Forschung am ivwKöln
Band 7/2017

Konstruktion einer unterjährlichen Markov-Kette aus einer jährlichen Markov-Kette - Eine Verallgemeinerung des linearen Ansatzes

Ralf Knobloch

ivwKöln
Institut für Versicherungswesen

Fakultät für Wirtschafts-
und Rechtswissenschaften

Technology
Arts Sciences
TH Köln

Forschung am **ivw**Köln, Band 7/2017

Ralf Knobloch

Forschungsstelle FaRis

Konstruktion einer unterjährlichen Markov-Kette aus einer jährlichen Markov-Kette - Eine Verallgemeinerung des linearen Ansatzes

---

Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit wird ausgehend von einer jährlichen inhomogenen Markov-Kette eine unterjährliche bewertete inhomogene Markov-Kette konstruiert. Die Konstruktion der unterjährlichen Übergangsmatrizen basiert auf der Taylorreihe der Potenzfunktion bzw. deren Partialsummen. Dieser Ansatz ist eine Verallgemeinerung des Falls, dass die unterjährlichen Übergangsmatrizen durch Interpolation der jährlichen Übergangsmatrizen und der Einheitsmatrix definiert werden. Anschließend liegt der Fokus der Arbeit auf der Verteilung der Zufallsvariablen „Barwert des Zahlungsstroms“ bzw. auf der zugehörigen charakteristischen Funktion, einem EDV-technischen Verfahren zur Berechnung der Momente der Zufallsvariablen und dessen Anwendung in zwei Fallbeispielen.

Abstract

In the present paper it will be shown how a priced inhomogeneous Markov chain with periods less than a year can be designed from a given inhomogeneous Markov chain with annual time periods. The construction is based on the Taylor series and their partial sums of the power function. This approach is a generalization of the case, where the transition matrices are given by linear interpolation of the yearly transition matrices and the identity matrix. Afterwards we focus on the distribution of the random variable “present value of the cash-flow” and on the associated characteristic function, respectively, as well as an IT method for calculating the moments of the random variable and its application for two case studies.

Schlagwörter:

Markov-Kette, Bewertete Markov-Kette, Barwert, charakteristische Funktion

Keywords:

Markov Chain, Priced Markov Chain, Present Value, Characteristic Function

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung

Stochastische Prozesse haben in den Wirtschaftswissenschaften die vielfältigsten Anwendungen. Sie werden zur Modellierung sowohl bei klassischen betriebswirtschaftlichen Sachverhalten als auch bei speziellen Fragestellungen in den Bereichen Insurance und Finance eingesetzt. Eine der wichtigsten Modellklasse bilden die Markov-Ketten, d.h. gedächtnislose stochastische Prozesse mit diskretem Zustandsraum. Die Zeitachse der Markov-Ketten kann dabei entweder diskret oder stetig modelliert werden. Bezüglich der zeitlichen Dynamik werden in den Wirtschaftswissenschaften sowohl homogene als auch inhomogene Modelle eingesetzt. Als Beispiele für die Anwendung von Markov-Ketten bei klassischen betriebswirtschaftlichen Fragestellungen seien hier die Themen Warteschlangen-systeme, Lagerhaltung und (Markovsche) Entscheidungsprozesse genannt (vgl. [14]). In der Personenversicherungsmathematik werden Markov-Ketten zur Kalkulation von Barwerten, Reserven und Prämien verwendet (vgl. [12], [13], [6], [7], [8], [10], [11]).

Die in den Wirtschaftswissenschaften verwendeten Modelle basieren oft auf jährlichen Beobachtungen und werden daher i.d.R. zunächst als stochastische Prozesse in diskreter Zeit modelliert, bei denen der Abstand zwischen zwei Zeitpunkten als ein Jahr interpretiert wird. Die Modelle werden anschließend verfeinert und bei unterjährlichen Fragestellungen angewendet. Ein Beispiel dafür ist die Modellierung von Zahlungsströmen in der Finanz- und in der Versicherungs-mathematik. Die Zahlungen im Kontext von Banken und Versicherungen erfolgen in der Praxis, z.B. bei Rentenzahlungen oder bei der Tilgung eines Kredits, meist unterjährlich (z.B. monatlich oder quartalsweise).

