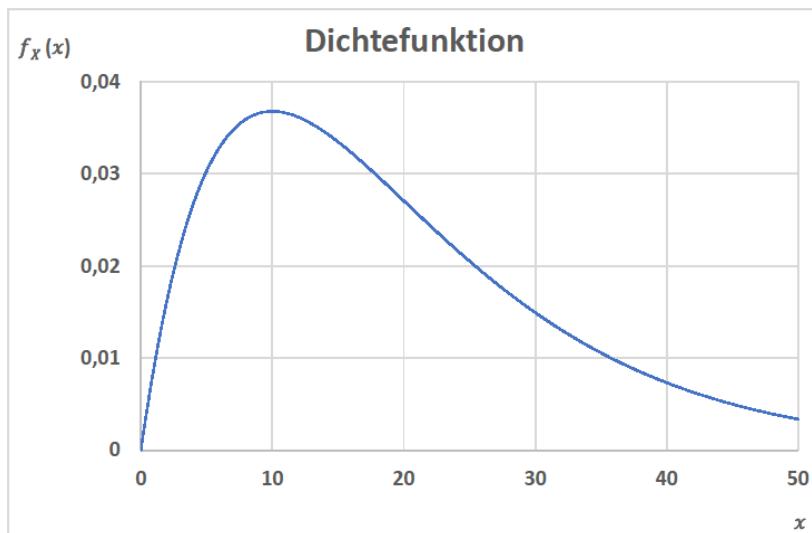
5. Fallbeispiel 1

Wir betrachten zunächst folgendes Fallbeispiel. Die Verteilung der Häufigkeit für den Eintritt des Risikos pro Periode, d.h. für die Zufallsvariable N , sei gegeben durch die folgenden Einzelwahrscheinlichkeiten:

$$P(N = 0) = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}, P(N = 1) = \frac{4}{15}, P(N = 2) = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}, P(N = 3) = \frac{2}{15}, P(N = 4) = \frac{1}{15}$$

Damit ergibt sich jeweils gerundet auf vier Stellen hinter dem Komma $\mu_N \approx 1,3333$ und $\sigma_N \approx 1,2473$.

Für den Verlust, der mit dem Eintritt des Risikos verbunden ist, wird eine Gamma-Verteilung mit den Parametern $\gamma = 2$ und $\alpha = 0,1$ angesetzt. Hier der Graph der zugehörigen Dichtefunktion:



Man erkennt, dass in der gewählten Modellierung die Dichte bis zum Modus $x = 10$ steil ansteigt und danach bis ins Unendliche flach ausläuft. D.h. kleinere Werte für den mit dem Eintritt eines Risikos verbundenen Verlust haben eine höhere Wahrscheinlichkeit als größere Werte. Für den Erwartungswert der gewählten Gamma-Verteilung gilt gemäß Beispiel 2f) $\mu_X = \frac{2}{0,1} = 20$ und für die Standardabweichung $\sigma_X = \frac{\sqrt{2}}{0,1} \approx 14,1421$.

Analytische Methoden

Mithilfe des Satzes aus Abschnitt 3 lassen sich nun der Erwartungswert μ und die Standardabweichung σ des Gesamtperiodenverlustes Z wie folgt berechnen:

$$\mu = \mu_N \cdot \mu_X \approx 1,3333 \cdot 20 = 26,6660$$

$$\sigma = \sqrt{\sigma_N^2 \cdot \mu_X^2 + \mu_N \cdot \sigma_X^2} \approx \sqrt{1,2473^2 \cdot 20^2 + 1,3333 \cdot 14,1421^2} \approx 29,8155$$

Monte-Carlo-Simulation

Zur Anwendung einer Monte-Carlo-Simulation für den Gesamtperiodenverlust benötigt man bei dem hier verwendeten Modell zum einen Zufallszahlen für die Festlegung der Häufigkeit des Eintritts des Risikos und zum anderen Zufallszahlen für den mit dem Eintritt des Risikos verbundenen Verlust. Die Zufallszahlen werden dabei jeweils im Intervall $[0,1]$ generiert.

Zur Festlegung der Häufigkeit aus einer gegebenen Zufallszahl wird, wie bei der Simulation von diskreten Zufallsvariablen üblich, das Intervall $[0,1]$ entsprechend der gegebenen Einzelwahrscheinlichkeiten in fünf Teilintervalle aufgeteilt und daraus der Wert abgeleitet. Der Verlust bei Eintritt des Risikos hingegen wird durch Einsetzen der zugehörigen Zufallszahl in die Inverse der Verteilungsfunktion der gewählten Gamma-Verteilung generiert. Addiert man dann je nach Häufigkeit des Risikos die jeweiligen Verluste auf, so erhält den fiktiven Gesamtperiodenverlust pro Simulationslauf.

Eine entsprechende Monte-Carlo-Simulation wird für 10.000 Simulationsläufe mit Excel durchgeführt. Es ergeben sich die folgenden Ergebnisse:

Kennzahl	Ergebnis der Monte-Carlo-Simulation	Relative Abweichung zum theoretischen Wert
Erwartungswert/Mittelwert	26,3375	-1,2319%
Standardabweichung	29,5443	-0,9096%
80%-Quantil	50,0982	
90%-Quantil	69,1202	
95%-Quantil bzw. Value at Risk zum Niveau 5%	85,3542	
99%-Quantil bzw. Value at Risk zum Niveau 1%	118,0841	
Expected Shortfall zum Niveau 5%	105,3408	
Expected Shortfall zum Niveau 1%	134,9285	

Numerische Methoden

Bei der Ermittlung der beiden Kennzahlen Erwartungswert und Standardabweichung für den Gesamtperiodenverlust Z geht man von der komplex-wertigen charakteristischen Funktion

$$\Phi(u) = E(e^{i \cdot u \cdot Z})$$

zur reell-wertigen momenterzeugenden Funktion

$$m(u) := \Phi(-i \cdot u) = E(e^{u \cdot Z})$$

über. Für die erste Ableitung der momenterzeugenden Funktion gilt dann

$$m'(u) = -i \cdot \Phi'(-i \cdot u)$$

bzw.

$$m'(0) = -i \cdot \Phi'(0) = -i^2 \cdot E(Z) = E(Z)$$

und für die zweite Ableitung

$$m''(u) = i^2 \cdot \Phi''(-i \cdot u)$$

bzw.

$$m''(0) = i^2 \cdot \Phi''(0) = i^4 \cdot E(Z^2) = E(Z^2).$$

Die momenterzeugende Funktion für den Gesamtperiodenverlust Z berechnet sich wie folgt:

$$\begin{aligned} m(u) &= \Phi(-i \cdot u) = h(\varphi_X(-i \cdot u)) = h\left(\left(\frac{0,1}{0,1-u}\right)^2\right) = \sum_{k=0}^4 P(N=k) \cdot \left(\left(\frac{0,1}{0,1-u}\right)^2\right)^k \\ &= \frac{1}{3} + \frac{4}{15} \cdot \left(\frac{0,1}{0,1-u}\right)^2 + \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{0,1}{0,1-u}\right)^4 + \frac{2}{15} \cdot \left(\frac{0,1}{0,1-u}\right)^6 + \frac{1}{15} \cdot \left(\frac{0,1}{0,1-u}\right)^8 \end{aligned}$$

