Forschung am ivwKöln
Band 4/2016

Bewertete inhomogene Markov-Ketten - Spezielle unterjährliche und zeitstetige Modelle

Ralf Knobloch

ivwKöln
Institut für Versicherungswesen

Technology
Arts Sciences
TH Köln

Forschung am **ivw**Köln, Band 4/2016

Ralf Knobloch
Forschungsstelle FaRis

Bewertete inhomogene Markov-Ketten – Spezielle unterjährliche und zeitstetige Modelle

Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit wird ausgehend von einer jährlichen inhomogenen Markov-Kette durch lineare Interpolation der Übergangsmatrizen und der Einheitsmatrix sowohl eine unterjährliches als auch ein zeitstetige bewertete inhomogene Markov-Kette konstruiert. Beim unterjährlichen Modell liegt der Fokus auf der Verteilung der Zufallsvariablen „Barwert des Zahlungsstroms“ bzw. auf der zugehörigen charakteristischen Funktion und einem EDV-technischen Verfahren zur Berechnung der Momente der Zufallsvariablen. Beim zeitstetigen Modell steht neben der Konstruktion und den üblichen Ergebnissen für zeitstetige Markov-Ketten, die Verallgemeinerung des Restglieds bzw. des Invarianzsatzes im Mittelpunkt des Interesses.

Abstract

In the present paper it will be shown how a priced inhomogeneous Markov chain with periods less than a year and a priced inhomogeneous Markov chain in continuous time can be designed from a given inhomogeneous Markov chain with annual time periods by linear interpolation of the transition matrices and the identity matrix. For the Markov chain with periods less than a year we focus on the distribution of the random variable “present value of the cash-flow” and on the associated characteristic function, respectively as well as an IT method for calculating the moments of the random variable. For the Markov chain in continuous time, the construction of the process, the usual results for time-continuous Markov chains and some special results analogous to a Markov chain with periods less than a year are in the center of attention.

Schlagwörter

Markov-Kette, Bewertete Markov-Kette, Barwert, charakteristische Funktion

Keywords

Markov Chain, Priced Markov Chain, Present Value, Characteristic Function

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung

Markov-Ketten haben in den Wirtschaftswissenschaften die vielfältigsten Anwendungen. Zum einen werden diese Modelle bei klassischen betriebswirtschaftlichen Fragestellungen eingesetzt. Als Beispiele seien hier die Themen Wartesysteme, Lagerhaltung und (Markovsche) Entscheidungsprozesse genannt (vgl. [14]). Zum anderen findet man Anwendungen bei der Modellierung von Zahlungsströmen insbesondere in den Bereichen Insurance und Finance. Mithilfe von Markov-Ketten werden z.B. in der Personenversicherungsmathematik Barwerte, Reserven und Prämien kalkuliert (vgl. [10], [11], [6], [7], [9]). Dabei benötigt man nicht nur jährliche sondern auch unterjährliche und zeitstetige Modelle. In der Personenversicherungsmathematik werden zu Kalkulationszwecken sogenannte Sterbetafeln verwendet, diese enthalten i.d.R. eine zeitliche Dynamik. Ferner ist jeder Zustand, den eine Person annimmt, mit einer Zahlung (einer Bewertung) verbunden. Dies führt zu dem zentralen Begriff dieser Ausarbeitung, nämlich der „bewerteten (zeitlich) inhomogenen Markov-Kette“.

Im vorliegenden Artikel wird ausgehend von einer jährlichen (bewerteten inhomogenen) Markov-Kette ein spezielles unterjährliches bzw. ein spezielles zeitstetiges Modell konstruiert und analysiert. Dabei ist es entscheidend, wie die ursprünglich jährlichen Übergangswahrscheinlichkeiten auf das Jahr verteilt werden. Der hier gewählte Ansatz verteilt die Wahrscheinlichkeiten linear in dem Sinne, dass sich die Übergangsmatrix für das Intervall $[t, t+\alpha]$ für $t \in \mathrm{IN}_0, \alpha \in [0,1]$ durch Interpolation der jährlichen Übergangsmatrix und der Einheitsmatrix ergibt.

Nach Einführung der jährlichen Markov-Kette wird als erster Schwerpunkt das unterjährliche Modell behandelt. Hierbei werden zu Beginn die bereits bekannten Ergebnisse über die Konstruktion des Modells (vgl. [8]) und dessen Anwendung bei der Bewertung von risikobehafteten Zahlungsströmen (vgl. [7]) zusammengestellt. Anschließend wird analog zum jährlichen Modell (vgl. [9]) eine geschlossene Formel für die charakteristische Funktion des Barwerts eines risikobehafteten Zahlungsstroms hergeleitet. Damit ist das Wahrscheinlichkeitsgesetz dieses Barwerts festgelegt, denn für eine reellwertige Zufallsvariable $\mathbf{B}$ ist die Verteilung durch die komplexwertige Funktion

$$\varphi(x) = E(\exp(i \cdot x \cdot B)) \ , x \in \mathrm{IR}$$

eindeutig bestimmt (vgl. [3] S.92). Dabei sei $i = \sqrt{-1}$ die imaginäre Einheit. Überträgt man die Formel für die charakteristische Funktion auf die momentenerzeugende Funktion, so können durch (numerisches) Ableiten analog zum jährlichen Fall (vgl.

[9]) auch höhere Momente, z.B. die Varianz und die Standardabweichung, ermittelt werden.

Im zweiten Schwerpunkt steht eine spezielle zeitstetige Markov-Kette im Mittelpunkt des Interesses. Zunächst muss das spezielle Modell konstruiert bzw. seine Existenz nachgewiesen werden. Die in diesem Artikel verwendete Vorgehensweise ist klassisch und basiert wie beim unterjährlichen Modell auf dem Satz von Kolmogorov (vgl. [3] S.257ff), mit dessen Hilfe in der Wahrscheinlichkeitstheorie stochastische Prozesse konstruiert werden. Anschließend werden mehrere für das jährliche und unterjährliche Modell bereits in früheren Veröffentlichungen formulierte Ergebnisse auf das zeitstetige Modelle übertragen. Das besondere Interesse gilt dabei der Formel für den Barwert des risikobehafteten Zahlungsstroms (vgl. [5], [7]) und dem sogenannten Invarianzsatz (vgl. [12], [7]).

2. Das jährliche Modell

Gegeben sei eine Markov-Kette $(X_t)_{t=0,1,2,...}$ mit dem endlichen Zustandsraum $S = \{0,1,2,...,N\}$. Dabei steht der Zeitpunkt t für den Beginn des $(t+1)$-ten Jahres bzw. die Zufallsvariable X_t für den Zustand zu Beginn des $(t+1)$-ten Jahres, $t = 0,1,2,...$. Die Übergangswahrscheinlichkeiten vom Zeitpunkt $t-1$ zum Zeitpunkt t seien gegeben durch die (N+1)x(N+1)-Matrix

$$Q(t) = (q_{jk}(t))_{j,k \in \{0,1,...,N\}},$$

d.h.

$$q_{jk}(t) := P(X_t = k \mid X_{t-1} = j),\ j,k = 0,1,...,N,\ t = 1,2,...$$

(vgl. [5]). Da die Übergangsmatrizen explizit von dem Zeitparameter t abhängen, heißt die Markov-Kette inhomogen (vgl. [10] S.16f und [14] S.11).

Die Verteilung der Zufallsvariablen X_t, $t = 0,1,2,...$, sei gegeben durch den Zeilenvektor $P_t = (P_{t,j})_{j=0,1,2,...,N}$, d.h.

$$P(X_t = j) = P_{t,j},\ j = 0,1,2,...N.$$

Im Folgenden wird davon ausgegangen, dass P_0 vorgegeben ist und alle Wahrscheinlichkeiten, Verteilungen und Momente gegeben dieser Anfangsverteilung berechnet werden. Unter Anwendung der Chapman-Kolmogorov-Gleichung für Markov-Ketten (vgl. [10] S.14) ergibt sich für $t = 0,1,2,...$

$$P_t = P_0 \cdot \prod_{s=1}^{t} Q(s)$$

(vgl. [5]).

Im späteren Verlauf des Artikels werden basierend auf dem jährlichen Modell sowohl eine spezielle unterjährliche Markov-Kette als auch eine spezielle zeitstetige Markov-Kette konstruiert. Von entscheidender Bedeutung ist dabei die Verteilung der jährlichen Übergangswahrscheinlichkeiten auf das Jahr. Diese Verteilung wird mithilfe der folgenden Matrizen modelliert:

$$U(\alpha, t) := \alpha \cdot Q(t+1) + (1-\alpha) \cdot E.$$

Dabei sei $t \in \mathbb{N}_0$, $\alpha \in [0,1]$ und E die Einheitsmatrix.

Da sowohl $\mathbf{Q(t+1)}$ als auch $\mathbf{E}$ stochastische Matrizen sind, gilt dies ebenfalls für die Matrix $\mathbf{U(\alpha,t)}$ (vgl. [8]). Allerdings ist dies nicht ausreichend, um die beiden speziellen Markov-Ketten (unterjährlich und zeitstetig) zu konstruieren.

Man benötigt folgende Bedingungen:

(B1) $\mathbf{U(\alpha,t)}$ ist invertierbar für alle $\mathbf{t \in IN_0}$ und $\boldsymbol{\alpha \in [0,1)}$.

(B2) $\mathbf{(U(\beta,t))^{-1} \cdot U(\alpha,t)}$ ist eine stochastische Matrix für alle $\mathbf{t \in IN_0}$ und $\boldsymbol{\alpha,\beta \in [0,1]}$ mit $\boldsymbol{0 \le \beta < \alpha \le 1}$.

In den praktischen Anwendung (z.B. in der Pensionsversicherungsmathematik) ist es oft der Fall, dass es sich bei den Übergangsmatrizen $\mathbf{Q(t)}$, $\mathbf{t \in IN}$, um obere Dreiecksmatrizen handelt. Setzt man dies voraus, so ist Bedingung (B1) immer gegeben. Für Bedingung (B2) lassen sich bei zwei $\mathbf{(N+1=2)}$ bzw. bei drei Zuständen $\mathbf{(N+1=3)}$ Voraussetzungen formulieren, unter denen sie erfüllt ist (vgl. [8] S.12ff).

Mit Blick auf eine EDV-technische Umsetzung - auch bei größeren Zustandsräumen - sollte die Berechnung von $\mathbf{(U(\beta,t))^{-1} \cdot U(\alpha,t)}$ für alle $\mathbf{t \in IN_0}$ und $\boldsymbol{\alpha,\beta \in [0,1]}$ mit $\boldsymbol{0 \le \beta < \alpha \le 1}$ handhabbar sein. Eine Möglichkeit besteht dabei in der Anwendung der Neumannschen Reihe. Um die Gültigkeit der Neumannschen Reihe zu gewährleisten, wird folgende Bedingung formuliert:

(B3) Für $\mathbf{t \in IN}$ seien alle Eigenwerte der Übergangsmatrix $\mathbf{Q(t)}$ reellwertig und nichtnegativ.

Da $\mathbf{Q(t)}$ eine stochastische Matrix ist, ist die Bedingung (B3) insbesondere dann erfüllt, wenn es dabei sich bei den Übergangsmatrizen um obere Dreiecksmatrizen handelt. Dies ist bei den Modellen der Personenversicherungsmathematik i.d.R. der Fall.

Satz 1:

a) Es sei $\boldsymbol{\beta = 0}$. Dann gilt: $\mathbf{(U(\beta,t))^{-1} \cdot U(\alpha,t) = U(\alpha,t)}$ für alle $\mathbf{t \in IN_0}$ und $\boldsymbol{\alpha \in (0,1]}$.

b) Es sei $\boldsymbol{0 < \beta < 1}$. Dann folgt aus (B3):

$$\mathbf{(U(\beta,t))^{-1} \cdot U(\alpha,t) = \frac{\alpha}{\beta} \cdot E - \frac{\alpha-\beta}{\beta} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \beta^k \cdot (E - Q(t+1))^k}$$

für alle $\mathbf{t \in IN_0}$ und $\boldsymbol{\alpha \in (0,1]}$ mit $\boldsymbol{0 < \beta < \alpha \le 1}$.