Bei der Anwendung auf unterjährliche Fragestellungen ist es wichtig, wie die ursprünglich jährlichen Übergangswahrscheinlichkeiten auf das Jahr verteilt werden. Sei z.B. $\mathbf{Q}$ die Übergangsmatrix des $\mathbf{t}$-ten Jahres und $\left[\mathbf{t}-1,\mathbf{t}-1+\alpha\right]$ mit $\alpha \in \left(0,1\right)$ ein zum Jahresanfang beginnendes Teilintervall des $\mathbf{t}$-ten Jahres, so wäre – in Analogie zu den Zinsmodellen der Finanzmathematik – die Potenz $\mathbf{Q}^{\alpha}$ ein sinnvoller Ansatz für die Matrix der Übergangswahrscheinlichkeiten dieses Teilintervalls. Diese Potenz kann aber nur in Sonderfällen definiert werden. Und selbst in einfachen Fällen, in denen $\mathbf{Q}^{\alpha}$ definiert werden kann, ist nicht gewährleistet, dass es sich dann um eine stochastische Matrix handelt. So existiert zwar für stochastische Matrizen mit der Ordnung $\mathbf{3x3}$, die zugleich obere Dreiecksmatrizen sind, die Wurzel (d.h. die Potenz mit $\alpha = 0{,}5$), diese muss aber keine stochastische Matrix sein (vgl. [9]). Eine andere Möglichkeit besteht darin, die Übergangswahrscheinlichkeiten linear über das Jahr zu verteilen, d.h. die Übergangsmatrix des Intervalls $\left[\mathbf{t}-1,\mathbf{t}-1+\alpha\right]$ durch Interpolation der jährlichen Übergangsmatrix und der Einheitsmatrix anzusetzen (vgl. [11]).

Die in dem vorliegenden Artikel gewählte Methode zur Verteilung basiert für $\alpha \in (0,1)$ auf der Taylorentwicklung der reellwertigen Funktion $x \to x^{\alpha}$ an der Stelle $x_0 = 1$. Die Übergangsmatrix für das Intervall $[t-1, t-1+\alpha]$ wird durch das Einsetzen der jährlichen Übergangsmatrix in die Taylorreihe bzw. alternativ in die m-te Partialsumme definiert. Es zeigt sich, dass die Verwendung der 1-ten Partialsumme der oben beschriebenen linearen Verteilung der Übergangswahrscheinlichkeiten entspricht. Bei der hier dargestellten Vorgehensweise muss aber – insbesondere bei der Verwendung der Taylorentwicklung – nachgewiesen oder vorausgesetzt werden, dass es sich dann bei den Ergebnissen um stochastische Matrizen handelt.

Die so konstruierte unterjährliche Markov-Kette wird im zweiten Teil des Artikels mit einer Bewertung versehen, d.h. zu jedem Zeitpunkt wird in Abhängigkeit des jeweiligen Zustands eine Leistung definiert. Im Mittelpunkt des Interesses steht anschließend der Barwert dieser Bewertung bezogen auf ein endliches Zeitintervall. Somit befindet man sich z.B. im Kontext der klassischen finanzmathematischen Aufgabenstellung „Berechnung des Barwerts eines endlichen Zahlungsstroms". Da der Barwert hier als Zufallsvariable im Sinne der Wahrscheinlichkeitstheorie angesetzt wird, stellt sich die Frage nach der Verteilung. Es ist zwar nicht möglich, die Verteilungsfunktion darzustellen, es kann aber eine Formel für die charakteristische Funktion hergeleitet werden. Gemäß Eindeutigkeitssatz ist dies als Ergebnis gleichwertig, da die charakteristische Funktion einer Zufallsvariablen deren Verteilung eindeutig festlegt (vgl. [3]).