Leitet man diese Funktion numerisch an der Stelle $u = 0$ ab, so erhält für Δu hinreichend klein die Näherungen

$$\mu = E(Z) = m'(0) \approx \frac{m(\Delta u) - m(-\Delta u)}{2 \cdot \Delta u}$$

und

$$\sigma^2 + \mu^2 = E(Z^2) = m''(0) \approx \frac{m(\Delta u) + m(-\Delta u) - 2 \cdot m(0)}{(\Delta u)^2} = \frac{m(\Delta u) + m(-\Delta u) - 2}{(\Delta u)^2}.$$

(vgl. [1] S.125ff, [4])

Wählt man $\Delta u = 10^{-4}$, so ergibt sich $\mu \approx 26,6669$ und $\sigma \approx 29,8142$. Die relativen Abweichungen zu den exakten Werten betragen 0,0034% bzw. -0,0044% und sind im Wesentlichen auf Rundungseffekte zurückzuführen.

Die Ermittlung der Quantile erfolgt mithilfe der Umkehrformel bzw. mit numerischer Integration. Im ersten Schritt muss dazu die charakteristische Funktion des Verlustes, der mit dem Eintritt des Risikos verbunden ist, in ihren Real- und Imaginärteil zerlegt werden. Die dafür verwendete Gamma-Verteilung mit den Parametern $\gamma = 2$ und $\alpha = 0,1$ hat die charakteristische Funktion

$$\varphi_X(u) = \left(\frac{0,1}{0,1 - i \cdot u} \right)^2, u \in \mathbb{R},$$

diese lässt sich wie folgt umformen:

$$\begin{aligned} \left(\frac{0,1}{0,1 - i \cdot u} \right)^2 &= \left(\frac{0,1}{0,1 - i \cdot u} \cdot \frac{0,1 + i \cdot u}{0,1 + i \cdot u} \right)^2 = \left(\frac{0,01 + i \cdot 0,1 \cdot u}{0,01 + u^2} \right)^2 \\ &= \left(\frac{0,01}{0,01 + u^2} + i \cdot \frac{0,1 \cdot u}{0,01 + u^2} \right)^2 \\ &= \left(\frac{0,01}{0,01 + u^2} \right)^2 + 2 \cdot i \cdot \frac{0,01}{0,01 + u^2} \cdot \frac{0,1 \cdot u}{0,01 + u^2} - \left(\frac{0,1 \cdot u}{0,01 + u^2} \right)^2 \\ &= \frac{0,0001 - 0,01 \cdot u^2}{(0,01 + u^2)^2} + i \cdot \frac{0,002 \cdot u}{(0,01 + u^2)^2} \end{aligned}$$

D.h. man erhält $\operatorname{Re}(\varphi_X(u)) = \frac{0,0001 - 0,01 \cdot u^2}{(0,01 + u^2)^2}$ und $\operatorname{Im}(\varphi_X(u)) = \frac{0,002 \cdot u}{(0,01 + u^2)^2}$

Für die charakteristische Funktion des Gesamtperiodenverlustes gilt dann

$$\begin{aligned} \Phi(u) &= h(\varphi_X(u)) = \sum_{k=0}^4 \left(\operatorname{Re}(\varphi_X(u)) + i \cdot \operatorname{Im}(\varphi_X(u)) \right)^k \cdot P(N = k) \\ &= \sum_{k=0}^4 \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \cdot \operatorname{Re}(\varphi_X(u))^j \cdot i^{k-j} \cdot \operatorname{Im}(\varphi_X(u))^{k-j} \cdot P(N = k) \\ &= \sum_{k=0}^4 \sum_{\substack{j=0 \\ k-j \bmod 4=0}}^k \binom{k}{j} \cdot \operatorname{Re}(\varphi_X(u))^j \cdot \operatorname{Im}(\varphi_X(u))^{k-j} \cdot P(N = k) \\ &\quad + i \cdot \sum_{k=0}^4 \sum_{\substack{j=0 \\ k-j \bmod 4=1}}^k \binom{k}{j} \cdot \operatorname{Re}(\varphi_X(u))^j \cdot \operatorname{Im}(\varphi_X(u))^{k-j} \cdot P(N = k) \\ &\quad - \sum_{k=0}^4 \sum_{\substack{j=0 \\ k-j \bmod 4=2}}^k \binom{k}{j} \cdot \operatorname{Re}(\varphi_X(u))^j \cdot \operatorname{Im}(\varphi_X(u))^{k-j} \cdot P(N = k) \\ &\quad - i \cdot \sum_{k=0}^4 \sum_{\substack{j=0 \\ k-j \bmod 4=3}}^k \binom{k}{j} \cdot \operatorname{Re}(\varphi_X(u))^j \cdot i^{k-j} \cdot \operatorname{Im}(\varphi_X(u))^{k-j} \cdot P(N = k) \end{aligned}$$

Der Realteil von $\Phi(u)$ ergibt sich dann aus dem ersten und dem dritten Term, der Imaginärteil aus dem zweiten und vierten Term.

Zur Berechnung eines Quantils mithilfe der Umkehrformel benötigt man den Realteil des Produkts $g(u, 0, b) \cdot \Phi(u)$ für $b > 0$. Dieser ergibt sich aus

$$\begin{aligned}
g(u, 0, b) \cdot \Phi(u) &= (Re(g(u, 0, b)) + i \cdot Im(g(u, 0, b))) \cdot (Re(\Phi(u)) + i \cdot Im(\Phi(u))) \\
&= Re(g(u, 0, b)) \cdot Re(\Phi(u)) - Im(g(u, 0, b)) \cdot Im(\Phi(u)) \\
&\quad + i \cdot (Re(g(u, 0, b)) \cdot Im(\Phi(u)) + Im(g(u, 0, b)) \cdot Re(\Phi(u))),
\end{aligned}$$

wobei für $u \neq 0$ gilt

$$\begin{aligned}
g(u, 0, b) &= \frac{1 - e^{-i \cdot b \cdot u}}{i \cdot u} = \frac{1 - \cos(-b \cdot u) - i \cdot \sin(-b \cdot u)}{i \cdot u} \\
&= -\frac{\sin(-b \cdot u)}{u} + i \cdot \frac{\cos(-b \cdot u) - 1}{u} = \frac{\sin(b \cdot u)}{u} + i \cdot \frac{\cos(b \cdot u) - 1}{u}.
\end{aligned}$$

Ferner gilt $g(0, 0, b) = b$.