Beweis:

a) Für $\beta = 0$ gilt $U(\beta, t) = E$. Somit ist die Behauptung trivialerweise erfüllt.

b) Es gilt:

$$(U(\beta,t))^{-1} \cdot U(\alpha,t) = (\beta \cdot Q(t+1) + (1-\beta) \cdot E)^{-1} \cdot (\alpha \cdot Q(t+1) + (1-\alpha) \cdot E) =$$
$$= (E - \beta \cdot (E - Q(t+1)))^{-1} \cdot (E - \alpha \cdot (E - Q(t+1)))$$

Die Eigenwerte von $Q(t+1)$ sind alle reellwertig und nichtnegativ. Damit liegen alle Eigenwerte von $\beta \cdot (E - Q(t+1))$ im Intervall $[0,1)$. Diese Aussage erhält man wie folgt:

Es sei a ein Eigenwert von $\beta \cdot (E - Q(t+1))$. Dann gibt es einen geeigneten Vektor w mit

$$a \cdot w = \beta \cdot (E - Q(t+1)) \cdot w = \beta \cdot w - \beta \cdot Q(t+1) \cdot w .$$

Daraus folgt:

$$Q(t+1) \cdot w = \frac{\beta - a}{\beta} \cdot w$$

Somit hat $Q(t+1)$ den Eigenwert $\frac{\beta - a}{\beta}$. Da alle Eigenwerte von $Q(t+1)$ (reellwertig und) nichtnegativ sind, erhält man wg. $\beta > 0$ die Ungleichung $a \leq \beta$ und damit $a < 1$.

$Q(t+1)$ ist eine stochastische Matrix, daher gilt nach dem Hauptsatz 2.6. in [1]

$$\frac{\beta - a}{\beta} \leq 1$$

Da $\beta > 0$, folgt daraus $\beta - a \leq \beta$ bzw. $a \geq 0$.

Es sei ρ das Maximum der Absolutbeträge der Eigenwerte von $\beta \cdot (E - Q(t+1))$. Wg. $\rho < 1$ konvergiert die Neumannsche Reihe (vgl. [2] S.264f) und es gilt:

$$(E - \beta \cdot (E - Q(t+1)))^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} ß^k \cdot (E - Q(t+1))^k .$$

Daraus folgt:

$$(U(\beta,t))^{-1} \cdot U(\alpha,t) = \sum_{k=0}^{\infty} ß^k \cdot (E - Q(t+1))^k \cdot (E - \alpha \cdot (E - Q(t+1))) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} ß^k \cdot (E - Q(t+1))^k - \sum_{k=0}^{\infty} \alpha \cdot ß^k \cdot (E - Q(t+1))^{k+1} =$$

$$= E + \sum_{k=1}^{\infty} \left(ß^k - \alpha \cdot \beta^{k-1} \right) \cdot \left(E - Q(t+1) \right)^k = E + \frac{\beta - \alpha}{\beta} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} ß^k \cdot \left(E - Q(t+1) \right)^k =$$

$$= E - \frac{\beta - \alpha}{\beta} \cdot E + \frac{\beta - \alpha}{\beta} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} ß^k \cdot \left(E - Q(t+1) \right)^k == \frac{\alpha}{\beta} \cdot E - \frac{\alpha - \beta}{\beta} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} ß^k \cdot \left(E - Q(t+1) \right)^k$$

□

Für den Rest des vorliegenden Artikels wird davon ausgegangen, dass die Bedingungen (B1), (B2) und (B3) erfüllt sind.

3. Das spezielle unterjährliche Modell

Gegeben sei die Unterteilung eines Jahres in $\mathbf{T} \in \mathbf{IN}$ gleich lange Zeiteinheiten. Für $\mathbf{t} \in \mathbf{IN}$ und $\mathbf{s} \in \{1,2,\ldots,\mathbf{T}\}$ sei

$$\mathbf{R(s,t)} := \left(\mathbf{U}\left(\frac{\mathbf{s-1}}{\mathbf{T}},\mathbf{t-1}\right)\right)^{-1} \cdot \mathbf{U}\left(\frac{\mathbf{s}}{\mathbf{T}},\mathbf{t-1}\right).$$

Dann gilt:

$$\prod_{s=1}^{T} \mathbf{R(s,t)} = \prod_{s=1}^{T}\left(\mathbf{U}\left(\frac{\mathbf{s-1}}{\mathbf{T}},\mathbf{t-1}\right)\right)^{-1} \cdot \mathbf{U}\left(\frac{\mathbf{s}}{\mathbf{T}},\mathbf{t-1}\right) =$$
$$= (\mathbf{U(0,t-1)})^{-1} \cdot \mathbf{U(1,t-1)} = \mathbf{E}^{-1} \cdot \mathbf{Q(t)} = \mathbf{Q(t)}$$

Wg. Bedingung (B2) ist $\mathbf{R(s,t)}$ für alle $\mathbf{t} \in \mathbf{IN}$ und $\mathbf{s} \in \{1,2,\ldots,\mathbf{T}\}$ eine stochastische Matrix. Somit existiert nach [8] Satz 4 eine unterjährliche Markov-Kette

$$\mathbf{Y_0, Y_{1/T}, Y_{2/T}, \ldots, Y_{(T-1)/T}, Y_1, Y_{1+1/T}, \ldots, Y_{1+(T-1)/T}, Y_2, Y_{2+1/T}, \ldots}$$

mit der Anfangsverteilung $\mathbf{P_0}$ und den Übergangsmatrizen

$$\mathbf{R(s,k+1)} = (\mathbf{r_{i,j}(s,k+1)}),\ \mathbf{s = 1,\ldots,T, k = 0,1,2,3,\ldots},$$

d.h. $\mathbf{P}\left(\mathbf{Y_{k+s/T} = j} \,\middle|\, \mathbf{Y_{k+s/T-1/T} = i}\right) = \mathbf{r_{i,j}(s,k+1)}$ für alle $\mathbf{i,j} \in \{\mathbf{0,1,2,...,N}\}$.

Für jeden Zeitpunkt $\mathbf{t + s/T}$, $\mathbf{t = 0,1,2,...}$, $\mathbf{s = 0,1,2,...,T-1}$, sei die Höhe der Zahlung in Abhängigkeit des eingenommenen Zustands durch den Spaltenvektor $\mathbf{L_{t+s/T}}$ festlegt:

$$\mathbf{L_{t+s/T}} = \left(\mathbf{L_{t+s/T,j}}\right)_{\mathbf{j=0,1,2,...,N}},\ \mathbf{t = 0,1,2,...},\ \mathbf{s = 0,1,2,...,T-1}.$$

Dieser Spaltenvektor wird im Folgenden Leistungsvektor genannt. Es sei $\mathbf{abs(x)}$ der Absolutbetrag einer reellen Zahl $\mathbf{x}$. Für den Leistungsvektor wird in diesem Kapitel vorausgesetzt:

(B4) $$\mathbf{M} := \max\left\{ \mathbf{abs}\left(\mathbf{L_{t+s/T,j}}\right) \,\middle|\, \mathbf{t = 0,1,2,..., s = 0,1,...,T-1, j = 0,1,2,...,N} \right\} < \infty$$

Die Menge der Leistungsvektoren wird in der Literatur auch Bewertung der Markov-Kette genannt. Der stochastische Prozess $\left(Y_{t+s/T}\right)_{t=0,1,2,\ldots,s=0,\ldots,T-1}$ wird daher als bewertete inhomogene Markov-Kette bezeichnet. Bewertete Markov-Ketten haben in den Wirtschaftswissenschaften eine Vielzahl von Anwendungen. Beispielsweise werden sie bei Lagerhaltungsmodellen eingesetzt, dabei steht die Bewertung für die mit der Lagerhaltung verbundenen Kosten (Bestell-, Lager- und Fehlmengenkosten). In anderen ökonomischen Anwendungen modelliert die Bewertung zustandsabhängige Gewinne (vgl. [14] S.45ff). Im vorliegenden Modell steht die Bewertung allgemein für einen risikobehafteten Zahlungsstrom.

Basierend auf der unterjährlichen Markov-Kette wird der Barwert des risikobehafteten Zahlungsstroms wie folgt definiert:

$$B_0(T,\infty) := \sum_{t=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{T-1}\sum_{j=0}^{N} 1_{\left\{Y_{t+s/T}=j\right\}} \cdot v^t \cdot v(s) \cdot L_{t+s/T,j} \,.$$

Berücksichtigt man beim Barwert lediglich die ersten n Jahre, so wird der Barwert mit

$$B_0(T,n) := \sum_{t=0}^{n}\sum_{s=0}^{T-1}\sum_{j=0}^{N} 1_{\left\{Y_{t+s/T}=j\right\}} \cdot v^t \cdot v(s) \cdot L_{t+s/T,j}$$

definiert.

Dabei sei v der Diskontierungsfaktor für ein Jahr definiert durch $v = \frac{1}{1+r}$ und $r > 0$ der zeitlich konstante Rechnungszins pro Jahr. Ferner sei $v(s)$ der Diskontierungsfaktor für das unterjährliche Intervall $(t, t+s/T)$. Für den unterjährlichen Diskontierungsfaktor gibt es die unterschiedlichsten Ansätze. Im vorliegenden Artikel wird für $v(s)$ eine der gebräuchlichsten Ansätze - die relative Verzinsung - verwendet, d.h.

$$v(s) = \frac{1}{1+\frac{s}{T}\cdot i} \,.$$

Wg. der Bedingung (B4) konvergiert die Reihe $B_0(T,\infty)$ absolut (vgl. [7]), bei $B_0(T,n)$ handelt es sich um eine endliche Summe. In beiden Fällen hängt der Wert des Barwerts vom jeweiligen Pfad der unterjährlichen Markov-Kette ab. Der Barwert $B_0(T,\infty)$ bzw. $B_0(T,n)$ ist somit eine reellwertige Zufallsvariable.

Für den Erwartungswert der beiden Zufallsvariablen $B_0(T,\infty)$ und $B_0(T,n)$ gilt der folgende Satz. Für den Beweis wird auf [7] Satz 1 verwiesen.

Satz 2:

$$E\left(B_0(T,\infty)\right) = \sum_{t=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{T-1} v^t \cdot v(s) \cdot P_0 \cdot \prod_{j=1}^{t} Q(j) \cdot U\left(s/T, t\right) \cdot L_{t+s/T}$$

bzw.

$$E\left(B_0(T,n)\right) = \sum_{t=0}^{n}\sum_{s=0}^{T-1} v^t \cdot v(s) \cdot P_0 \cdot \prod_{j=1}^{t} Q(j) \cdot U\left(s/T, t\right) \cdot L_{t+s/T}$$

Dabei kann im Fall der endlichen Summe auf die Bedingung (B4) verzichtet werden. Als weiteres Ergebnis wurde in [7] Satz 3 im Kontext der Markov-Ketten der Invarianzsatz bewiesen.

Satz 3:

Die Leistungsvektoren seien zeitlich konstant, d.h. es gelte

$L_{t+s/T} = L_0$ für alle $t = 0,1,2,...$ und $s = 0,1,2,...,T-1$,

Dann gilt:

$$E\left(B_0(T,\infty)\right) = E\left(B_0(1,\infty)\right) - P_0 \cdot L_0 \cdot \frac{1}{T} \cdot \sum_{s=0}^{T-1} \frac{s \cdot (1+r)}{T + s \cdot r}.$$

Dabei sei für den Barwert des Zahlungsstroms bei einfacher jährlicher Zahlung der Leistungsvektor gegeben durch:

$$L_t = T \cdot L_0,\ t = 0,1,2,....$$

Wir betrachten nun die charakteristische Funktion der Zufallsvariable $B_0(T,n)$ und führen dafür die folgende Notation ein:

$$\varphi(x,T,n) = E\left(\exp\left(i \cdot x \cdot B_0(T,n)\right)\right),\ x \in IR.$$

Dabei sei $i = \sqrt{-1}$ die imaginäre Einheit. Analog zur jährlichen Markov-Kette lässt sich auch für die spezielle unterjährliche Markov-Kette eine geschlossene Formel für die charakteristische Funktion herleiten. Es gilt der folgende Satz:

Satz 4:

Die Matrix $\mathbf{V(s,t,x)}$ sei für $\mathbf{t = 0,1,2,\ldots}$, $\mathbf{s = 0,1,\ldots,T}$ und $\mathbf{x \in IR}$ definiert durch:

$$\begin{pmatrix} \exp\left(i \cdot x \cdot v^t \cdot v(s) \cdot L_{t+s/T,0}\right) & & & \\ & \exp\left(i \cdot x \cdot v^t \cdot v(s) \cdot L_{t+s/T,1}\right) & & 0 \\ 0 & & \ddots & \\ & & & \exp\left(i \cdot x \cdot v^t \cdot v(s) \cdot L_{t+s/T,N}\right) \end{pmatrix}$$