Das hier vorgestellte Modell wird in der Literatur auch als bewertete Markov-Kette bezeichnet. Es hat in den Wirtschaftswissenschaften eine Vielzahl von Anwendungen. Beispielsweise wird es bei Lagerhaltungsmodellen eingesetzt, dabei steht die Bewertung für die mit der Lagerhaltung verbundenen Kosten (Bestellkosten, Lagerkosten und Fehlmengenkosten). In anderen ökonomischen Anwendungen modelliert die Bewertung zustandsabhängige Gewinne (vgl. [14] S.45ff). In der Finanz- und Versicherungsmathematik werden bewertete Markov-Ketten zur Modellierung risikobehafteter Zahlungsströme verwendet.

Analog zur charakteristischen Funktion kann auch eine Formel für die momentenerzeugende Funktion des Barwerts der Bewertung hergeleitet werden. Mithilfe der Differentialrechnung können aus der momentenerzeugenden Funktion die höheren Momente dieser Zufallsvariablen berechnet werden. Zum Abschluss dieses Artikels werden daher in zwei Fallbeispielen bei den unterschiedlichen unterjährlichen Verteilungen die Momente „Erwartungswert" und „Standardabweichung" analysiert bzw. verglichen.

2. Das jährliche Modell

Gegeben sei eine Markov-Kette $(X_t)_{t=0,1,2,...}$ mit dem endlichen Zustandsraum $S = \{0,1,2,...,N\}$. Dabei steht der Zeitpunkt t für den Beginn des $(t+1)$-ten Jahres bzw. die Zufallsvariable X_t für den Zustand zu Beginn des $(t+1)$-ten Jahres, $t = 0,1,2,...$. Die Übergangswahrscheinlichkeiten vom Zeitpunkt $t-1$ zum Zeitpunkt t seien gegeben durch die (N+1)x(N+1)-Matrix

$$Q(t) = (q_{jk}(t))_{j,k \in S},$$

d.h.

$$q_{jk}(t) := P(X_t = k \mid X_{t-1} = j), \ j,k \in S, \ t = 1,2,...$$

(vgl. [6]). Da die Übergangsmatrizen explizit von dem Zeitparameter t abhängen, heißt die Markov-Kette inhomogen (vgl. [12] S.16f, [14] S.11).

Die Verteilung der Zufallsvariablen X_t, $t = 0,1,2,...$, sei gegeben durch den Zeilenvektor $P_t = (P_{t,j})_{j \in S}$, d.h.

$$P(X_t = j) = P_{t,j}, \ j \in S.$$

Im Folgenden wird davon ausgegangen, dass P_0 vorgegeben ist und alle Wahrscheinlichkeiten, Verteilungen und Momente gegeben dieser Anfangsverteilung berechnet werden. Unter Anwendung der Chapman-Kolmogorov-Gleichung für Markov-Ketten (vgl. [12] S.14) ergibt sich für $t = 0,1,2,...$

$$P_t = P_0 \cdot \prod_{s=1}^{t} Q(s)$$

(vgl. [6]).

3. Spezielle Partialsummen und Reihen von Matrizen

Im Verlauf des Artikels werden basierend auf dem jährlichen Modell – wie in der Einführung ausgeführt – unterjährliche Markov-Ketten konstruiert. Von entscheidender Bedeutung ist dabei die Verteilung der jährlichen Übergangswahrscheinlichkeiten auf das Jahr. Mit Blick auf die Potenz $\mathbf{Q}^{\alpha}$, $\alpha \in (0,1)$, einer stochastischen Matrix $\mathbf{Q}$ werden die unterjährlichen Übergangsmatrizen – analog zur Neumannschen Reihe – über eine Reihe bzw. über eine endliche Summe definiert.