Mit der Umkehrformel und mithilfe der Rechteckregel bzw. der Mittelsumme der numerischen Integration (vgl. [1] S.145ff) ergibt sich die folgende Näherung für die Verteilungsfunktion F des Gesamtperiodenverlustes Z an der Stelle $b > 0$:

$$\begin{aligned}
F(b) &= P(0 \leq Z \leq b) = \frac{1}{2} \cdot P(Z = 0) + \frac{1}{\pi} \cdot \lim_{z \rightarrow \infty} \int_0^z Re(g(u, 0, b) \cdot \Phi(u)) du \\
&\approx \frac{1}{2} \cdot P(Z = 0) + \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{200} Re(g(u, 0, b) \cdot \Phi(u)) du \\
&\approx \frac{1}{2} \cdot P(Z = 0) + \frac{1}{\pi} \cdot \sum_{k=0}^{9.999} Re(g(0,01 + k \cdot 0,02, 0, b) \cdot \Phi(0,01 + k \cdot 0,02)) \cdot 0,02 \\
&= \frac{1}{2} \cdot P(Z = 0) + \frac{1}{\pi} \cdot \sum_{k=0}^{9.999} Re(g(0,01 + k \cdot 0,02, 0, b)) \cdot Re(\Phi(0,01 + k \cdot 0,02)) \cdot 0,02 \\
&\quad - \frac{1}{\pi} \cdot \sum_{k=0}^{9.999} Im(g(0,01 + k \cdot 0,02, 0, b)) \cdot Im(\Phi(0,01 + k \cdot 0,02)) \cdot 0,02
\end{aligned}$$

Die Umsetzung dieser Formel in Excel liefert für die Quantile bzw. den Value at Risk die folgenden Ergebnisse:

Kennzahl	Ergebnis
80%-Quantil	50,5519
90%-Quantil	69,5681
95%-Quantil bzw. Value at Risk zum Niveau 5%	85,9592
99%-Quantil bzw. Value at Risk zum Niveau 1%	118,3818

Die relativen Abweichungen zu den Ergebnissen der Monte-Carlo-Simulation liegen alle im Promillebereich, d.h. unter 1%.

Die Berechnung des Expected Shortfall zum Niveau 5% des Gesamtperiodenverlustes $ES_{5\%}(Z)$ erfolgt nun ebenfalls näherungsweise, dabei sei $VaR_{5\%}(Z)$ der mit numerischen Methoden ermittelte zugehörige Value at Risk. Wir gehen ferner davon aus, dass die Verteilungsfunktion F des Gesamtperiodenverlustes Z im Intervall $(0, \infty)$ stetig ist und die Dichte f besitzt. Damit ergibt sich für hinreichend große L und mithilfe der partiellen Integration:

$$\begin{aligned} ES_{5\%}(Z) &= \frac{1}{0,05} \cdot \int_{VaR_{5\%}(Z)}^{\infty} z \cdot f(z) dz \approx \frac{1}{0,05} \cdot \int_{VaR_{5\%}(Z)}^L z \cdot f(z) dz \\ &= \frac{1}{0,05} \cdot \left(-[z \cdot (1 - F(z))]_{VaR_{5\%}(Z)}^L + \int_{VaR_{5\%}(Z)}^L 1 - F(z) dz \right) \\ &= \frac{1}{0,05} \cdot \left(-L \cdot (1 - F(L)) + VaR_{5\%}(Z) \cdot (1 - F(VaR_{5\%}(Z))) + \int_{VaR_{5\%}(Z)}^L 1 - F(z) dx \right) \\ &\approx \frac{1}{0,05} \cdot \left(-L \cdot (1 - F(L)) + VaR_{5\%}(Z) \cdot 0,05 + \sum_{k=0}^n \frac{2 - F(z_{k+1}) - F(z_k)}{2} \cdot (z_{k+1} - z_k) \right) \end{aligned}$$

wobei die Stützstellen gegeben sind durch $z_0 = VaR_{5\%}(Z), z_1, z_2, \dots, z_{n-1}, z_n, z_{n+1} = L$.

Dabei ergibt sich die letzte Näherung wiederum aus der numerischen Integration, diesmal allerdings mit der Trapezregel (vgl. [1] S.145ff).

Berechnet man die Werte der Verteilungsfunktion F mit der obigen Näherungsformel und wählt man $n = 100$, $z_1 = [z_0] + 1$ sowie $z_{k+1} = z_k + 1$ für $k = 1, 2, \dots, 100$, so ergibt sich wegen $VaR_{5\%}(Z) = 85,9592$ für L der Wert 186. Als Expected Shortfall zum Niveau 5% erhält man dann näherungsweise den Wert 105,3085. Die relative Abweichung zum Ergebnis der Monte-Carlo-Simulation beträgt $-0,0307\%$. Zur Beurteilung der Qualität der Näherung kann dabei noch angemerkt werden, dass $P(Z > L) = 0,000156$.

Für den Expected Shortfall zum Niveau 1% ergibt sich mit der gleichen Methode näherungsweise ein Wert von 135,2416 bzw. eine relative Abweichung zum Ergebnis der Monte-Carlo-Simulation von 0,2320%.

Als Fazit kann festgehalten werden, dass es im vorliegenden Beispiel für die Ergebnisse der Kennzahlen bei Anwendung der Monte-Carlo-Simulation einerseits und bei der Anwendung der numerischen Methoden (numerisches Ableiten und numerisches Integrieren) andererseits nur geringfügige Abweichungen gibt.

Kennzahl	Monte-Carlo-Simulation	Numerische Methoden	Abweichung zur Monte-Carlo-Simulation (in%)
Erwartungswert	26,3375	26,6669	1,2507%.
Standard-abweichung	29,5443	29,8142	0,9135%.
Value at Risk zum Niveau 5%	85,3542	85,9592	0,7088%.
Value at Risk zum Niveau 1%	118,0841	118,3818	0,2521%.
Expected Shortfall zum Niveau 5%	105,3408	105,3085	-0,0307%.
Expected Shortfall zum Niveau 1%	134,9285	135,2416	0,2320%.

6. Fallbeispiel 2

Oft werden wird bei der Modellierung im quantitativen Risikomanagement davon ausgegangen, dass ein Risiko maximal einmal pro Periode eintritt und die Wahrscheinlichkeit dafür $p \in (0,1)$ beträgt. D.h. für die Zufallsvariable N wird die Bernoulli-Verteilung verwendet. Für den Verlust, der mit dem Eintritt des Risikos verbunden ist, gehen wir zunächst ganz allgemein von einer stetigen Verteilung auf dem Intervall $[0, M]$ aus.