Dann gilt für alle $\mathbf{x \in IR}$:

$$\varphi(x,n) = E\left(\exp\left(i \cdot x \cdot B_0(T,n)\right)\right) =$$
$$= \sum_{j=0}^{N} \left(P_0 \cdot V(0,0,x) \cdot \prod_{t=1}^{n} \prod_{s=1}^{T} \left(R(s,t) \cdot V(s,t-1,x)\right) \cdot \prod_{s=1}^{T-1} \left(R(s,n+1) \cdot V(s,n,x)\right) \right)_j$$

Beweis:

Die Aussage ergibt sich aus [9] Hauptsatz. Dabei muss die jährliche Zahlweise durch die unterjährliche Zahlweise ersetzt werden:

Die Zufallsvariable $\mathbf{B_0(T,n)}$ enthält $\mathbf{n+1}$ Jahre mit $\mathbf{(n+1) \cdot T}$ unterjährlichen Zahlungen. Dazu müssen $\mathbf{(n+1) \cdot T - 1}$ unterjährliche Übergangsmatrizen ausgehend vom Zeitpunkt $\mathbf{0}$ berücksichtigt werden. Definiere für $\mathbf{k = 1,\ldots,(n+1) \cdot T - 1}$:

$$\tilde{Q}(k) := R\left(T, \left[\frac{k}{T}\right]\right),$$

wenn $\mathbf{k}$ ein Vielfaches von $\mathbf{T}$ ist und in den anderen Fällen

$$\tilde{Q}(k) := R\left(k - \left[\frac{k}{T}\right] \cdot T, \left[\frac{k}{T}\right] + 1\right).$$

Definiere ferner für $\mathbf{k = 0,1,\ldots,(n+1) \cdot T - 1}$:

$$\tilde{V}(k,x) := V\left(k - \left[\frac{k}{T}\right] \cdot T, \left[\frac{k}{T}\right], x\right).$$

Nach Hauptsatz aus [9] folgt für alle $\mathbf{x \in IR}$:

$$\varphi(x,n) = \sum_{j=0}^{N} \left(P_0 \cdot \tilde{V}(0,x) \cdot \prod_{t=1}^{(n+1)\cdot T-1} \left(\tilde{Q}(t) \cdot \tilde{V}(t,x) \right) \right)_j =$$

$$= \sum_{j=0}^{N} \left(P_0 \cdot \tilde{V}(0,x) \cdot \prod_{t=1}^{n} \prod_{s=1}^{T} \left(\tilde{Q}((t-1)\cdot T+s) \cdot \tilde{V}((t-1)\cdot T+s,x) \right) \cdot \prod_{s=1}^{T-1} \left(\tilde{Q}(n\cdot T+s) \cdot \tilde{V}(n\cdot T+s,x) \right) \right)_j =$$

$$= \sum_{j=0}^{N} \left(P_0 \cdot V(0,0,x) \cdot \prod_{t=1}^{n} \prod_{s=1}^{T} \left(R(s,t) \cdot V(s,t-1,x) \right) \cdot \prod_{s=1}^{T-1} \left(R(s,n+1) \cdot V(s,n,x) \right) \right)_j$$

Dabei ist zu beachten, dass $V(T,t-1,x) = V(0,t,x)$ für alle $t = 0,1,2,\dots$ und $x \in IR$.

□

Bemerkungen:

a) Satz 4 gilt auch wenn für die unterjährlichen Übergangsmatrizen $R(s,t)$ ein anderer Ansatz gewählt wird, sofern sich damit eine unterjährliche Markov-Kette konstruieren lässt. Zur Konstruktion sei auf [8] verwiesen.

b) Falls $s = 1$, so gilt trivialerweise

$$R(1,t) := \left(U(0,t-1)\right)^{-1} \cdot U\left(\frac{1}{T}, t-1\right) = E \cdot \left(\frac{1}{T} \cdot Q(t) + \frac{T-1}{T} \cdot E\right) = \frac{1}{T} \cdot Q(t) + \frac{T-1}{T} \cdot E$$

Aufgrund von Satz 1 lassen sich die unterjährlichen Übergangsmatrizen $R(s,t)$ für $s = 2,3,\dots,T$ wg. $0 < \frac{s-1}{T} < 1$ wie folgt umformen:

$$R(s,t) := \left(U\left(\frac{s-1}{T}, t-1\right)\right)^{-1} \cdot U\left(\frac{s}{T}, t-1\right) =$$

$$= \frac{\frac{s}{T}}{\frac{s-1}{T}} \cdot E - \frac{\frac{s}{T} - \frac{s-1}{T}}{\frac{s-1}{T}} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{s-1}{T}\right)^k \cdot \left(E - Q(t)\right)^k =$$

$$= \frac{s}{s-1} \cdot E - \frac{1}{s-1} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{s-1}{T}\right)^k \cdot \left(E - Q(t)\right)^k$$

c) Die Aussage aus Satz 4 lässt sich analog auch für die momentenerzeugende Funktion

$$m(x,T,n) = E\left(\exp\left(x \cdot B_0(T,n)\right)\right), \; x \in IR$$

formulieren. Dazu müssen lediglich die Matrizen $V(s,t,x)$ entsprechend angepasst werden (vgl. [9]). Durch numerisches Ableiten der momentenerzeugenden Funktion an der Stelle $x = 0$ können höhere Momente der Zufallsvariablen $B_0(T,n)$, z.B. die Varianz und die Standardabweichung, berechnet werden. Setzt man dies EDV-technisch um, so kann wg. b) auf die direkte Berechnung der inversen Matrizen $\left(\mathbf{U}\left(\frac{\mathbf{s-1}}{\mathbf{T}},\mathbf{t-1}\right)\right)^{-1}$ verzichtet werden. Die Übergangsmatrizen $\mathbf{R(s,t)}$ können mittels der auf der Neumannschen Reihe basierenden Formel näherungsweise berechnet werden. Insbesondere in dem Fall, dass es sich bei den jährlichen Übergangsmatrizen $\mathbf{Q(t)}$ - und somit auch $\mathbf{(E-Q(t))}$ - um obere Dreiecksmatrizen handelt, ist dieser Ansatz EDV-technisch sehr gut handhabbar.

4. Fallbeispiel: Pensionsversicherungsmathematik

In [5], [6] und [9] wird dargestellt, wie das Konzept der bewerteten inhomogenen Markov-Kette zur Modellierung in der Pensionsversicherungsmathematik bzw. in der betrieblichen Altersversorgung verwendet werden kann. Die folgenden Ausführungen knüpfen dabei an die Beispiele in [9] an. Bei diesen Beispielen erfolgt die Bewertung durch numerisches Ableiten der momentenerzeugenden Funktion bei jährlicher Zahlweise. Im folgenden Fallbeispiel wird die Vorgehensweise bei monatlicher Zahlweise anhand einer Barwertberechnung erläutert.

Dazu wird das Schicksal einer Person mithilfe einer inhomogenen Markov-Kette auf Basis der in Deutschland in der Pensionsversicherungsmathematik üblicherweise verwendeten Sterbetafeln – auch Richttafeln genannt – (vgl. [4]) modelliert. Mögliche Zustände sind dabei „Arbeitnehmer/in aktiv“, „Arbeitnehmer/in ausgeschieden“, „Bezieher/in einer Invalidenrente“, „Bezieher/in einer Altersrente“ und „Bezieher/in einer Hinterbliebenenrente“. Die Übergangswahrscheinlichkeiten der Markov-Kette ergeben sich aus den biometrischen Rechnungsgrundlagen der Richttafeln. Dabei handelt es sich um eine Generationentafel, d.h. die Wahrscheinlichkeiten hängen nicht nur von Geschlecht und Alter, sondern auch vom Geburtsjahrgang ab (vgl. [4]). Die unterjährlichen Übergänge werden wie in Kapital 3 dargestellt durch eine lineare Interpolation mit der Einheitsmatrix berücksichtigt. Die Bewertung ergibt sich bei Rentenbezug aus der Höhe der Rente und wird in allen anderen Zuständen mit „null“ angesetzt.

Im Folgenden werden bei einem konkreten Personenbestand und einer konkreten Versorgungsordnung für die Zufallsvariable „Barwert der Verpflichtungen“ der Erwartungswert und die Standardabweichung berechnet. Im Anschluss werden die Ergebnisse mit denen der üblichen Bewertungsmethode und mit den Ergebnissen einer Monte-Carlo-Simulation verglichen.

Wir betrachten die folgende Festrentenzusage: Als Alters- und Invalidenrente werden monatlich 100 €, als Hinterbliebenenrente monatlich 60 € zugesagt. Die Zahlweise sei monatlich vorschüssig, der Bewertungsstichtag der 31.12.2015 und der Rechnungszins 3%. Als Endalter (Übergang in den Zustand „Bezieher/in einer Altersrente“) wird das Alter 67 angesetzt. Der Einfachheit halber wird die Bewertung ohne Dynamik und ohne Fluktuation durchgeführt. Letzteres hat zu Folge, dass der Zustand „Arbeitnehmer/in ausgeschieden“ nicht relevant ist. Der Bestand ist wie folgt strukturiert:

- Zehn Personen
- Vier aktive Arbeitnehmer
- Sechs Rentenbezieher: zwei Invalidenrentner, zwei Altersrentner und zwei Hinter-bliebenenrentner
- Fünf Frauen und fünf Männer

Jede Person wird einzeln bewertet, d.h. für jede Person werden der Erwartungswert und die Varianz der Zufallsvariable „Barwert der Verpflichtungen“ ermittelt. Da der Erwartungswert als stochastische Kennzahl linear ist, ergibt sich der erwartete Barwert bezogen auf den Bestand durch Addition der Einzelwerte. Setzt man die Unabhängigkeit der personenbezogenen Barwerte voraus, so berechnet sich die Varianz des Barwerts bezogen auf den Bestand durch Addition der Einzelwerte. Die Standardabweichung erhält man als Wurzel aus der Varianz.

Setzt man das Konzept der bewerteten inhomogenen Markov-Kette EDV-technisch um, so sind bei der Berechnung der momentenerzeugenden Funktion zwei Besonderheiten zu beachten:

- Auf die direkte Berechnung von $\left(\mathbf{U}\left(\frac{\mathbf{s-1}}{\mathbf{12}},\mathbf{t-1}\right)\right)^{-1}$ für $\mathbf{t} \in \mathbf{IN}$ und $\mathbf{s} \in \{\mathbf{1,2,\ldots,12}\}$ kann verzichtet werden. Die unterjährlichen Übergangsmatrizen können näherungsweise mithilfe der Neumannschen Reihe ermittelt werden.
- Die Übergangswahrscheinlichkeiten für den Übergang in den Zustand „Bezieher/in von Altersrente“ werden nicht interpoliert sondern es wird davon ausgegangen, dass der Übergang exakt im Alter 67 erfolgt. Dies entspricht der Modellierung im Modell der Richttafeln.

Noch zu überprüfen ist allerdings, ob die Bedingungen (B1), (B2) und (B3) aus Kapitel 2 erfüllt sind. Ordnet man die Zustände geschickt an, so handelt es sich bei den jährlichen Übergangsmatrizen um obere Dreiecksmatrizen. Da es auch stochastische Matrizen sind, ist Bedingung (B3) erfüllt. Die Bedingungen (B1) und (B2) werden mithilfe einer EDV-technischen Umsetzung in der folgenden Form überprüft:

(B1) $\mathbf{U}\left(\frac{\mathbf{s-1}}{\mathbf{12}},\mathbf{t-1}\right)$ ist invertierbar für alle $\mathbf{t} \in \mathbf{IN}$ und $\mathbf{s} \in \{\mathbf{1,2,\ldots,12}\}$.

(B2) $\left(\mathbf{U}\left(\frac{\mathbf{s-1}}{\mathbf{12}},\mathbf{t-1}\right)\right)^{-1} \cdot \mathbf{U}\left(\frac{\mathbf{s}}{\mathbf{12}},\mathbf{t-1}\right)$ ist eine stochastische Matrix für alle $\mathbf{t} \in \mathbf{IN}$ und $\mathbf{s} \in \{\mathbf{1,2,\ldots,12}\}$.

Dies ist ausreichend, da zur Konstruktion der unterjährlichen Markov-Kette lediglich die Übergänge von $\mathbf{t-1+\frac{s-1}{12}}$ nach $\mathbf{t-1+\frac{s}{12}}$ für $\mathbf{t} \in \mathbf{IN}$ und $\mathbf{s} \in \{\mathbf{1,2,\ldots,12}\}$ relevant sind. Da im Rahmen der Überprüfung mit $\left(\mathbf{U}\left(\frac{\mathbf{s-1}}{\mathbf{12}},\mathbf{t-1}\right)\right)^{-1} \cdot \mathbf{U}\left(\frac{\mathbf{s}}{\mathbf{12}},\mathbf{t-1}\right)$ auch die unterjährlichen Übergangsmatrizen direkt berechnet werden, könnte auf die Näherung mit der Neumannschen Reihe verzichtet werden. Dies ist insbesondere immer der Fall, wenn die jährlichen Übergangsmatrizen obere Dreiecksmatrizen sind.