Wir betrachten zunächst für $\alpha \in (0,1)$ die Taylorreihe der reellwertigen Funktion

$$\mathbf{f(x) = x^{\alpha}, x \in IR}$$

an der Stelle $\mathbf{x_0 = 1}$. Diese ergibt sich mit

$$\sum_{u=0}^{\infty} \frac{f^{(u)}(1)}{u!} \cdot (x-1)^u = \sum_{u=0}^{\infty} \frac{1}{u!} \cdot \prod_{v=0}^{u-1} (\alpha - v) \cdot (x-1)^u = \sum_{u=0}^{\infty} \binom{\alpha}{u} \cdot (x-1)^u \; ,$$

dabei ist $\binom{\alpha}{u} := \prod_{v=1}^{u} \frac{\alpha - v + 1}{v}$ der verallgemeinerte Binomialkoeffizient. Für $\mathbf{0 \le x \le 2}$ gilt

$$\sum_{u=0}^{\infty} \binom{\alpha}{u} \cdot (x-1)^u = x^{\alpha} .$$

In den Fällen $\mathbf{x > 2}$ und $\mathbf{x < 0}$ divergiert die Reihe. Beides folgt aus dem Konvergenzverhalten der Binomialreihe (vgl. [5] S.382f).

Setzt man $\mathbf{x = 1 - q}$, so erhält man insbesondere für $\mathbf{0 \le q \le 1}$ die Gleichung

$$\sum_{u=0}^{\infty} \binom{\alpha}{u} \cdot (-q)^u = (1-q)^{\alpha} .$$

Für $\mathbf{0 \le q < 1}$ ist die Konvergenz absolut, dies ergibt sich durch Anwendung des Quotientenkriteriums für Reihen (vgl. [5] S.205f).

Im Folgenden sei $\mathbf{Q}$ eine stochastische Matrix und $\mathbf{E}$ die Einheitsmatrix. Beide Matrizen seien von der Ordnung (N+1)x(N+1). Dabei werden die Zeilen und Spalten der beiden Matrizen in Anlehnung an den Zustandsraum des jährlichen Modells mit $\mathbf{0,1,\ldots,N}$ durchnummeriert.

Zunächst setzen wir die beiden Matrizen in die $\mathbf{m}$-te Partialsumme der Taylorreihe ein und erhalten die Matrix

$$_{\alpha,m}\mathbf{Q} := \sum_{u=0}^{m} \binom{\alpha}{u} \cdot (\mathbf{Q} - \mathbf{E})^u \; , \; \alpha \in (0,1), \; m \in IN .$$

Die Einträge der Matrix ${}_{\alpha,m}\mathbf{Q}$ werden mit ${}_{\alpha,m}\mathbf{q}_{ij}$ bezeichnet.

Beispiele:

a) Es sei $\alpha \in (0,1)$ und $\mathbf{m} = \mathbf{1}$. Es gilt

$${}_{\alpha,m}\mathbf{Q} = {}_{\alpha,1}\mathbf{Q} = \binom{\alpha}{0} \cdot (\mathbf{Q}-\mathbf{E})^0 + \binom{\alpha}{1} \cdot (\mathbf{Q}-\mathbf{E})^1 = \mathbf{E} + \alpha \cdot (\mathbf{Q}-\mathbf{E}) = \alpha \cdot \mathbf{Q} + (1-\alpha) \cdot \mathbf{E},$$

d.h. $\mathbf{Q}$ und $\mathbf{E}$ werden linear interpoliert. Da $\mathbf{Q}$ und $\mathbf{E}$ beides stochastische Matrizen sind, hat auch ${}_{\alpha,1}\mathbf{Q}$ keine negativen Einträge. Für die Zeilensumme der $\mathbf{i}$-ten Zeile ergibt sich

$$\sum_{j=0}^{N} {}_{\alpha,m}\mathbf{q}_{ij} = \sum_{j=0}^{N} \left(\alpha \cdot \mathbf{q}_{ij} + (1-\alpha) \cdot \mathbf{e}_{ij}\right) = \alpha \cdot \sum_{j=0}^{N} \mathbf{q}_{ij} + (1-\alpha) \cdot \sum_{j=0}^{N} \mathbf{e}_{ij} = 1.$$