Für den Gesamtperiodenverlust Z erhält man als Erwartungswert

$$\mu = \mu_N \cdot \mu_X = p \cdot \mu_X$$

und als Standardabweichung

$$\sigma = \sqrt{\sigma_N^2 \cdot \mu_X^2 + \mu_N \cdot \sigma_X^2} = \sqrt{p \cdot (1-p) \cdot \mu_X^2 + p \cdot \sigma_X^2}.$$

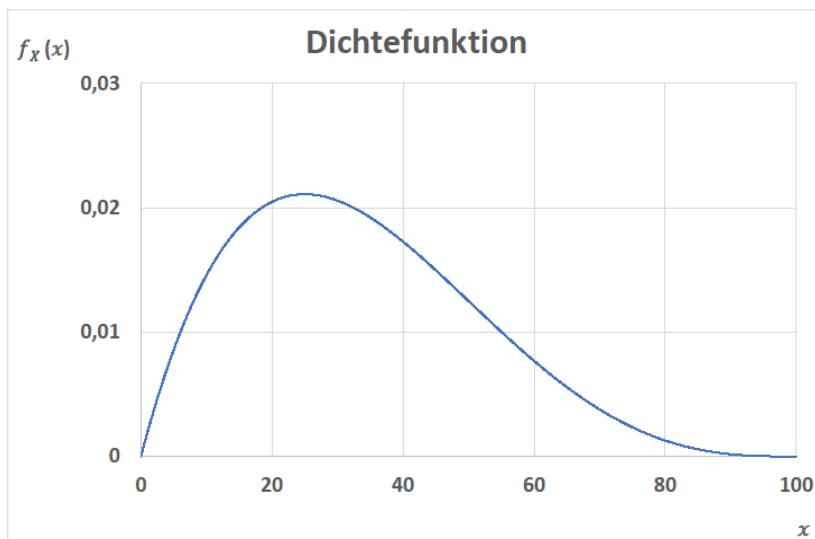
Für die charakteristische Funktion des Gesamtperiodenverlustes Z ergibt sich

$$\Phi(u) = h(\varphi_X(u)) = (1-p) + \varphi_X(u) \cdot p, u \in \mathbb{R}.$$

Wir wollen für diesen Fall nun ein konkretes Beispiel betrachten und modellieren den Verlust, der mit dem Eintritt des Risikos verbunden ist, mit einer Pert-Verteilung mit best case $a = 0$, mit normal case $b = 25$ und mit worst case $c = M = 100$. Bei dieser Pert-Verteilung handelt es sich um eine Beta-Verteilung auf dem Intervall $[0,100]$ mit den Parametern

$$\alpha = \frac{4 \cdot 25 + 100}{100} = 2 \text{ und } \beta = \frac{-4 \cdot 25 + 5 \cdot 100}{100} = 4.$$

Hier der Graph der zugehörigen Dichtefunktion:



Der Parameter der Bernoulli-Verteilung wird im Folgenden mit $p = 0,2$ angesetzt. D.h. für die Häufigkeit des Eintritts des Risikos pro Periode bzw. für die Zufallsvariable N gilt $P(N = 0) = 0,8$ und $P(N = 1) = 0,2$. Damit ergibt sich für den Erwartungswert des Gesamtperiodenverlustes

$$\mu = \mu_N \cdot \mu_X = p \cdot M \cdot \frac{\alpha}{\alpha + \beta} = 0,2 \cdot 100 \cdot \frac{2}{2 + 4} = \frac{20}{3} \approx 6,6667$$

und für dessen Standardabweichung

$$\begin{aligned}\sigma &= \sqrt{\sigma_N^2 \cdot \mu_X^2 + \mu_N \cdot \sigma_X^2} = \sqrt{p \cdot (1-p) \cdot \left(M \cdot \frac{\alpha}{\alpha + \beta}\right)^2 + p \cdot \left(M \cdot \frac{\sqrt{\alpha \cdot \beta}}{\sqrt{\alpha + \beta + 1} \cdot (\alpha + \beta)}\right)^2} \\ &= \sqrt{0,2 \cdot 0,8 \cdot \left(100 \cdot \frac{2}{2 + 4}\right)^2 + 0,2 \cdot \left(100 \cdot \frac{\sqrt{2 \cdot 4}}{\sqrt{2 + 4 + 1} \cdot (2 + 4)}\right)^2} \approx 15,5329.\end{aligned}$$

D.h. die **analytischen Methoden** auf Basis des Satzes aus Abschnitt 3 ermöglicht wiederum die Berechnung der beiden Kennzahlen Erwartungswert und Standardabweichung.

Ebenfalls direkt können in diesem Fallbeispiel die Quantile des Gesamtperiodenverlustes Z bestimmt werden. Es sei $z \in (0,100]$.

$$P(Z \leq z) = P(Z \leq z | N = 0) \cdot P(N = 0) + P(Z \leq z | N = 1) \cdot P(N = 1) = 0,8 + F_X(z) \cdot 0,2$$

Das 95%-Quantil bzw. den Value at Risk zum Niveau 5% kann dann wie folgt ermittelt werden:

$$0,8 + F_X(z) \cdot 0,2 = 0,95 \Leftrightarrow F_X(z) = 0,75 \Leftrightarrow z = F_X^{-1}(0,75) = 45,4181$$

Analog ergibt sich für das 90%-Quantil 31,3810 und das 99%-Quantil 65,7408.

Monte-Carlo-Simulation

Analog zu Fallbeispiel 1 wird eine Monte-Carlo-Simulation für 10.000 Simulationsläufe mit Excel durchgeführt. Es ergeben sich die folgenden Ergebnisse:

Kennzahl	Ergebnis der Monte-Carlo-Simulation	Relative Abweichung zum theoretischen Wert
Erwartungswert/Mittelwert	6,6598	-0,1035%
Standardabweichung	15,5153	-0,1133%
90%-Quantil	31,3624	-0,0593%
95%-Quantil bzw. Value at Risk zum Niveau 5%	45,7070	0,6361%
99%-Quantil bzw. Value at Risk zum Niveau 1%	66,0723	0,5043%
Expected Shortfall zum Niveau 5%	57,4979	
Expected Shortfall zum Niveau 1%	73,3108	

Numerische Methoden

Zunächst werden ebenfalls analog zu Fallbeispiel 1 der Erwartungswert und die Standardabweichung des Gesamtperiodenverlustes Z mithilfe der ersten beiden Ableitungen der zugehörigen momenterzeugenden Funktion berechnet. Die momenterzeugende Funktion berechnet sich dabei näherungsweise mit numerischer Integration wie folgt. Es sei $u \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
m(u) &= \Phi(-i \cdot u) = E(e^{u \cdot Z}) = E(e^{u \cdot Z} | N = 0) \cdot P(N = 0) + E(e^{u \cdot Z} | N = 1) \cdot P(N = 1) \\
&= 1 \cdot 0,8 + E(e^{u \cdot Z}) \cdot 0,2 = 0,8 + 0,2 \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{u \cdot x} \cdot f_X(x) dx \\
&= 0,8 + 0,2 \cdot \int_0^{100} e^{u \cdot x} \cdot \frac{1}{100^5 \cdot B(2,4)} \cdot x \cdot (100 - x)^3 dx \\
&\approx 0,8 + 0,2 \cdot \sum_{k=0}^{99} e^{u \cdot (k+0,5)} \cdot \frac{1}{100^5 \cdot B(2,4)} \cdot (k + 0,5) \cdot (100 - (k + 0,5))^3
\end{aligned}$$

Berechnet man das Integral numerisch für $u = 10^{-4}$ und $u = -10^{-4}$, so ergibt sich mit numerischem Ableiten für den Erwartungswert $\mu \approx 6,6661$ und für die

Standardabweichung $\sigma \approx 15,5323$. Die relativen Abweichungen zu den (gerundeten) exakten Werten betragen $-0,0090\%$ bzw. $-0,0039\%$ und sind wie in Fallbeispiel 1 im Wesentlichen auf Rundungseffekte zurückzuführen.