Es sei

$$m(x,T,n) = E(\exp(x \cdot B_0(T,n))) \ , x \in IR \ ,$$

die momentenerzeugende Funktion. Dabei sei n so gewählt, dass alle Rentenzahlungen, die eine Person im Laufe ihres Lebens erhalten kann, berücksichtigt werden. Aufgrund der Systematik in den Richttafeln kann $n = 103$ gesetzt werden. Wg. der monatlichen Zahlweise gilt $T = 12$. Mithilfe der üblichen numerischen Ableitungen (vgl. [15] S.43ff) ergibt sich:

$$E(B_0(T,n)) = m_x(x,T,n)\big|_{x=0} \approx \frac{m(h,T,n) - m(-h,T,n)}{2 \cdot h}$$

und

$$E\left((B_0(T,n))^2\right) = m_{xx}(x,T,n)\big|_{x=0} \approx \frac{m(h,T,n) + m(-h,T,n) - 2 \cdot m(0,T,n)}{h^2} =$$

$$= \frac{m(h,T,n) + m(-h,T,n) - 2}{h^2}$$

bzw.

$$\begin{aligned} Var(B_0(t,n)) &= E\left((B_0(t,n))^2\right) - (E(B_0(t,n)))^2 = \\ &= m_{xx}(x,t,n)\big|_{x=0} - \left(m_x(x,t,n)\big|_{x=0}\right)^2 \approx \\ &\approx \frac{m(h,T,n) + m(-h,T,n) - 2}{h^2} - \left(\frac{m(h,T,n) - m(-h,T,n)}{2 \cdot h}\right)^2 \end{aligned} \ .$$

Dabei sei $h > 0$ hinreichend klein zu wählen. Wird h zu groß gewählt, so ist die Näherung nicht ausreichend. Wird h allerdings zu klein angesetzt, so können numerische Effekte die Ergebnisse verfälschen. Im vorliegenden Beispiel wird $h = 10^{-6}$ gewählt. In der folgenden Tabelle werden die so berechneten Momente der Bewertung mit den Richttafeln und den Ergebnissen einer Monte-Carlo-Simulation gegenübergestellt. Die Monte-Carlo-Simulation wurde mit 1.000 Läufen durchgeführt, die Schätzung der Momente erfolgte mit den üblichen Methoden der deskriptiven Statistik.

Methode/Modell	Bewertung/ Erwartungswert	Varianz	Standardabweichung
Bewertete inhomogene Markov-Kette	146.328,70	253.260.314,64	15.914,15
Richttafel	146.326,56		
Monte-Carlo-Simulation	145.887,96	249.690.562,56	15.801,60

Somit stimmen in diesem Beispiel bei monatlicher Zahlweise der Erwartungswert auf Basis einer bewerteten inhomogenen Markov-Kette und die übliche Bewertung gemäß Richttafel-Modell bis auf eine minimale Abweichung überein. Zusätzlich liefert die Modellierung mit einer bewerteten inhomogenen Markov-Kette die Varianz und die Standardabweichung (in Höhe von ca. 10,9% des Erwartungswertes). Die Ergebnisse auf Basis einer bewerteten inhomogenen Markov-Kette passen im Wesentlichen auch zu den Ergebnissen der Monte-Carlo-Simulation. Die Abweichungen ergeben sich hier durch die Anzahl der Simulationsläufe (1.000) und die Qualität des Zufallsgenerators.

5. Das spezielle zeitstetige Modell: Konstruktion

Die folgende Konstruktion ist eine Anwendung des Satzes von Kolmogorov (vgl. [3] S.257ff).

Wir betrachten wie bisher den endlichen Zustandsraum $\mathbf{S} = \{\mathbf{0,1,2,\ldots,N}\}$ und die Anfangsverteilung $\mathbf{P_0}$ auf dem Zustandsraum $\mathbf{S}$. Gegeben sei jetzt die kontinuierliche Indexmenge $[\mathbf{0},\infty)$, d.h. für den Zeitindex gilt $\mathbf{t} \in [\mathbf{0},\infty)$.

Es wird ein System von endlich-dimensionalen Randverteilungen $\mathbf{p}_{\mathbf{t_1,t_2,\ldots,t_n}}$ wie folgt definiert:

1. Für $\mathbf{s,t} \in [\mathbf{0},\infty)$ mit $\mathbf{s \le t}$ sei

   $$\left(\lambda_{\mathbf{i,j}}(\mathbf{s,t})\right)_{\mathbf{i,j}\in\mathbf{S}} = \Lambda(\mathbf{s,t}) := \left(\mathbf{U}(\mathbf{s}-[\mathbf{s}],[\mathbf{s}])\right)^{-1} \cdot \prod_{\mathbf{m}=[\mathbf{s}]+1}^{[\mathbf{t}]} \mathbf{Q}(\mathbf{m}) \cdot \mathbf{U}(\mathbf{t}-[\mathbf{t}],[\mathbf{t}]).$$

2. Es sei $\mathbf{n} \in \mathbf{IN}$. Für $\mathbf{t_1,t_2,\ldots,t_n} \in [\mathbf{0},\infty)$ mit $\mathbf{t_1 < t_2 < \ldots < t_n}$ definieren wir

   $$\mathbf{p}_{\mathbf{t_1,t_2,\ldots,t_n}}(\mathbf{x_1,x_2,\ldots,x_n}) :=$$
   $$\sum_{\mathbf{k}=\mathbf{0}}^{\mathbf{N}} \mathbf{P_0}(\mathbf{k}) \cdot \lambda(\mathbf{0,t_1})_{\mathbf{k,x_1}} \cdot \lambda(\mathbf{t_1,t_2})_{\mathbf{x_1,x_2}} \cdot \lambda(\mathbf{t_2,t_3})_{\mathbf{x_2,x_3}} \cdot\ldots\cdot \lambda(\mathbf{t_{n-1},t_n})_{\mathbf{x_{n-1},x_n}}$$

   für $\mathbf{x_1,x_2,\ldots,x_n} \in \mathbf{S}$.

Es sei $\mathbf{n} \in \mathbf{IN}$. Es seien $\mathbf{t_1,t_2,\ldots,t_n} \in [\mathbf{0},\infty)$ mit $\mathbf{t_1 < t_2 < \ldots < t_n}$. Ferner seien gegeben $\mathbf{x_1,x_2,\ldots,x_{j-1},x_{j+1},\ldots,x_n} \in \mathbf{S}$. Dann gilt

$$\sum_{\mathbf{l}=\mathbf{0}}^{\mathbf{N}} \mathbf{p}_{\mathbf{t_1,t_2,\ldots,t_n}}(\mathbf{x_1,x_2,\ldots,x_{j-1},l,x_{j+1},\ldots x_n}) =$$

$$= \sum_{\mathbf{l}=\mathbf{0}}^{\mathbf{N}} \sum_{\mathbf{k}=\mathbf{0}}^{\mathbf{N}} \mathbf{P_0}(\mathbf{k}) \cdot \lambda(\mathbf{0,t_1})_{\mathbf{k,x_1}} \cdot \lambda(\mathbf{t_1,t_2})_{\mathbf{x_1,x_2}} \cdot \lambda(\mathbf{t_2,t_3})_{\mathbf{x_2,x_3}} \cdot\ldots$$

$$\ldots\cdot \lambda(\mathbf{t_{j-1},t_j})_{\mathbf{x_{j-1},l}} \cdot \lambda(\mathbf{t_j,t_{j+1}})_{\mathbf{l,x_{j+1}}} \cdot\ldots\cdot \lambda(\mathbf{t_{n-1},t_n})_{\mathbf{x_{n-1},x_n}} =$$

$$= \sum_{\mathbf{k}=\mathbf{0}}^{\mathbf{N}} \sum_{\mathbf{l}=\mathbf{0}}^{\mathbf{N}} \mathbf{P_0}(\mathbf{k}) \cdot \lambda(\mathbf{0,t_1})_{\mathbf{k,x_1}} \cdot \lambda(\mathbf{t_1,t_2})_{\mathbf{x_1,x_2}} \cdot \lambda(\mathbf{t_2,t_3})_{\mathbf{x_2,x_3}} \cdot\ldots$$

$$\ldots\cdot \lambda(\mathbf{t_{j-1},t_j})_{\mathbf{x_{j-1},l}} \cdot \lambda(\mathbf{t_j,t_{j+1}})_{\mathbf{l,x_{j+1}}} \cdot\ldots\cdot \lambda(\mathbf{t_{n-1},t_n})_{\mathbf{x_{n-1},x_n}} =$$

$$= \sum_{k=0}^{N} P_0(k) \cdot \lambda(0,t_1)_{k,x_1} \cdot \lambda(t_1,t_2)_{x_1,x_2} \cdot \lambda(t_2,t_3)_{x_2,x_3} \cdots$$

$$\cdots \left(\sum_{l=0}^{N} \lambda(t_{j-1},t_j)_{x_{j-1},l} \cdot \lambda(t_j,t_{j+1})_{l,x_{j+1}} \right) \cdots \lambda(t_{n-1},t_n)_{x_{n-1},x_n} =$$

$$= \sum_{k=0}^{N} P_0(k) \cdot \lambda(0,t_1)_{k,x_1} \cdot \lambda(t_1,t_2)_{x_1,x_2} \cdot \lambda(t_2,t_3)_{x_2,x_3} \cdots$$

$$\cdots \lambda(t_{j-1},t_{j+1})_{x_{j-1},x_{j+1}} \cdots \lambda(t_{n-1},t_n)_{x_{n-1},x_n} =$$

$$= p_{t_1,t_2,\ldots t_{j-1},t_{j+1},\ldots,t_n}(x_1,x_2,\ldots,x_{j-1},x_{j+1},\ldots x_n)$$

Dabei ergibt sich das vorletzte Gleichheitszeichen aus:

$$\Lambda(t_{j-1},t_j) \cdot \Lambda(t_j,t_{j+1}) =$$

$$= \left(U(t_{j-1}-[t_{j-1}],[t_{j-1}])\right)^{-1} \cdot \prod_{m=[t_{j-1}]+1}^{[t_j]} Q(m) \cdot U(t_j-[t_j],[t_j]) \cdot$$

$$\left(U(t_j-[t_j],[t_j])\right)^{-1} \cdot \prod_{m=[t_j]+1}^{[t_{j+1}]} Q(m) \cdot U(t_{j+1}-[t_{j+1}],[t_{j+1}]) =$$

$$= \left(U(t_{j-1}-[t_{j-1}],[t_{j-1}])\right)^{-1} \cdot \prod_{m=[t_{j-1}]+1}^{[t_{j+1}]} Q(m) \cdot U(t_{j+1}-[t_{j+1}],[t_{j+1}]) =$$

$$= \Lambda(t_{j-1},t_{j+1})$$

Somit ist das hier definierte System von endlich-dimensionalen Randverteilungen $p_{t_1,t_2,\ldots,t_n}$ verträglich bezüglich des „Einschiebens eines Zeitpunktes“. Die allgemeine Verträglichkeit erhält man per Induktion. Mit dem Satz von Kolmogorov ergibt sich dann:

1. Es gibt ein eindeutiges Wahrscheinlichkeitsmaß, das zu den endlich-dimensionalen Randverteilungen passt.
2. Es gibt einen stochastischen Prozess $(Z_t)_{t\in[0,\infty)}$ mit

$$P(Z_{t_1}=x_1, Z_{t_2}=x_2,\ldots,Z_{t_n}=x_n) = p_{t_1,t_2,\ldots,t_n}(x_1,x_2,\ldots,x_n)$$

für alle $t_1,t_2,\ldots,t_n \in [0,\infty)$ mit $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ und $x_1,x_2,\ldots,x_n \in S$.

Dieser Prozess $(Z_t)_{t\in[0,\infty)}$ erfüllt - wie es nicht anders zu erwarten ist - die Markov-Eigenschaft

$$P\left(Z_{t_n} = x_n \mid Z_{t_1} = x_1, Z_{t_2} = Z_2, \ldots, Z_{t_{n-1}} = x_{n-1}\right) = P\left(Z_{t_n} = x_n \mid Z_{t_{n-1}} = x_{n-1}\right)$$

und ist somit eine zeitstetige Markov-Kette mit der Anfangsverteilung P_0 und den Übergangsmatrizen $\Lambda(s,t)$, $s,t \in [0,\infty)$, $s \le t$. Dabei steht $\Lambda(s,t)$ für den Übergang von s nach t. Bezüglich des Beweises der Markov-Eigenschaft wird auf den Anhang verwiesen.