Somit ist ${}_{\alpha,1}\mathbf{Q}$ immer eine stochastische Matrix.

b) Es sei $\mathbf{N} = \mathbf{2}$, d.h. betrachten 3x3-Matrizen. Ferner $\alpha = \frac{1}{2}$ und $\mathbf{m} = \mathbf{2}$. Die stochastische Matrix $\mathbf{Q}$ sei gegeben durch

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 1-a-b & a & b \\ 0 & 1-c & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

mit $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in [0,1]$ und $\mathbf{a} + \mathbf{b} \leq 1$. Somit ergibt sich

$$(\mathbf{Q}-\mathbf{E})^0 = \mathbf{E}$$

$$(\mathbf{Q}-\mathbf{E})^1 = \begin{pmatrix} -a-b & a & b \\ 0 & -c & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(\mathbf{Q}-\mathbf{E})^2 = \begin{pmatrix} (a+b)^2 & -a^2 - a \cdot b - a \cdot c & -b^2 - a \cdot b + a \cdot c \\ 0 & c^2 & -c^2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und man erhält

$$_{\alpha,m}Q = {}_{\frac{1}{2},2}Q = \binom{1/2}{0}\cdot(Q-E)^0 + \binom{1/2}{1}\cdot(Q-E)^1 + \binom{1/2}{2}\cdot(Q-E)^2 =$$

$$= E + \frac{1}{2}\cdot(Q-E)^1 - \frac{1}{8}\cdot(Q-E)^2 =$$

$$= \begin{pmatrix} 1-\frac{a+b}{2}-\frac{(a+b)^2}{8} & \frac{a}{2}+\frac{a^2+a\cdot b+a\cdot c}{8} & \frac{b}{2}+\frac{b^2+a\cdot b-a\cdot c}{8} \\ 0 & 1-\frac{c}{2}-\frac{c^2}{8} & \frac{c}{2}+\frac{c^2}{8} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Wie betrachten zwei Fälle:

$$a = 0, b = 1, c = 0{,}5: \quad {}_{\alpha,m}Q = {}_{\frac{1}{2},2}Q = \begin{pmatrix} 0{,}375 & 0 & 0{,}625 \\ 0 & 0{,}71875 & 0{,}28125 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$a = 1, b = 0, c = 0{,}5: \quad {}_{\alpha,m}Q = {}_{\frac{1}{2},2}Q = \begin{pmatrix} 0{,}375 & 0{,}6875 & -0{,}0625 \\ 0 & 0{,}71875 & 0{,}28125 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Im ersten Fall ist ${}_{\frac{1}{2},2}Q$ eine stochastische Matrix, im zweiten Fall nicht.

Somit ist selbst bei stochastischen Matrizen, die als obere Dreiecksmatrizen gegeben sind, nicht gewährleistet, dass ${}_{\alpha,m}Q$ eine stochastische Matrix ist. Da dies aber zur der Konstruktion der unterjährlichen Markov-Ketten notwendig ist, wird später u.a. vorausgesetzt, dass ${}_{\alpha,m}Q$ eine stochastische Matrix ist.

Setzt man die stochastische Matrix Q und die Einheitsmatrix E in die Taylorreihe ein, so ergibt sich formal der Ausdruck

$$_{\alpha,\infty}Q := \sum_{u=0}^{\infty}\binom{\alpha}{u}\cdot(Q-E)^u \quad , \alpha \in (0{,}1).$$

Die Einträge der Matrix ${}_{\alpha,\infty}Q$ werden mit ${}_{\alpha,\infty}q_{ij}$ bezeichnet. Es stellt sich dann direkt die Frage nach der Konvergenz der Reihe bezogen auf die Einträge in den Matrizen. Die folgenden Beispiele zeigen, dass die Konvergenz nicht immer gegeben ist.