Zur Berechnung der Quantile mithilfe der Umkehrformel benötigt man zunächst die Zerlegung der charakteristischen Funktion in Ihren Real- und ihren Imaginärteil. Analog zur momenterzeugenden Funktion wird dazu mit numerischer Integration gearbeitet. Es sei $u \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}\Phi(u) &= E(e^{i \cdot u \cdot Z}) = E(e^{i \cdot u \cdot Z} | N = 0) \cdot P(N = 0) + E(e^{i \cdot u \cdot Z} | N = 1) \cdot P(N = 1) \\ &= 1 \cdot 0,8 + E(e^{i \cdot u \cdot X}) \cdot 0,2 = 0,8 + 0,2 \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{i \cdot u \cdot x} \cdot f_X(x) dx \\ &= 0,8 + 0,2 \cdot \int_0^{100} e^{i \cdot u \cdot x} \cdot \frac{1}{100^5 \cdot B(2,4)} \cdot x \cdot (100 - x)^3 dx \\ &= 0,8 + 0,2 \cdot \int_0^{100} (\cos(u \cdot x) + i \cdot \sin(u \cdot x)) \cdot \frac{1}{100^5 \cdot B(2,4)} \cdot x \cdot (100 - x)^3 dx\end{aligned}$$

Damit ergibt sich für $u \in \mathbb{R}$ der Realteil $Re(\Phi(u))$ näherungsweise mit

$$\begin{aligned}&0,8 + 0,2 \cdot \int_0^{100} \cos(u \cdot x) \cdot \frac{1}{100^5 \cdot B(2,4)} \cdot x \cdot (100 - x)^3 dx \\ &\approx 0,8 + 0,2 \cdot \sum_{k=0}^{99} \cos(u \cdot (k + 0,5)) \cdot \frac{1}{100^5 \cdot B(2,4)} \cdot (k + 0,5) \cdot (100 - (k + 0,5))^3\end{aligned}$$

und der Imaginärteil $Im(\Phi(u))$ näherungsweise mit

$$\begin{aligned}&0,8 + 0,2 \cdot \int_0^{100} \sin(u \cdot x) \cdot \frac{1}{100^5 \cdot B(2,4)} \cdot x \cdot (100 - x)^3 dx \\ &\approx 0,8 + 0,2 \cdot \sum_{k=0}^{99} \sin(u \cdot (k + 0,5)) \cdot \frac{1}{100^5 \cdot B(2,4)} \cdot (k + 0,5) \cdot (100 - (k + 0,5))^3.\end{aligned}$$

Analog zu Fallbeispiel 1 wird nun die Verteilungsfunktion F des Gesamtperiodenverlustes Z für $b > 0$ näherungsweise berechnet mit

$$\begin{aligned}F(b) &= P(0 \leq Z \leq b) \\ &\approx \frac{1}{2} \cdot P(Z = 0) + \frac{1}{\pi} \cdot \sum_{j=0}^{9,999} Re(g(0,01 + j \cdot 0,02,0, b)) \cdot Re(\Phi(0,01 + j \cdot 0,02)) \cdot 0,02 \\ &\quad - \frac{1}{\pi} \cdot \sum_{j=0}^{9,999} Im(g(0,01 + j \cdot 0,02,0, b)) \cdot Im(\Phi(0,01 + j \cdot 0,02)) \cdot 0,02,\end{aligned}$$

wobei wiederum $g(u, 0, b) = \frac{\sin(b \cdot u)}{u} + i \cdot \frac{\cos(b \cdot u) - 1}{u}$ für $u > 0$.

Setzt man diese Formel in Excel um, so ergeben sich für die Quantile bzw. den Value at Risk folgende Ergebnisse:

Kennzahl	Ergebnis
90%-Quantil	31,4980
95%-Quantil bzw. Value at Risk zum Niveau 5%	45,4987
99%-Quantil bzw. Value at Risk zum Niveau 1%	65,5043

Die Abweichungen zu den direkt berechneten Werten sind bei allen drei Werten unterhalb von 1%.

Analog zu Fallbeispiel 1 lassen sich auch hier der Expected Shortfall zum Niveau 5% und zum Niveau 1% mithilfe numerischer Integration berechnen. Für den Expected Shortfall zum Niveau 5% erhält man den Wert 57,7445 und für den Expected Shortfall zum Niveau 1% den Wert 72,9976

Als Fazit kann auch in diesem Fallbeispiel festgehalten werden, dass die es bei Anwendung der Monte-Carlo-Simulation einerseits und bei der Anwendung der numerischen Methoden andererseits nur geringfügige Abweichungen gibt.

Kennzahl	Monte-Carlo-Simulation	Numerische Methoden	Abweichung zur Monte-Carlo-Simulation (in%)
Erwartungswert	6,6598	6,6661	0,0946%.
Standardabweichung	15,5153	15,5323	0,1096%.
Value at Risk zum Niveau 5%	45,7070	45,4987	-0,4557%.
Value at Risk zum Niveau 1%	66,0723	65,5043	-0,8597%.
Expected Shortfall zum Niveau 5%	57,4979	57,7445	0,4289%.
Expected Shortfall zum Niveau 1%	73,3108	72,9976	-0,4272%.

7. Fallbeispiel 3

Im dritten und letzten Fallbeispiel betrachten wir den Fall, dass sich ähnlich wie im ersten Fallbeispiel der Gesamtperiodenverlust Z nicht auf einem möglichen Ereignis beruht, sondern sich aus den Verlusten mehrerer gleichartiger Ereignisse zusammensetzt.

Die Häufigkeit N des Eintritts des Risikos wird dabei durch eine Poisson-Verteilung mit dem Parameter $\lambda = 4$ modelliert. Der Verlust, der mit dem Eintritt des Risikos verbunden ist, genüge wiederum einer Pert-Verteilung, allerdings jetzt mit dem worst case $c = 5$, dem normal case $b = 1,25$ und dem best case $a = 0$. Damit handelt es sich ebenfalls um eine Beta-Verteilung mit den gleichen Parametern wie in Fallbeispiel 2:

$$\alpha = \frac{4 \cdot 1,25 + 5}{5} = 2, \quad \beta = \frac{-4 \cdot 1,25 + 5 \cdot 5}{5} = 4$$

Diesmal aber auf dem Intervall $[0, M] = [0,5]$.