Bemerkungen:

a) Gemäß [3], S.298ff, folgt aus der oben formulierten Markov-Eigenschaft

$$P\left(Z_{t_n} = x_n \mid Z_{t_1} = x_1, Z_{t_2} = Z_2, \ldots, Z_{t_{n-1}} = x_{n-1}\right) = P\left(Z_{t_n} = x_n \mid Z_{t_{n-1}} = x_{n-1}\right)$$

die einfache Markov-Eigenschaft im Sinne von [3], S.298, bzw. die Markov-Eigenschaft gemäß von [13], S.350:

$$P\left(Z_t = x_t \mid Z_u = x_u, u \le s\right) = P\left(Z_t = x_t \mid Z_s = x_s\right)$$

b) Es seien $x_1, x_2 \in S$ und $s,t,u \in [0,\infty)$ mit $s < u < t$. Mit den hier verwendeten Notationen gilt $\lambda_{x_1,x_2}(s,t) = P\left(Z_t = x_2 \mid Z_s = x_1\right)$ und die Chapman-Kolmogorov-Gleichung kann wie folgt formuliert werden:

$$\lambda_{x_1,x_2}(s,t) = \sum_{k=0}^{N} \lambda_{x_1,k}(s,u) \cdot \lambda_{k,x_2}(u,t) \quad \text{bzw.} \quad \Lambda(s,t) = \Lambda(s,u) \cdot \Lambda(u,t)$$

Satz 5:

Für die zeitstetige Markov-Kette $(Z_t)_{t\in[0,\infty)}$ existieren die folgenden Grenzwerte für alle $t \in [0,\infty)$:

$$\lim_{h\to 0+} \frac{P\left(Z_{t+h} = x \mid Z_t = x\right) - 1}{h} =: \mu_{x\,x}(t) \text{ für alle } x \in S$$

$$\lim_{h\to 0+} \frac{P\left(Z_{t+h} = x_2 \mid Z_t = x_1\right)}{h} =: \mu_{x_1 x_2}(t) \text{ für alle } x_1, x_2 \in S \text{ mit } x_1 \ne x_2$$

Ferner gilt:

a) $\mu_{x_1 x_2}(t) = \left((U(t-[t],[t]))^{-1} \cdot (Q([t]+1) - E)\right)_{x_1,x_2}$

b) Für alle $x_1, x_2 \in S$ ist die Funktion $t \to \mu_{x_1 x_2}(t)$ rechtsstetig für $t \in [0,\infty)$.

c) Für alle $x_1, x_2 \in S$ ist die Funktion $t \to \mu_{x_1 x_2}(t)$ linksstetig für $t \in [0,\infty) \setminus \mathrm{IN}_0$.

Für den Beweis benötigt man zunächst die folgenden Ergebnisse.

Lemma:

Gegeben seien die stochastischen nxn-Matrizen $A, A_1, A_2, \ldots$ und die stochastischen nxn-Matrizen $B, B_1, B_2, \ldots$ mit $\lim\limits_{k\to\infty} A_k = A$ und $\lim\limits_{k\to\infty} B_k = B$.

a) $\lim\limits_{k\to\infty} (A_k \cdot B_k) = A \cdot B$.

b) Es seien $A, A_1, A_2, \ldots$ invertierbare Matrizen. Dann gilt: $\lim\limits_{k\to\infty} (A_k)^{-1} = A^{-1}$.

Beweis (Lemma):

a) Für eine nxn-Matrizen C sei $\|C\| := \max\limits_i \left(\sum\limits_{j=1}^{n} c_{ij} \right)$. Mit [1], Seite 9, gilt:

$$\begin{aligned}
&\|A_k \cdot B_k - A \cdot B\| = \|A_k \cdot B_k - A \cdot B_k + A \cdot B_k - A \cdot B\| \\
&\le \|A_k \cdot B_k - A \cdot B_k\| + \|A \cdot B_k - A \cdot B\| \\
&\le \|A_k - A\| \cdot \|B_k\| + \|A\| \cdot \|B_k - B\| \\
&\le \|A_k - A\| + \|B_k - B\| \xrightarrow{k\to\infty} 0
\end{aligned}$$

Damit folgt ebenfalls mit [1], Seite 9, die Behauptung.

b) Wg. $E = \lim\limits_{k\to\infty} \left(A_k \cdot (A_k)^{-1}\right) = \lim\limits_{k\to\infty} A_k \cdot \lim\limits_{k\to\infty} (A_k)^{-1} = A \cdot \lim\limits_{k\to\infty} (A_k)^{-1}$ folgt die Behauptung.

□

Beweis (Satz 5):

Es sei $t \in [0,\infty)$. Es $h > 0$ hinreichend klein, so dass $[t] = [t+h]$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
&\Lambda(t, t+h) = \left(U(t-[t],[t])\right)^{-1} \cdot U(t+h-[t+h],[t+h]) = \\
&= \left(U(t-[t],[t])\right)^{-1} \cdot U(t+h-[t],[t]) = \\
&= \left(U(t-[t],[t])\right)^{-1} \cdot \left(U(t-[t],[t]) + h \cdot (Q([t]+1) - E)\right) = \\
&= E + h \cdot \left(U(t-[t],[t])\right)^{-1} \cdot (Q([t]+1) - E)
\end{aligned}$$

Damit folgt

$$\mu_{xx}(t) = \lim_{h\to 0+} \frac{P(Z_{t+h} = x \mid Z_t = x) - 1}{h} == \lim_{h\to 0+} \frac{\lambda_{x,x}(t,t+h) - 1}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0+} \frac{1 + h\cdot\left((U(t-[t],[t]))^{-1}\cdot(Q([t]+1)-E)\right)_{x,x} - 1}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0+} \left((U(t-[t],[t]))^{-1}\cdot(Q([t]+1)-E)\right)_{x,x} = \left((U(t-[t],[t]))^{-1}\cdot(Q([t]+1)-E)\right)_{x,x}$$

für alle $x \in S$ und

$$\mu_{x_1x_2}(t) = \lim_{h\to 0+} \frac{P(Z_{t+h} = x_2 \mid Z_t = x_1)}{h} = \lim_{h\to 0+} \frac{\lambda_{x_1,x_2}(t,t+h)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0+} \frac{h\cdot\left((U(t-[t],[t]))^{-1}\cdot(Q([t]+1)-E)\right)_{x_1,x_2}}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0+} \left((U(t-[t],[t]))^{-1}\cdot(Q([t]+1)-E)\right)_{x_1,x_2} = \left((U(t-[t],[t]))^{-1}\cdot(Q([t]+1)-E)\right)_{x_1,x_2}$$

für alle $x_1, x_2 \in S$. Somit erhält man zusammengefasst:

$\mu_{x_1x_2}(t) = \left((U(t-[t],[t]))^{-1}\cdot(Q([t]+1)-E)\right)_{x_1,x_2}$ für alle $t \in [0,\infty)$ und $x_1, x_2 \in S$.

Die Rechtsstetigkeit ergibt wie folgt:

$$\begin{aligned}
&\lim_{h\to 0+} \left(U(t+h-[t+h],[t+h]\right) = \\
&= \lim_{h\to 0+} \left((t+h-[t+h])\cdot Q([t+h]+1) + (1-t-h+[t+h])\cdot E\right) = \\
&= \lim_{h\to 0+} \left((t+h-[t])\cdot Q([t]+1) + (1-t-h+[t])\cdot E\right) = \\
&= (t-[t])\cdot Q([t]+1) + (1-t+[t])\cdot E = U(t-[t],[t])
\end{aligned}$$

Mit Lemma 1 erhält man: $\lim_{h\to 0+} \left(U(t+h-[t+h],[t+h]\right)^{-1} = \left(U(t-[t],[t]\right)^{-1}$.

Daraus folgt:

$$\begin{aligned}
&\lim_{h\to 0+} \left((U(t+h-[t+h],[t+h]))^{-1}\cdot(Q([t+h]+1)-E)\right) = \\
&= \lim_{h\to 0+} \left((U(t+h-[t],[t]))^{-1}\cdot(Q([t]+1)-E)\right) = \left((U(t-[t],[t]))^{-1}\cdot(Q([t]+1)-E)\right)
\end{aligned}$$

Somit ist die Rechtsstetigkeit bewiesen. Die Linksstetigkeit für $t \in [0,\infty) \setminus \mathbb{N}_0$ ergibt sich analog, da $[t+h] = [t]$ für $h < 0$ mit hinreichend kleinem Betrag.

□

Bemerkung:

Das folgende Beispiel zeigt, dass die Funktion $\mathbf{t \to \mu_{x_1 x_2}(t)}$ an der Stelle $\mathbf{t \in IN}$ eine Unstetigkeitsstelle haben kann. Es sei $\mathbf{t \in IN}$ und $\mathbf{Q(t)}$ invertierbar mit $\mathbf{E - (Q(t))^{-1} \neq Q(t+1) - E}$.

Wg. $\mathbf{[t] = t}$ erhält man:

$$\mathbf{(U(t-[t],[t]))^{-1} \cdot (Q([t]+1) - E) = (U(0,t))^{-1} \cdot (Q(t+1) - E) =}$$
$$\mathbf{= E \cdot (Q(t+1) - E) = Q(t+1) - E}$$

Für $\mathbf{h < 0}$ mit hinreichend kleinem Betrag gilt $\mathbf{[t+h] = [t] - 1 = t - 1}$. Damit ergibt sich:

$$\mathbf{\lim_{h \to 0-} \left((U(t+h-[t+h],[t+h]))^{-1} \cdot (Q([t+h]+1) - E) \right) =}$$
$$\mathbf{= \lim_{h \to 0-} \left((U(t+h-t+1,t-1))^{-1} \cdot (Q(t) - E) \right) =}$$
$$\mathbf{= (U(1,t-1))^{-1} \cdot (Q(t) - E) = (Q(t))^{-1} \cdot (Q(t) - E) = E - (Q(t))^{-1} \neq Q(t+1) - E}$$

Als Standardergebnis aus der Theorie der zeitstetigen Markov-Ketten lassen sich auch hier die Vorwärts- und die Rückwärtsgleichung formulieren. Bezüglich der Beweise wird auf den Anhang verwiesen.

Satz 6:

Es gilt die Kolmogorovsche Vorwärtsgleichung, d.h.:

$$\mathbf{\lim_{h \to 0+} \frac{P(Z_{t+h} = x_2 \mid Z_s = x_1) - P(Z_t = x_2 \mid Z_s = x_1)}{h} = \sum_{k=0}^{N} P(Z_t = k \mid Z_s = x_1) \cdot \mu_{k\, x_2}(t)}$$

für alle $\mathbf{s,t \in [0,\infty)}$ mit $\mathbf{s < t}$ und $\mathbf{x_1, x_2 \in S}$.

Satz 7:

Es gilt die Kolmogorovsche Rückwärtsgleichung, d.h.:

$$\mathbf{\lim_{h \to 0+} \frac{P(Z_t = x_2 \mid Z_{s+h} = x_1) - P(Z_t = x_2 \mid Z_s = x_1)}{h} = -\sum_{k=0}^{N} \mu_{x_1 k}(s) \cdot P(Z_t = x_2 \mid Z_s = k)}$$

für alle $\mathbf{s,t \in [0,\infty)}$ mit $\mathbf{s < t}$ und $\mathbf{x_1, x_2 \in S}$.

Mit der Bezeichnung $\mathbf{M(t) := (\mu_{x_1\, x_2}(t))_{x_1, x_2 \in S}}$ lassen sich die Gleichung wie folgt darstellen (vgl. [10] S.18f).

Vorwärtsgleichung: $\lim\limits_{h\to 0+}\frac{\Lambda(s,t+h)-\Lambda(s,t)}{h}=\Lambda(s,t)\cdot M(t)$ für alle $s,t\in[0,\infty)$ mit $s<t$.

Rückwärtsgleichung: $\lim\limits_{h\to 0+}\frac{\Lambda(s,t+h)-\Lambda(s,t)}{h}=-M(s)\cdot\Lambda(s,t)$ für alle $s,t\in[0,\infty)$ mit $s<t$.