Beispiele: Es sei $\alpha \in (0{,}1)$.

a) Für $Q = E$ ist die Konvergenz trivial, da $(Q-E)^u$ für $u \geq 1$ die Nullmatrix ist.

b) Es sei $Q = \begin{pmatrix} 1-q & q \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ mit $0 \leq q \leq 1$. Dann gilt für $u \in IN$

$$\left(\mathbf{Q}-\mathbf{E}\right)^{u}=(-1)^{u}\cdot q^{u}\cdot\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Diese Aussage ergibt sich mit vollständiger Induktion wie folgt:

$u=1$: In diesem Fall ist die Aussage trivialerweise erfüllt.

$u\to u+1$:

$$\left(\mathbf{Q}-\mathbf{E}\right)^{u+1}=\left(\mathbf{Q}-\mathbf{E}\right)^{u}\cdot\left(\mathbf{Q}-\mathbf{E}\right)=(-1)^{u}\cdot q^{u}\cdot\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\cdot(-1)\cdot q\cdot\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 0\end{pmatrix}=$$

$$=(-1)^{u+1}\cdot q^{u+1}\cdot\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 0\end{pmatrix}=(-1)^{u+1}\cdot q^{u+1}\cdot\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

Damit ergibt sich wegen $0\le q\le 1$ bzw. $\sum_{u=0}^{\infty}\binom{\alpha}{u}\cdot\left(-q\right)^{u}=(1-q)^{\alpha}$

$$_{\alpha,\infty}\mathbf{Q}=\sum_{u=0}^{\infty}\binom{\alpha}{u}\cdot\left(\mathbf{Q}-\mathbf{E}\right)^{u}=\mathbf{E}+\sum_{u=1}^{\infty}\binom{\alpha}{u}\cdot(-1)^{u}\cdot q^{u}\cdot\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 0\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1+\sum_{u=1}^{\infty}\binom{\alpha}{u}\cdot\left(-q\right)^{u} & -\sum_{u=1}^{\infty}\binom{\alpha}{u}\cdot\left(-q\right)^{u}\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sum_{u=0}^{\infty}\binom{\alpha}{u}\cdot\left(-q\right)^{u} & -\sum_{u=1}^{\infty}\binom{\alpha}{u}\cdot\left(-q\right)^{u}\\ 0 & 1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}\left(1-q\right)^{\alpha} & 1-\left(1-q\right)^{\alpha}\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

Damit existiert die Reihe bzw. $_{\alpha,\infty}\mathbf{Q}$ und es handelt sich um eine stochastische Matrix.

c) Es sei nun $\mathbf{Q}=\begin{pmatrix}1-q & q\\ q & 1-q\end{pmatrix}$ mit $0\le q\le 1$. Dann gilt für $u\in\mathrm{IN}$

$$\left(\mathbf{Q}-\mathbf{E}\right)^{u}=(-1)^{u}\cdot q^{u}\cdot\begin{pmatrix}2^{u-1} & -2^{u-1}\\ -2^{u-1} & 2^{u-1}\end{pmatrix}.$$

Diese Aussage ergibt sich ebenfalls mit vollständiger Induktion:

$u=1$: In diesem Fall ist die Aussage trivialerweise erfüllt.