Die Konstellation ist so gewählt, dass der Erwartungswert des Gesamtperiodenverlustes Z im Vergleich zu Fallbeispiel 2 unverändert bleibt, d.h. der durchschnittliche Verlust pro Periode gleich ist:

$$\mu = \mu_N \cdot \mu_X = \lambda \cdot M \cdot \frac{\alpha}{\alpha + \beta} = 4 \cdot 5 \cdot \frac{2}{2 + 4} = \frac{20}{3} \approx 6,6667$$

Allerdings verändert sich der Wert der Standardabweichung:

$$\begin{aligned} \sigma &= \sqrt{\sigma_N^2 \cdot \mu_X^2 + \mu_N \cdot \sigma_X^2} = \sqrt{\lambda \cdot \left(M \cdot \frac{\alpha}{\alpha + \beta}\right)^2 + \lambda \cdot \left(M \cdot \frac{\sqrt{\alpha \cdot \beta}}{\sqrt{\alpha + \beta + 1} \cdot (\alpha + \beta)}\right)^2} \\ &= \sqrt{4 \cdot \left(5 \cdot \frac{2}{2 + 4}\right)^2 + 4 \cdot \left(5 \cdot \frac{\sqrt{2 \cdot 4}}{\sqrt{2 + 4 + 1} \cdot (2 + 4)}\right)^2} \approx 3,7796 \end{aligned}$$

Im Folgenden werden wieder die Ergebnisse der Monte-Carlo-Simulation und die Ergebnisse der numerischen Methoden gegenübergestellt, insbesondere bezogen auf die Quantile bzw. den Value at Risk und bezogen auf den Expected Shortfall. Im Unterschied zu Fallbeispiel 2 können aufgrund der höheren Komplexität des Modells die Quantile nicht direkt bestimmt werden.

Bei der Poisson-Verteilung handelt es sich um eine diskrete Verteilung auf der Menge \mathbb{N}_0 . Sowohl bei der Monte-Carlo-Simulation als auch bei den numerischen Methoden findet eine Näherung dahingehend statt, dass die Ausgänge mit mehr als 16 Ereignissen pro Periode keine Berücksichtigung finden. Damit werden Ereignisse, deren Wahrscheinlichkeit in Summe ca. $0,00000113 = 1,13 \cdot 10^{-6}$ beträgt, außer Acht gelassen. Verwendet man statt Excel eine höhere Programmiersprache, so kann hier sicherlich eine noch höhere Genauigkeit umgesetzt werden.

Monte-Carlo-Simulation

Analog zu den vorherigen Fallbeispielen wird eine Monte-Carlo-Simulation für 10.000 Simulationsläufe mit Excel durchgeführt. Dabei ist zu beachten, dass sowohl für Häufigkeit des Eintritts des Risiko, als für die möglichen 16 unterschiedlichen Verlusthöhen Zufallszahlen zur Verfügung stehen müssen. Es ergeben sich die folgenden Ergebnisse:

Kennzahl	Ergebnis der Monte-Carlo-Simulation	Relative Abweichung zum theoretischen Wert
Erwartungswert/Mittelwert	6,6708	0,0615%
Standardabweichung	3,7724	-0,1905%
90%-Quantil	11,7886	
95%-Quantil bzw. Value at Risk zum Niveau 5%	13,5365	
99%-Quantil bzw. Value at Risk zum Niveau 1%	17,2988	
Expected Shortfall zum Niveau 5%	15,8084	
Expected Shortfall zum Niveau 1%	19,0562	

Numerische Methoden

Die numerischen Methoden basieren wiederum auf der charakteristischen Funktion des Gesamtperiodenverlustes Z . Diese berechnet sich wie folgt bzw. kann wie folgt angenähert werden. Es sei $u \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\varPhi(u) &= E(e^{i \cdot u \cdot Z}) = h(\varphi_X(u)) = e^{\lambda \cdot (\varphi_X(u) - 1)} = e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda \cdot \varphi_X(u)} = e^{-\lambda} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \cdot \varphi_X(u)^k \\
&\approx e^{-\lambda} \cdot \sum_{k=0}^{16} \frac{\lambda^k}{k!} \cdot \varphi_X(u)^k = e^{-\lambda} \cdot \sum_{k=0}^{16} \frac{\lambda^k}{k!} \cdot (Re(\varphi_X(u)) + i \cdot Im(\varphi_X(u)))^k \\
&= e^{-\lambda} \cdot \sum_{k=0}^{16} \frac{\lambda^k}{k!} \cdot \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \cdot Re(\varphi_X(u))^j \cdot i^{k-j} \cdot Im(\varphi_X(u))^{k-j}
\end{aligned}$$

$Re(\varphi_X(u))$ und $Im(\varphi_X(u))$ werden dabei mit dem Verfahren aus Fallbeispiel 2 ermittelt (nur mit anderen Parametern) und der Faktor i^{k-j} entscheidet jeweils darüber, ob der

Summand zum Realteil oder zum Imaginärteil der charakteristischen Funktion des Gesamtperiodenverlustes Z hinzuzurechnen ist bzw. welches Vorzeichen bei einem Summanden anzusetzen ist.

Die momenterzeugende Funktion des Gesamtperiodenverlustes Z kann analog angenähert werden, allerdings muss dabei wegen $m(u) = \Phi(-i \cdot u)$ nicht zwischen Real- und Imaginärteil unterschieden werden. Daher kann auch mit einer höheren Genauigkeit bezogen auf die nichtberücksichtigte Wahrscheinlichkeit gerechnet werden. Es sei $u \in \mathbb{R}$.

$$m(u) = E(e^{u \cdot Z}) = h(\varphi_X(-i \cdot u)) = e^{\lambda \cdot (\varphi_X(-i \cdot u) - 1)} = e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda \cdot \varphi_X(-i \cdot u)}$$

$$\begin{aligned} &= e^{-\lambda} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \cdot \varphi_X(-i \cdot u)^k \approx e^{-\lambda} \cdot \sum_{k=0}^{100} \frac{\lambda^k}{k!} \cdot \varphi_X(-i \cdot u)^k \\ &= e^{-\lambda} \cdot \sum_{k=0}^{100} \frac{\lambda^k}{k!} \cdot \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{u \cdot x} \cdot f_X(x) dx \right)^k \end{aligned}$$

Die Integrale werden wiederum numerisch bestimmt. Wählt für das numerische Ableiten analog zu den Fallbeispielen 1 und 2 $\Delta u = 10^{-4}$, so ergibt für den Erwartungswert $\mu \approx 6,6661$ und für die Standardabweichung $\sigma \approx 3,7795$. Die relativen Abweichungen zu den exakten Werten betragen damit $-0,0090\%$ bzw. $-0,0026\%$ und sind wieder im Wesentlichen auf Rundungseffekte zurückzuführen.