6. Das spezielle zeitstetige Modell: Bewertung

Im letzten Abschnitt wurde die zeitstetige Markov-Kette $\left(\mathbf{Z_t}\right)_{\mathbf{t}\in[\mathbf{0},\infty)}$ konstruiert. Die Verteilung der Zufallsvariablen $\mathbf{Z_t}$, $\mathbf{t}\in[\mathbf{0},\infty)$, sei gegeben durch den Zeilenvektor $\mathbf{P_t} = \left(\mathbf{P_{t,j}}\right)_{\mathbf{j=0,1,2,...,N}}$, d.h.

$$\mathbf{P(Z_t = j) = P_{t,j}, j = 0,1,2,...N}.$$

Ferner gilt unter Verwendung der Notation aus dem vorherigen Kapitel

$$\mathbf{P_t = P_0 \cdot \Lambda(0,t)}.$$

Die Bewertung der Markov-Kette sei gegeben durch eine Funktion

$$\mathbf{l : [0,\infty) \otimes S \to IR}.$$

Die Abzinsung der Bewertungsfunktion erfolgt auf Basis der relativ gemischten Verzinsung mit

$$\mathbf{v(t) := (1+r)^{-[t]} \cdot (1+(t-[t])\cdot r)^{-1}},$$

dabei sei $\mathbf{r > 0}$ wie bisher der zeitlich konstante Rechnungszins pro Jahr.

Damit lässt sich der Barwert des kompletten Zahlungsstroms wie folgt definieren:

$$\mathbf{C_0(\infty) := \int_0^\infty v(t)\cdot l(t,Z_t)\,dt}.$$

Berücksichtigt man den Zahlungsstrom nur bis zu einem bestimmten Zeitpunkt $\boldsymbol{\tau > 0}$, so wird definiert:

$$\mathbf{C_0(\boldsymbol{\tau}) := \int_0^{\boldsymbol{\tau}} v(t)\cdot l(t,Z_t)\,dt}.$$

Um die Existenz der Integrale bzw. der Zufallsvariablen für (fast) alle Pfade der inhomogenen Markov-Kette $\left(\mathbf{Z_t}\right)_{\mathbf{t}\in[\mathbf{0},\infty)}$ sicherzustellen, wird für die Bewertungsfunktion Folgendes vorausgesetzt:

- Es gibt ein $\mathbf{M \in (0,\infty)}$, so dass $\mathbf{abs(l(t,x)) \le M}$ für alle $\mathbf{(t,x) \in [0,\infty) \otimes S}$.
- Die Funktion $\mathbf{t \to l(t,x)}$ ist für alle $\mathbf{x \in S}$ rechtsstetig mit linksseitigen Limiten und besitzt lediglich endlich viele Unstetigkeitsstellen.

Ferner wird vorausgesetzt, dass die inhomogenen Markov-Kette $(Z_t)_{t\in[0,\infty)}$ für (fast) alle Pfade im Intervall $[0,\infty)$ nur endlich viele Sprungstellen hat. Dies ist insbesondere dann erfüllt, wenn bezüglich der Konstruktion des vorherigen Kapitels die jährlichen Übergangsmatrizen (wie z.B. bei den üblichen Modellen der Pensionsversicherungsmathematik) obere Dreiecksmatrizen sind.

Damit sind (fast) alle Pfade des stochastischen Prozesses $(l(t,Z_t))_{t\in[0,\infty)}$ rechtsstetig mit linksseitigen Limiten und maximal endlich vielen Unstetigkeitsstellen.

Da ferner

$$\int_0^\infty \mathrm{abs}\big(v(t)\cdot l(t,Z_t)\big)\,dt \le \int_0^\infty v(t)\cdot M\,dt \le M\sum_{k=0}^\infty (1+r)^{-k} = \frac{1}{1-\frac{1}{1+r}} = \frac{1+r}{r} < \infty$$

existieren $B_0(\infty)$ und $B_0(\tau)$. In beiden Fällen hängt der Wert des Barwerts vom jeweiligen Pfad der zeitstetigen Markov-Kette ab. Der Barwert $B_0(T,\infty)$ bzw. $B_0(T,n)$ ist somit eine reellwertige Zufallsvariable.

Für den Erwartungswert dieser beiden Zufallsvariablen gilt:

Satz 8:

$$E\big(C_0(\infty)\big) = \int_0^\infty v(t)\cdot P_0\cdot\Lambda(0,t)\cdot l(t,.)\,dt$$

bzw.

$$E\big(C_0(\tau)\big) = \int_0^\tau v(t)\cdot P_0\cdot\Lambda(0,t)\cdot l(t,.)\,dt\,.$$

Beweis:

Mit dem Satz von Fubini (vgl. [3] S.46f) ergibt sich:

$$E\big(C_0(\tau)\big) = E\left(\int_0^\tau v(t)\cdot l(t,Z_t)\,dt\right) = \int_0^\tau v(t)\cdot E\big(l(t,Z_t)\big)\,dt =$$

$$= \int_0^\tau v(t)\cdot\sum_{k=0}^N P(Z_t=k)\cdot l(t,k)\,dt = \int_0^\tau v(t)\cdot\sum_{k=0}^N \big(P_0\cdot\Lambda(0,t)\big)_k\cdot l(t,k)\,dt =$$

$$= \int_0^\tau v(t)\cdot P_0\cdot\Lambda(0,t)\cdot l(t,.)\,dt$$

Durch Anwendung des Satzes der majorisierten Konvergenz (vgl. [3] S.37) erhält man ferner:

$$E\left(C_0(\infty)\right) = E\left(\lim_{\tau\to\infty}\int_0^\tau v(t)\cdot l(t,Z_t)\,dt\right) = \lim_{\tau\to\infty} E\left(\int_0^\tau v(t)\cdot l(t,Z_t)\,dt\right) =$$

$$= \lim_{\tau\to\infty}\int_0^\tau v(t)\cdot P_0\cdot\Lambda(0,t)\cdot l(t,.)\,dt = \int_0^\infty v(t)\cdot P_0\cdot\Lambda(0,t)\cdot l(t,.)\,dt$$

□

Als weiteres Ergebnis erhält man die folgende analoge Aussage zum unterjährlichen Modell:

Satz 9:

Die Bewertungsfunktion sei zeitlich konstant, d.h. $l(t,x) = m(x)$ für alle $(t,x) \in [0,\infty) \otimes S$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} E(C_0(\infty)) &= E(B_0(1,\infty)) - P_0\cdot m(.)\cdot\int_0^1 \frac{s\cdot(1+r)}{1+s\cdot r}\,ds = \\ &= E(B_0(1,\infty)) - P_0\cdot m(.)\cdot\frac{1+r}{r^2}\cdot\left(r-\ln(1+r)\right) \end{aligned}.$$

Dabei sei für den Barwert des Zahlungsstroms bei einfacher jährlicher Zahlung der Leistungsvektor gegeben durch:

$$L_t = m(.),\ t = 0,1,2,\ldots .$$

Beweis:

$$E\left(C_0(\infty)\right) = \int_0^{\infty} v(t) \cdot P_0 \cdot \Lambda(0,t) \cdot m(.)\, dt = P_0 \cdot \int_0^{\infty} v(t) \cdot \Lambda(0,t)\, dt \cdot m(.) =$$

$$= P_0 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \int_k^{k+1} (1+r)^{-k} \cdot (1+(t-k)\cdot r)^{-1} \cdot \Lambda(0,t)\, dt \cdot m(.) =$$

$$= P_0 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} (1+r)^{-k} \cdot \int_0^1 (1+s\cdot r)^{-1} \cdot \Lambda(0,s+k)\, ds \cdot m(.) =$$

$$= P_0 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} (1+r)^{-k} \cdot \int_0^1 (1+s\cdot r)^{-1} \cdot \prod_{j=1}^{k} Q(j) \cdot U(s,k)\, ds \cdot m(.) =$$

$$= P_0 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} (1+r)^{-k} \cdot \int_0^1 (1+s\cdot r)^{-1} \cdot \prod_{j=1}^{k} Q(j) \cdot (s \cdot Q(k+1) + (1-s)\cdot E)\, ds \cdot m(.) =$$

$$= P_0 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} (1+r)^{-k} \cdot \int_0^1 \frac{s}{1+s\cdot r}\, ds \cdot \prod_{j=1}^{k+1} Q(j) \cdot m(.) +$$

$$P_0 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} (1+r)^{-k} \cdot \int_0^1 \frac{1-s}{1+s\cdot r}\, ds \cdot \prod_{j=1}^{k} Q(j) \cdot m(.) =$$

$$= P_0 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} (1+r)^{-k+1} \cdot \int_0^1 \frac{s}{1+s\cdot r}\, ds \cdot \prod_{j=1}^{k} Q(j) \cdot m(.) +$$

$$P_0 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} (1+r)^{-k} \cdot \int_0^1 \frac{1-s}{1+s\cdot r}\, ds \cdot \prod_{j=1}^{k} Q(j) \cdot m(.) =$$

$$= P_0 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} (1+r)^{-k+1} \cdot \int_0^1 \frac{s}{1+s\cdot r}\, ds \cdot \prod_{j=1}^{k} Q(j) \cdot m(.) - P_0 \cdot m(.) \cdot \int_0^1 \frac{s\cdot(1+r)}{1+s\cdot r}\, ds +$$

$$P_0 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} (1+r)^{-k} \cdot \int_0^1 \frac{1-s}{1+s\cdot r}\, ds \cdot \prod_{j=1}^{k} Q(j) \cdot m(.) =$$

$$= P_0 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left[(1+r)^{-k+1} \cdot \int_0^1 \frac{s}{1+s\cdot r}\, ds + (1+r)^{-k} \cdot \int_0^1 \frac{1-s}{1+s\cdot r}\, ds \right] \cdot \prod_{j=1}^{k} Q(j) \cdot m(.)$$

$$- P_0 \cdot m(.) \cdot \int_0^1 \frac{s\cdot(1+r)}{1+s\cdot r}\, ds$$

Wegen

$$(1+r)^{-k+1}\cdot\int_0^1 \frac{s}{1+s\cdot r}\,ds+(1+r)^{-k}\cdot\int_0^1\frac{1-s}{1+s\cdot r}\,ds=$$

$$=(1+r)^{-k}\cdot\int_0^1\frac{s\cdot(1+r)+(1-s)}{1+s\cdot r}\,ds=(1+r)^{-k}\cdot\int_0^1\frac{1+s\cdot r}{1+s\cdot r}\,ds=(1+r)^{-k}$$

folgt

$$E(C_0(\infty))=\sum_{k=0}^{\infty}(1+r)^{-k}\cdot P_0\cdot\prod_{j=1}^{k}Q(j)\cdot m(.)-P_0\cdot m(.)\cdot\int_0^1\frac{s\cdot(1+r)}{1+s\cdot r}\,ds=$$

$$=E(B_0(1,\infty))-P_0\cdot m(.)\cdot\int_0^1\frac{s\cdot(1+r)}{1+s\cdot r}\,ds$$

Die Funktion $f(s):=\frac{s\cdot(1+r)}{1+s\cdot r}$, $s\in[0{,}1]$, hat die Stammfunktion

$$F(s):=\frac{1+r}{r^2}\cdot(s\cdot r-\ln(1+s\cdot r)),$$

denn es gilt:

$$F'(s):=\frac{1+r}{r^2}\cdot\left(r-\frac{r}{1+s\cdot r}\right)=(1+r)\cdot\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r\cdot(1+s\cdot r)}\right)=(1+r)\cdot\frac{1+s\cdot r-1}{r\cdot(1+s\cdot r)}=$$

$$=(1+r)\cdot\frac{s}{1+s\cdot r}=f(s)$$

Damit folgt

$$\int_0^1\frac{s\cdot(1+r)}{1+s\cdot r}\,ds=\frac{1+r}{r^2}\cdot(s\cdot r-\ln(1+s\cdot r))\Big|_0^1=\frac{1+r}{r^2}\cdot(r-\ln(1+r))$$

□

Bemerkung:

a) Somit kann für die zeitstetige inhomogene Markov-Kette bei zeitlich konstanter Bewertung, der erwartete Barwert des zukünftigen Zahlungsstroms mithilfe des erwarteten Barwerts der ursprünglichen jährlichen inhomogenen Markov-Kette und einem Abzugsglied ermittelt werden.

b) Insbesondere fällt das Abzugsglied gilt im Fall $P_0\cdot m(.)=0$ weg und es gilt analog zum unterjährlichen Modell

$$E(C_0(\infty))=E(B_0(1,\infty)).$$

7. Das Restglied in der Pensionsversicherungsmathematik

In der Pensionsversicherungsmathematik bzw. der betrieblichen Altersversorgung wird zur Berücksichtigung der unterjährlich vorschüssigen Zahlweise i.d.R. das Restglied gemäß Invarianzsatz (vgl. [12]) verwendet. Dabei wird dieses Restglied von den Bewertungsfaktoren einer laufenden Leibrente vom Jahresbetrag 1 in Abzug gebracht. Das gleiche Ergebnis erhält man in dem hier verwendeten unterjährlichen Markov-Modell (vgl. Satz 3). Bei T-facher Zahlung und einem jährlichen Rechnungszins $\mathbf{r > 0}$ hat das Restglied ohne die Berücksichtigung einer Rentendynamik die Gestalt:

$$\frac{1}{T} \cdot \sum_{s=0}^{T-1} \frac{s \cdot (1+r)}{T + s \cdot r} .$$

Lässt man die Anzahl der unterjährlichen Zahlungen gegen unendlich laufen, so konvergiert dieses Restglied gegen das entsprechende Restglied des zeitstetigen Modells. D.h. es gilt

$$\lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \cdot \sum_{s=0}^{T-1} \frac{s \cdot (1+r)}{T + s \cdot r} = \int_0^1 \frac{s \cdot (1+r)}{1 + s \cdot r} ds = \frac{1+r}{r^2} \cdot \left(r - \ln(1+r)\right) .$$

Beweis:

Es sei $f(s) := \dfrac{s \cdot (1+r)}{1 + s \cdot r}$, $s \in [0,1]$. Nähert man das Integral $\displaystyle\int_0^1 \frac{s \cdot (1+r)}{1 + s \cdot r} ds$ durch Untersummen, so ergibt sich:

$$\int_0^1 \frac{s \cdot (1+r)}{1 + s \cdot r} ds = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \cdot \sum_{s=0}^{T-1} f(s) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \cdot \sum_{s=0}^{T-1} \frac{s \cdot (1+r)}{1 + s \cdot r} .$$

Die Behauptung folgt aus Satz 9.