Die Verteilungsfunktion F des Gesamtperiodenverlustes Z berechnet sich für $b > 0$ wieder näherungsweise mit

$$F(b) = P(0 \leq Z \leq b)$$

$$\begin{aligned} &\approx \frac{1}{2} \cdot P(Z = 0) + \frac{1}{\pi} \cdot \sum_{j=0}^{9.999} \operatorname{Re}(g(0,01 + j \cdot 0,02,0, b)) \cdot \operatorname{Re}(\Phi(0,01 + j \cdot 0,02)) \cdot 0,02 \\ &\quad - \frac{1}{\pi} \cdot \sum_{j=0}^{9.999} \operatorname{Im}(g(0,01 + j \cdot 0,02,0, b)) \cdot \operatorname{Im}(\Phi(0,01 + j \cdot 0,02)) \cdot 0,02, \end{aligned}$$

$$\text{wobei wiederum } g(u, 0, b) = \frac{\sin(b \cdot u)}{u} + i \cdot \frac{\cos(b \cdot u) - 1}{u} \text{ für } u > 0.$$

Setzt man diese Formel in Excel um, so ergeben sich für die Quantile bzw. den Value at Risk folgende Ergebnisse:

Kennzahl	Ergebnis
90%-Quantil	11,7467
95%-Quantil bzw. Value at Risk zum Niveau 5%	13,5352
99%-Quantil bzw. Value at Risk zum Niveau 1%	17,1469

Analog zu den Fallbeispielen 1 und 2 lassen sich auch hier der Expected Shortfall zum Niveau 5% und zum Niveau 1% mithilfe numerischer Integration berechnen. Für den Expected Shortfall zum Niveau 5% erhält man den Wert 15,7886 und für den Expected Shortfall zum Niveau 1% den Wert 19,1350

Als Fazit kann auch in diesem Beispiel festgehalten werden, dass die es bei Anwendung der Monte-Carlo-Simulation einerseits und bei der Anwendung der numerischen Methoden andererseits nur geringfügige Abweichungen gibt, wie aus der folgenden Tabelle ersichtlich ist.

Kennzahl	Monte-Carlo-Simulation	Numerische Methoden	Abweichung zur Monte-Carlo-Simulation (in%)
Erwartungswert	6,6708	6,6661	-0,0705%.
Standardabweichung	3,7724	3,7795	0,1882%.
Value at Risk zum Niveau 5%	13,5365	13,5352	-0,0096%.
Value at Risk zum Niveau 1%	17,2988	17,1469	-0,8781%.
Expected Shortfall zum Niveau 5%	15,8084	15,7886	-0,1252%.
Expected Shortfall zum Niveau 1%	19,0562	19,1350	0,4135%.

8. Fazit und Ausblick

Die drei Fallbeispiele zeigen, dass die numerischen Methoden, d.h. das numerische Ableiten und das numerische Integrieren der charakteristischen Funktion, eine sinnvolle Alternative zur Monte-Carlo-Simulation seien können. Die mit den numerischen Methoden verbundenen Ungenauigkeit, z.B. durch die gewählte Breite der Flächenstücke, spielen in den drei Fallbeispielen keine entscheidende Rolle. Die relativen Abweichungen bei den Kennzahlen zu den Ergebnissen der Monte-Carlo-Simulation liegen bis auf eine Ausnahme im Promillebereich, d.h. unterhalb von 1%. Teilweise liegen die Ergebnisse der numerischen Methoden näher an den exakten Werten als die Ergebnisse der Monte-Carlo-Simulation.

Es erscheint lohnenswert die hier vorgestellten numerischen Methoden auch bei komplexeren Modellierungen anzuwenden und ggf. mit den Ergebnissen einer Monte-Carlo-Simulation zu vergleichen. Dabei können sowohl Einzelrisiken als auch ein Risikoportfolio im Fokus stehen. Eine Voraussetzung für die Anwendung der numerischen Methoden ist allerdings, dass die charakteristische Funktion bekannt ist bzw. mit Softwareunterstützung berechnet werden kann. Dies ist z.B. bei dem Barwert einer bewerteten (inhomogenen) Markov-Kette (vgl. [4]) oder einem Risikoportfolio aus unabhängigen Einzelrisiken (mit jeweils bekannter charakteristischer Funktion) der Fall.

Literaturverzeichnis

- [1] Bärwolff, G. und Tischendorf, C. S., *Numerik in der Physik, Ingenieurwissenschaft und Informatik*, 5. Aufl., Springer Spektrum, Berlin Heidelberg 2025.
- [2] Cottin C. und Döhler S., *Risikoanalyse: Modellierung, Beurteilung und Management von Risiken mit Praxisbeispielen*, 2. überarb. u. erw. Aufl., Springer Spektrum, Wiesbaden 2013.
- [3] Gleißner W. und Wolfrum M., *Risikoaggregation und Monte-Carlo-Simulation: Schlüsseltechnologie für Risikomanagement und Controlling*, Springer Fachmedien Wiesbaden, 2019.
- [4] Knobloch, R., *Momente und charakteristische Funktion des Barwerts einer bewerteten inhomogenen Markov-Kette-Anwendung bei risikobehafteten Zahlungsströmen*, In: Forschung am ivwKöln, Band 5/2015, Köln 2015, <http://nbn-resolving.de/urn:nbn:de:hbz:832-cos-816> (Stand 08. August 2025).
- [5] Knobloch, R., *Aggregation in einem Risikoportfolio mit Abhängigkeitsstruktur*, In: Forschung am ivwKöln, Band 2/2024, Köln 2024, <http://nbn-resolving.de/urn:nbn:de:hbz:832-cos4-12343> (Stand 08. August 2025).
- [6] RiskNet, Operationelles Risiko, <https://www.risknet.de/wissen/glossar-eintrag/operationelles-risiko/> (Stand 08. August 2025).
- [7] RMA Risk Management & Rating Association e. V. (Hrsg.), Risikoquantifizierung, Erich Schmidt Verlag, Berlin 2021.
- [8] RMA Risk Management & Rating Association e. V. (Hrsg.), Risikotragfähigkeit, Erich Schmidt Verlag, Berlin 2025.
- [9] Schmidt K. D., *Maß und Wahrscheinlichkeit*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2009 [Online]. Verfügbar unter: <https://doi.org/10.1007/978-3-540-89730-9>.
- [10] Wolfsdorf, K., *Versicherungsmathematik Teil2 Theoretische Grundlagen, Risiktheorie, Sachversicherung*, B. G. Teubner Stuttgart 1988.
- [11] Kabluchko, Z., Anschauliche Wahrscheinlichkeitstheorie (Skript), WWU Münster Institut für mathematische Stochastik, https://www.uni-muenster.de/imperia/md/content/Stochastik/skript_einf_wtheorie.pdf (Stand 08. August 2025).

Impressum

Diese Veröffentlichung erscheint im Rahmen der Online-Publikationsreihe „Forschung am ivwKöln“. Eine vollständige Übersicht aller bisher erschienenen Publikationen findet sich am Ende dieser Publikation und kann [hier abgerufen](#) werden.

Forschung am ivwKöln, 1/2025
ISSN (online) 2192-8479

Ralf Knobloch: Risikoquantifizierung: Charakteristische Funktion und numerische Methoden als Alternative zur Monte-Carlo-Simulation. Fallbeispiele zu kombinierten Verteilungen

Köln, Oktober 2025

Schriftleitung / editor's office:

Prof. Dr. Ralf Knobloch

Schmalenbach Institut für Wirtschaftswissenschaften /
Schmalenbach Institute of Business Administration

Fakultät für Wirtschafts- und Rechtswissenschaften /
Faculty of Business, Economics and Law

Technische Hochschule Köln /
University of Applied Sciences

Gustav Heinemann-Ufer 54
50968 Köln

Mail ralf.knobloch@th-koeln.de

**Herausgeber der Schriftenreihe /
Series Editorship:**

Prof. Dr. Benedikt Funke
Prof. Dr. Ralf Knobloch
Prof. Dr. Michaela Völler

Kontakt Autor / Contact author:

Prof. Dr. Ralf Knobloch

Schmalenbach Institut für Wirtschaftswissenschaften /
Schmalenbach Institute of Business Administration

Fakultät für Wirtschafts- und Rechtswissenschaften /
Faculty of Business, Economics and Law

Technische Hochschule Köln /
University of Applied Sciences

Gustav Heinemann-Ufer 54
50968 Köln

Mail ralf.knobloch@th-koeln.de

Web www.th-koeln.de

Publikationsreihe „Forschung am ivwKöln“

Die Veröffentlichungen der Online-Publikationsreihe "Forschung am ivwKöln" (ISSN: 2192-8479) werden üblicherweise über [Cologne Open Science](#) (Publikationsserver der TH Köln) veröffentlicht. Die Publikationen werden hierdurch über nationale und internationale Bibliothekskataloge, Suchmaschinen sowie andere Nachweisinstrumente erschlossen.

Alle Publikationen sind auch kostenlos abrufbar unter www.ivw-koeln.de.

2025

- 1/2025 Knobloch: Risikoquantifizierung: Charakteristische Funktion und numerische Methoden als Alternative zur Monte-Carlo-Simulation - Fallbeispiele zu kombinierten Verteilungen

2024

- 6/2024 Haarhoff, Wolf: [Alternative Ausgestaltungsmöglichkeiten der Steuer- und Fördersystematik privater Altersvorsorge im Hinblick auf Transparenz und Gerechtigkeit](#)
- 5/2024 Heep-Altiner, Land, Sebold-Bender, Schüte: [Flächendeckende Absicherung von Elementarrisiken](#)
- 4/2024 Arentz, Wolf: [Analyse des Rentenpakets II: Trotz Kapitaldeckung einseitige Belastung jüngerer Generationen](#)
- 3/2024 Günther: [Der Versicherungssenat des Reichsgerichtes, Heinrich Himmler und die Führerscheinklausel](#)
- 2/2024 Knobloch: [Aggregation in einem Risikoportfolio mit Abhängigkeitsstruktur](#)
- 1/2024 Institut für Versicherungswesen: [Forschungsbericht für das Jahr 2023](#)

2023

- 2/2023 Völler, Müller-Peters: [InsurTech Karte ivwKöln 2023 - Beiträge zu InsurTechs und Innovation am ivwKöln](#)
- 1/2023 Institut für Versicherungswesen: [Forschungsbericht für das Jahr 2022](#)

2022

- 4/2022 Goecke: [Collective Defined Contribution Plans – Backtesting Based on German Capital Market Data 1950 - 2022](#)
- 3/2022 Knobloch, Miebs: [Aktuelle Herausforderungen an das aktuarielle und finanzielle Risikomanagement durch COVID-19 und die anhaltende Niedrigzinsphase. Proceedings zum 16. FaRis & DAV-Symposium am 10. Dezember 2021](#)
- 2/2022 Knobloch: [Ein Portfolio von inhomogenen Markov-Ketten mit Abhängigkeitsstruktur](#)
- 1/2022 Institut für Versicherungswesen: [Forschungsbericht für das Jahr 2021](#)

2021

- 4/2021 Institut für Versicherungswesen: [Risiko im Wandel als Herausforderung für die Versicherungswirtschaft](#)
- 3/2021 Völler, Müller-Peters: [InsurTech Karte ivwKöln 2021 - Beiträge zu InsurTechs und Innovation am ivwKöln](#)
- 2/2021 Knobloch: [Die quantitative Risikobewertung bei einem Portfolio von dichotomen Risiken mithilfe des zentralen Grenzwertsatzes](#)
- 1/2021 Institut für Versicherungswesen: [Forschungsbericht für das Jahr 2020](#)

2020

- 7/2020 Müller-Peters, Schmidt, Völler: Revolutionieren Big Data und KI die Versicherungswirtschaft? 24. Kölner Versicherungssymposium am 14. November 2019
- 6/2020 Schmidt: Künstliche Intelligenz im Risikomanagement. Proceedings zum 15. FaRis & DAV Symposium am 6. Dezember 2019 in Köln
- 5/2020 Müller-Peters: Die Wahrnehmung von Risiken im Rahmen der Corona-Krise
- 4/2020 Knobloch: Modellierung einer Cantelli-Zusage mithilfe einer bewerteten inhomogenen Markov-Kette
- 3/2020 Müller-Peters, Gatzert: Todsicher: Die Wahrnehmung und Fehlwahrnehmung von Alltagsrisiken in der Öffentlichkeit
- 2/2020 Völler, Müller-Peters: InsurTech Karte ivwKöln 2020 - Beiträge zu InsurTechs und Innovation am ivwKöln
- 1/2020 Institut für Versicherungswesen: Forschungsbericht für das Jahr 2019

2019

- 5/2019 Muders: Risiko und Resilienz kollektiver Sparprozesse – Backtesting auf Basis deutscher und US-amerikanischer Kapitalmarktdaten 1957-2017
- 4/2019 Heep-Altiner, Berg: Mikroökonomisches Produktionsmodell für Versicherungen. Teil 2: Renditemaximierung und Vergleich mit klassischen Optimierungsansätzen.
- 3/2019 Völler, Müller-Peters: InsurTech Karte ivwKöln 2019 - Beiträge zu InsurTechs und Innovation am ivwKöln
- 2/2019 Rohlfs, Pütz, Morawetz: Risiken des automatisierten Fahrens. Herausforderungen und Lösungsansätze für die Kfz-Versicherung. Proceedings zum 14. FaRis & DAV-Symposium am 7.12.2018 in Köln.
- 1/2019 Institut für Versicherungswesen: Forschungsbericht für das Jahr 2018