□

Verwendet bei der Konvergenz anstelle der Untersummen die Obersummen, so gilt analog

$$\lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \cdot \sum_{s=1}^{T} \frac{s \cdot (1+r)}{T + s \cdot r} = \int_0^1 \frac{s \cdot (1+r)}{1 + s \cdot r} ds = \frac{1+r}{r^2} \cdot \left(r - \ln(1+r)\right)$$

Dies bedeutet, dass beim unterjährlichen Modell die vorschüssige Zahlweise durch die nachschüssige Zahlweise ersetzt wird.

Diese Konvergenzaussage wird durch das folgende Zahlenbeispiel verdeutlicht. Der jährliche Rechnungszins sei $\mathbf{6\%}$, d.h. $\mathbf{r = 0{,}06}$.

Anzahl der unterjährlichen Perioden	Restglied bei vorschüssiger Zahlweise	Restglied bei nachschüssiger Zahlweise
1	0,0000	1,0000
3	0,3420	0,6753
12	0,4680	0,5513
50	0,4997	0,5197
100	0,5047	0,5147
1.000	0,5092	0,5102
5.000	0,5096	0,5098
10.000	0,5097	0,5098
zeitstetiges Modell	0,5097	0,5097

8. Schlussbemerkung

Im vorliegenden Artikel wird gezeigt, wie ausgehend von einer jährlich inhomogenen Markov-Kette durch lineare Interpolation der Übergangsmatrizen und der Einheitsmatrix sowohl eine unterjährliche als auch eine zeitstetige inhomogene Markov-Kette nach dem gleichen Prinzip konstruiert werden kann. Fügt man eine Bewertung hinzu, so ergibt im unterjährlichen Fall aus Satz 4 ein Verfahren zur Ermittlung der Momente der Zufallsvariablen „Barwert des Zahlungsstroms". Die Vorgehensweise kann - wie im Fallbeispiel zur Pensionsversicherungsmathematik dargestellt - EDV-technisch umgesetzt werden. Es ergibt sich somit eine Alternative zu den z.B. in der betrieblichen Altersversorgung etablierten Berechnungsmethoden. Als Anwendung der zeitstetigen Markov-Kette ergibt sich ein tieferes Verständnis bezüglich des Restglieds der Pensionsversicherungsmathematik.

In [9] wird im Fallbeispiel 3 dargestellt wie man die Momente der Zahlungen eines speziellen Jahres bzw. die Korrelation zwischen den Zahlungen zweier Jahre bei jährlicher Zahlweise bestimmen kann. Auch im unterjährlichen Fall ist dies auf Basis von Satz 4 möglich. Eine Anwendung wäre der Vergleich dieser Kennzahlen mit den entsprechenden Werten einer Monte-Carlo-Simulation des Zahlungsstroms. Solche Prognoserechnungen werden z.B. im Bereich der betrieblichen Altersversorgung durchgeführt.

Im Unterschied zum unterjährlichen Fall wird bei der zeitstetigen Markov-Kette in der vorliegenden Arbeit kein Ergebnis erzielt, dass analog zu Satz 4, die Verteilung des der Zufallsvariablen „Barwert des Zahlungsstroms" eindeutig bestimmt und somit ein Verfahren zur Berechnung der Momente liefert. Ein möglicher Zugang könnte eine Grenzwertbetrachtung sein. Dazu müsste man in Satz 4 den Limes $\mathbf{T} \to \infty$ bilden, d.h. bei der EDV-technischen Umsetzung mit einer hinreichend großen Anzahl von äquidistanten unterjährlichen Zahlungszeitenpunkten arbeiten.

9. Anhang: Ergänzungen zu Kapitel 5

Beweis Markov-Eigenschaft:

Es seien $n \in IN$, $t_1, t_2, \ldots, t_n \in [0,\infty)$ mit $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$, $x_1, x_2, \ldots, x_n \in S$ und $P(Z_{t_1} = x_1, Z_{t_2} = Z_2, \ldots, Z_{t_{n-1}} = x_{n-1}) > 0$:

$$P(Z_{t_n} = x_n \mid Z_{t_1} = x_1, Z_{t_2} = Z_2, \ldots, Z_{t_{n-1}} = x_{n-1}) =$$

$$= \frac{P(Z_{t_1} = x_1, Z_{t_2} = x_2, \ldots, Z_{t_n} = x_n)}{P(Z_{t_1} = x_1, Z_{t_2} = x_2, \ldots, Z_{t_{n-1}} = x_{n-1})} =$$

$$= \frac{\sum_{k=0}^{N} P_0(k) \cdot \lambda(0,t_1)_{k,x_1} \cdot \lambda(t_1,t_2)_{x_1,x_2} \cdot \ldots \cdot \lambda(t_{n-1},t_n)_{x_{n-1},x_n}}{\sum_{k=0}^{N} P_0(k) \cdot \lambda(0,t_1)_{k,x_1} \cdot \lambda(t_1,t_2)_{x_1,x_2} \cdot \ldots \cdot \lambda(t_{n-2},t_{n-1})_{x_{n-2},x_{n-1}}} =$$

$$= \frac{\lambda(t_{n-1},t_n)_{x_{n-1},x_n} \cdot \sum_{k=0}^{N} P_0(k) \cdot \lambda(0,t_1)_{m,x_1} \cdot \lambda(t_1,t_2)_{x_1,x_2} \cdot \ldots \cdot \lambda(t_{n-2},t_{n-1})_{x_{n-2},x_{n-1}}}{\sum_{k=0}^{N} P_0(k) \cdot \lambda(0,t_1)_{k,x_1} \cdot \lambda(t_1,t_2)_{x_1,x_2} \cdot \ldots \cdot \lambda(t_{n-2},t_{n-1})_{x_{n-2},x_{n-1}}} =$$

$$= \lambda(t_{n-1},t_n)_{x_{n-1},x_n} = \frac{\lambda(t_{n-1},t_n)_{x_{n-1},x_n} \cdot \sum_{k=0}^{N} P_0(k) \cdot \lambda(0,t_{n-1})_{k,x_{n-1}}}{\sum_{k=0}^{N} P_0(k) \cdot \lambda(0,t_{n-1})_{k,x_{n-1}}} =$$

$$= \frac{\sum_{k=0}^{N} P_0(k) \cdot \lambda(0,t_{n-1})_{k,x_{n-1}} \cdot \lambda(t_{n-1},t_n)_{x_{n-1},x_n}}{\sum_{k=0}^{N} P_0(k) \cdot \lambda(0,t_{n-1})_{k,x_{n-1}}} =$$

$$= \frac{P(Z_{t_{n-1}} = x_{n-1}, Z_{t_n} = x_n)}{P(Z_{t_{n-1}} = x_{n-1})} = P(Z_{t_n} = x_n \mid Z_{t_{n-1}} = x_{n-1})$$

□

Beweis Kolmogorovsche Vorwärtsgleichung:

Es seien $s,t \in [0,\infty)$ mit $s < t$ und $x_1, x_2 \in S$.

$$\lim_{h\to 0+} \frac{P(Z_{t+h} = x_2 \mid Z_s = x_1) - P(Z_t = x_2 \mid Z_s = x_1)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0+} \frac{1}{h} \cdot \left[\sum_{k=0}^{N} P(Z_{t+h} = x_2 \mid Z_t = k) \cdot P(Z_t = k \mid Z_s = x_1) - P(Z_t = x_2 \mid Z_s = x_1) \right] =$$

$$= \lim_{h\to 0+} \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq x_2}}^{N} \frac{P(Z_{t+h} = x_2 \mid Z_t = k)}{h} \cdot P(Z_t = k \mid Z_s = x_1) +$$

$$+ \lim_{h\to 0+} \frac{P(Z_{t+h} = x_2 \mid Z_t = x_2) - 1}{h} \cdot P(Z_t = x_2 \mid Z_s = x_1) =$$

$$= \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq x_2}}^{N} \lim_{h\to 0+} \frac{P(Z_{t+h} = x_2 \mid Z_t = k)}{h} \cdot P(Z_t = k \mid Z_s = x_1)$$

$$+ \lim_{h\to 0+} \frac{P(Z_{t+h} = x_2 \mid Z_t = x_2) - 1}{h} \cdot P(Z_t = x_2 \mid Z_s = x_1) =$$

$$= \sum_{k=0}^{N} P(Z_t = k \mid Z_s = x_1) \cdot \mu_{k\,x_2}(t)$$

□

Beweis Kolmogorovsche Rückwärtsgleichung:

Es seien $s,t \in [0,\infty)$ mit $s<t$ und $x_1,x_2 \in S$. Zunächst erhält man mit dem Lemma zu Satz 5:

$$\lim_{h\to 0+} P(Z_t = x_2 \mid Z_{s+h} = x_1) =$$

$$= \lim_{h\to 0+} \left[\left(U(s+h-[s+h],[s+h])\right)^{-1} \cdot \prod_{m=[s+h]+1}^{[t]} Q(m) \cdot U(t-[t],[t]) \right]_{x_1,x_2} =$$

$$= \lim_{h\to 0+} \left[\left(U(s+h-[s],[s])\right)^{-1} \cdot \prod_{m=[s]+1}^{[t]} Q(m) \cdot U(t-[t],[t]) \right]_{x_1,x_2} =$$

$$= \left[\lim_{h\to 0+} \left(U(s+h-[s],[s])\right)^{-1} \cdot \prod_{m=[s]+1}^{[t]} Q(m) \cdot U(t+h-[t],[t]) \right]_{x_1,x_2} =$$

$$= \left[\left(U(s-[s],[s])\right)^{-1} \cdot \prod_{m=[s]+1}^{[t]} Q(m) \cdot U(t-[t],[t]) \right]_{x_1,x_2} = P(Z_t = x_2 \mid Z_s = x_1)$$

Damit folgt:

$$\lim_{h\to 0+} \frac{P(Z_t = x_2 \mid Z_{s+h} = x_1) - P(Z_t = x_2 \mid Z_s = x_1)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0+} \frac{1}{h} \cdot \left[P(Z_t = x_2 \mid Z_{s+h} = x_1) - \sum_{k=0}^{N} P(Z_t = x_2 \mid Z_{s+h} = k) \cdot P(Z_{s+h} = k \mid Z_s = x_1) \right] =$$

$$= \lim_{h\to 0+} P(Z_t = x_2 \mid Z_{s+h} = x_1) \cdot \frac{1 - P(Z_{s+h} = x_1 \mid Z_s = x_1)}{h} -$$

$$\sum_{\substack{k=0 \\ k\neq x_1}}^{N} \lim_{h\to 0+} P(Z_t = x_2 \mid Z_{s+h} = k) \cdot \lim_{h\to 0+} \frac{P(Z_{s+h} = k \mid Z_s = x_1)}{h} =$$

$$= -\sum_{k=0}^{N} \mu_{x_1 k}(s) \cdot P(Z_t = x_2 \mid Z_s = k)$$

□

Literaturverzeichnis

[1] *Fritz, Franz-Josef; Huppert, Bertram; Wilems, Wolfgang* Stochastische Matrizen, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York 1979.

[2] Doerk, Klaus; Huppert, Bertram; Kroll, Ekkehard Lineare Algebra II, Vorlesungsskript Uni. Mainz, Mainz 1981.

[3] *Gänssler, Peter; Stute, Winfried* Wahrscheinlichkeitstheorie, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York 1977.

[4] *Heubeck, Klaus* Richttafeln 2005G,Textband und Programm Heurika 2,Verlag: Heubeck-Richttafeln-GmbH, Köln 2005.

[5] *Knobloch, Ralf* Bewertung von risikobehafteten Zahlungsströmen mithilfe von Markov-Ketten, In: Forschung am IVW Köln, Band 3/2011, Köln 2012, http://nbn-resolving.de/urn:nbn:de:hbz:832-cos-98 (Stand 01. Februar 2016).

[6] *Knobloch, Ralf* Ein Konzept zur Berechnung von einfachen Barwerten in der betrieblichen Altersversorgung mithilfe einer Markov-Kette, In: Forschung am IVW Köln, Band 4/2011, Köln 2012, http://nbn-resolving.de/urn:nbn:de:hbz:832-cos-100 (Stand 01. Februar 2016).

[7] *Knobloch, Ralf* Bewertung von risikobehafteten Zahlungsströmen mithilfe von Markov-Kette bei unterjährlicher Zahlweise, In: Forschung am IVW Köln, Band 6/2012, Köln 2012, http://nbn-resolving.de/urn:nbn:de:hbz:832-cos-204 (Stand 01. Februar 2016).

[8] *Knobloch, Ralf* Konstruktion einer unterjährlichen Markov-Kette aus einer jährlichen Markov-Kette, In: Forschung am IVW Köln, Band 6/2013, Köln 2013, http://nbn-resolving.de/urn:nbn:de:hbz:832-cos-402 (Stand 01. Februar 2016).

[9] *Knobloch, Ralf* Momente und charakteristische Funktion des Barwerts einer bewerteten inhomogenen Markov-Kette-Anwendung bei risikobehafteten Zahlungsströmen, In: Forschung am IVW Köln, Band 5/2015, Köln 2015, http://nbn-resolving.de/urn:nbn:de:hbz:832-cos-816 (Stand 01. Februar 2016).

[10] *Koller, Michael* Stochastische Modelle in der Lebensversicherung, 2. Auflage, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg 2010.

[11] *Milbrodt, Hartmut; Helbig, Manfred* Mathematische Methoden der Personenversicherungs-mathematik, Walter de Gruyter, Berlin New York 1999.

[12] *Neuburger, Edgar* Unabhängigkeit von Rentenanwartschaftsbarwerten von der Zahlungsweise, Blätter der DGVFM, Bd. XIX, Heft 3, S.257 – S.267, 1990.

[13] *Ross, Sheldon M.* Indroduction to Probability Modells, Eighth Edition, Academic Press, Amsterdam e.a. 2003.

[14] *Waldmann, Karl-Heinz; Stocker, Ulrike M.* Stochastische Modell, 2. Auflage, Springer Verlag, Heidelberg Dordrecht London New York 2011.

[15] *Westermann, Thomas* Mathematik für Ingenieure 6. Auflage, ergänzende Kapitel, Springer Verlag, Heidelberg Dordrecht London New York 2011, http://www.home.hs-karlsruhe.de/~weth0002/buecher/mathe/start.htm (Stand 01. März 2015).

Impressum

Diese Veröffentlichung erscheint im Rahmen der Online-Publikationsreihe „Forschung am **ivw**Köln“. Eine vollständige Übersicht aller bisher erschienenen Publikationen findet sich am Ende dieser Publikation.

Forschung am ivwKöln, 4/2016
ISSN (online) 2192-8479

Knobloch: Bewertete inhomogene Markov-Ketten – Spezielle unterjährliche und zeitstetige Modelle

Köln, Februar 2016

Schriftleitung / editor's office:

Prof. Dr. Jürgen Strobel

Institut für Versicherungswesen /
Institute for Insurance Studies

Fakultät für Wirtschafts- und Rechtswissenschaften /
Faculty of Business, Economics and Law

Technische Hochschule Köln /
University of Applied Sciences

Gustav Heinemann-Ufer 54
50968 Köln

Tel. +49 221 8275-3270
Fax +49 221 8275-3277
Mail juergen.strobel@th-koeln.de
Web www.th-koeln.de

Kontakt Autor / Contact author:

Prof. Dr. Ralf Knobloch

Schmalenbach Institut für Wirtschaftswissenschaften /
Schmalenbach Institute of Business Administration

Fakultät für Wirtschafts- und Rechtswissenschaften /
Faculty of Business, Economics and Law

Technische Hochschule Köln /
University of Applied Sciences

Gustav Heinemann-Ufer 54
50968 Köln

Mail ralf.knobloch@th-koeln.de

Publikationsreihe „Forschung am ivwKöln“

Kostenlos abrufbar unter www.ivw-koeln.de. Mehrheitlich sind diese Online-Publikationen auch über den Schriftenserver Cologne Open Science verfügbar.

2016

6/2016	Heep-Altiner, Rohlfs, Dağoğlu, Pulido, Venter: Berichtspflichten und Prozessanforderungen nach Solvency II
5/2016	Goecke: Collective Defined Contribution Plans - Backtesting based on German capital market data 1955 - 2015
4/2016	Knobloch: Bewertete inhomogene Markov-Ketten - Spezielle unterjährliche und zeitstetige Modelle
3/2016	Völler (Hrsg.): Sozialisiert durch Google, Apple, Amazon, Facebook und Co. – Kundenerwartungen und –erfahrungen in der Assekuranz. Proceedings zum 20. Kölner Versicherungssymposium am 5. November 2015 in Köln
2/2016	Materne (Hrsg.): Jahresbericht 2015 des Forschungsschwerpunkts Rückversicherung
1/2016	Institut für Versicherungswesen: Forschungsbericht für das Jahr 2015

2015

11/2015	Goecke (Hrsg.): Kapitalanlagerisiken: Economic Scenario Generator und Liquiditätsmanagement. Proceedings zum 8. FaRis & DAV Symposium am 12. Juni 2015 in Köln
10/2015	Heep-Altiner, Rohlfs: Standardformel und weitere Anwendungen am Beispiel des durchgängigen Datenmodells der „IVW Privat AG“ – Teil 2
9/2015	Goecke: Asset Liability Management in einem selbstfinanzierenden Pensionsfonds
8/2015	Strobel (Hrsg.): Management des Langlebigkeitsrisikos. Proceedings zum 7. FaRis & DAV Symposium am 5.12.2014 in Köln
7/2015	Völler, Wunder: Enterprise 2.0: Konzeption eines Wikis im Sinne des prozessorientierten Wissensmanagements
6/2015	Heep-Altiner, Rohlfs: Standardformel und weitere Anwendungen am Beispiel des durchgängigen Datenmodells der „IVW Privat AG“
5/2015	Knobloch: Momente und charakteristische Funktion des Barwerts einer bewerteten inhomogenen Markov-Kette. Anwendung bei risikobehafteten Zahlungsströmen
4/2015	Heep-Altiner, Rohlfs, Beier: Erneuerbare Energien und ALM eines Versicherungsunternehmens
3/2015	Dolgov: Calibration of Heston's stochastic volatility model to an empirical density using a genetic algorithm
2/2015	Heep-Altiner, Berg: Mikroökonomisches Produktionsmodell für Versicherungen
1/2015	Institut für Versicherungswesen: Forschungsbericht für das Jahr 2014

2014

10/2014 Müller-Peters, Völler (beide Hrsg.): Innovation in der Versicherungswirtschaft

9/2014 Knobloch: Zahlungsströme mit zinsunabhängigem Barwert

8/2014 Heep-Altiner, Münchow, Scuzzarello: Ausgleichsrechnungen mit Gauß Markow Modellen am Beispiel eines fiktiven Stornobestandes

7/2014 Grundhöfer, Röttger, Scherer: Wozu noch Papier? Einstellungen von Studierenden zu E-Books

6/2014 Heep-Altiner, Berg (beide Hrsg.): Katastrophenmodellierung - Naturkatastrophen, Man Made Risiken, Epidemien und mehr. Proceedings zum 6. FaRis & DAV Symposium am 13.06.2014 in Köln

5/2014 Goecke (Hrsg.): Modell und Wirklichkeit. Proceedings zum 5. FaRis & DAV Symposium am 6. Dezember 2013 in Köln

4/2014 Heep-Altiner, Hoos, Krahforst: Fair Value Bewertung von zedierten Reserven

3/2014 Heep-Altiner, Hoos: Vereinfachter Nat Cat Modellierungsansatz zur Rückversicherungsoptimierung

2/2014 Zimmermann: Frauen im Versicherungsvertrieb. Was sagen die Privatkunden dazu?

1/2014 Institut für Versicherungswesen: Forschungsbericht für das Jahr 2013

2013

11/2013 Heep-Altiner: Verlustabsorbierung durch latente Steuern nach Solvency II in der Schadenversicherung, Nr. 11/2013

10/2013 Müller-Peters: Kundenverhalten im Umbruch? Neue Informations- und Abschlusswege in der Kfz-Versicherung, Nr. 10/2013

9/2013 Knobloch: Risikomanagement in der betrieblichen Altersversorgung. Proceedings zum 4. FaRis & DAV-Symposium am 14. Juni 2013

8/2013 Strobel (Hrsg.): Rechnungsgrundlagen und Prämien in der Personen- und Schadenversicherung - Aktuelle Ansätze, Möglichkeiten und Grenzen. Proceedings zum 3. FaRis & DAV Symposium am 7. Dezember 2012

7/2013 Goecke: Sparprozesse mit kollektivem Risikoausgleich - Backtesting

6/2013 Knobloch: Konstruktion einer unterjährlichen Markov-Kette aus einer jährlichen Markov-Kette

5/2013 Heep-Altiner et al. (Hrsg.): Value-Based-Management in Non-Life Insurance

4/2013 Heep-Altiner: Vereinfachtes Formelwerk für den MCEV ohne Renewals in der Schadenversicherung

3/2013 Müller-Peters: Der vernetzte Autofahrer – Akzeptanz und Akzeptanzgrenzen von eCall, Werkstattvernetzung und Mehrwertdiensten im Automobilbereich

2/2013 Maier, Schimikowski (beide Hrsg.): Proceedings zum 6. Diskussionsforum Versicherungsrecht am 25. September 2012 an der FH Köln

1/2013 Institut für Versicherungswesen (Hrsg.): Forschungsbericht für das Jahr 2012

2012

11/2012	Goecke (Hrsg.): Alternative Zinsgarantien in der Lebensversicherung. Proceedings zum 2. FaRis & DAV-Symposiums am 1. Juni 2012
10/2012	Klatt, Schiegl: Quantitative Risikoanalyse und -bewertung technischer Systeme am Beispiel eines medizinischen Gerätes
9/2012	Müller-Peters: Vergleichsportale und Verbraucherwünsche
8/2012	Füllgraf, Völler: Social Media Reifegradmodell für die deutsche Versicherungswirtschaft
7/2012	Völler: Die Social Media Matrix - Orientierung für die Versicherungsbranche
6/2012	Knobloch: Bewertung von risikobehafteten Zahlungsströmen mithilfe von Markov-Ketten bei unterjährlicher Zahlweise
5/2012	Goecke: Sparprozesse mit kollektivem Risikoausgleich - Simulationsrechnungen
4/2012	Günther (Hrsg.): Privat versus Staat - Schussfahrt zur Zwangsversicherung? Tagungsband zum 16. Kölner Versicherungssymposium am 16. Oktober 2011
3/2012	Heep-Altiner/Krause: Der Embedded Value im Vergleich zum ökonomischen Kapital in der Schadenversicherung
2/2012	Heep-Altiner (Hrsg.): Der MCEV in der Lebens- und Schadenversicherung - geeignet für die Unternehmenssteuerung oder nicht? Proceedings zum 1. FaRis & DAV-Symposium am 02.12.2011 in Köln
1/2012	Institut für Versicherungswesen (Hrsg.): Forschungsbericht für das Jahr 2011

2011

5/2011	Reimers-Rawcliffe: Eine Darstellung von Rückversicherungsprogrammen mit Anwendung auf den Kompressionseffekt
4/2011	Knobloch: Ein Konzept zur Berechnung von einfachen Barwerten in der betrieblichen Altersversorgung mithilfe einer Markov-Kette
3/2011	Knobloch: Bewertung von risikobehafteten Zahlungsströmen mithilfe von Markov-Ketten
2/2011	Heep-Altiner: Performanceoptimierung des (Brutto) Neugeschäfts in der Schadenversicherung
1/2011	Goecke: Sparprozesse mit kollektivem Risikoausgleich