$u\to u+1$:

$$\left(\mathbf{Q}-\mathbf{E}\right)^{u+1}=\left(\mathbf{Q}-\mathbf{E}\right)^{u}\cdot\left(\mathbf{Q}-\mathbf{E}\right)=$$

$$=(-1)^{u}\cdot q^{u}\cdot\begin{pmatrix}2^{u-1} & -2^{u-1}\\ -2^{u-1} & 2^{u-1}\end{pmatrix}\cdot(-1)\cdot q\cdot\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}=$$

$$=(-1)^{u+1}\cdot q^{u+1}\cdot\begin{pmatrix}2^{u-1} & -2^{u-1}\\ -2^{u-1} & 2^{u-1}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}=$$

$$=(-1)^{u+1}\cdot q^{u+1}\cdot\begin{pmatrix}2^{u-1}+2^{u-1} & -2^{u-1}-2^{u-1}\\ -2^{u-1}-2^{u-1} & 2^{u-1}+2^{u-1}\end{pmatrix}=$$

$$=(-1)^{u+1}\cdot q^{u+1}\cdot\begin{pmatrix}2^{u} & -2^{u}\\ -2^{u} & 2^{u}\end{pmatrix}$$

Daraus ergibt sich

$$(\mathbf{Q}-\mathbf{E})^{u}=(-1)^{u}\cdot q^{u}\cdot\begin{pmatrix}2^{u-1} & -2^{u-1}\\ -2^{u-1} & 2^{u-1}\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\cdot(-1)^{u}\cdot(2\cdot q)^{u}\cdot\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$$

und man erhält

$${}_{\alpha,\infty}\mathbf{Q}=\sum_{u=0}^{\infty}\binom{\alpha}{u}\cdot(\mathbf{Q}-\mathbf{E})^{u}=\mathbf{E}+\sum_{u=1}^{\infty}\binom{\alpha}{u}\cdot\frac{1}{2}\cdot(-1)^{u}\cdot(2\cdot q)^{u}\cdot\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1+\frac{1}{2}\cdot\sum_{u=1}^{\infty}\binom{\alpha}{u}\cdot(-2\cdot q)^{u} & -\frac{1}{2}\cdot\sum_{u=1}^{\infty}\binom{\alpha}{u}\cdot(-2\cdot q)^{u}\\ -\frac{1}{2}\cdot\sum_{u=1}^{\infty}\binom{\alpha}{u}\cdot(-2\cdot q)^{u} & 1+\frac{1}{2}\cdot\sum_{u=1}^{\infty}\binom{\alpha}{u}\cdot(-2\cdot q)^{u}\end{pmatrix}.$$

Für $0\le q\le\frac{1}{2}$ bzw. $0\le 2\cdot q\le 1$ konvergieren die Reihen und man erhält wegen $\sum_{u=0}^{\infty}\binom{\alpha}{u}\cdot(-2\cdot q)^{u}=(1-2q)^{\alpha}$ die folgende Matrix:

$${}_{\alpha,\infty}\mathbf{Q}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot(1-2q)^{\alpha} & \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot(1-2q)^{\alpha}\\ \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot(1-2q)^{\alpha} & \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot(1-2q)^{\alpha}\end{pmatrix}.$$

Alle Einträge der Matrix sind nichtnegativ und die Zeilensummen 1. Somit existiert ${}_{\alpha,\infty}\mathbf{Q}$ und es handelt sich um eine stochastische Matrix. Für $\frac{1}{2}<q\le 1$ divergieren die Einträge, d.h. in diesen Fällen existiert ${}_{\alpha,\infty}\mathbf{Q}$ nicht.

d) Es sei $\mathbf{Q}$ eine stochastische Matrix der Ordnung (N+1)x(N+1) mit $\min_{i\in\{0,1,\ldots,N\}} q_{ii}>\frac{1}{2}$.

Damit erhält man $\gamma:=2\cdot\left(1-\min_{i\in\{0,1,\ldots,N\}} q_{ii}\right)<1$. Es sei $\|\ \|$ die Zeilensummennorm für Matrizen. Es gilt:

$$\|\mathbf{Q}\|=\max_{i\in\{0,1,\ldots,N\}}\sum_{j=0}^{N}|q_{ij}|=\max_{i\in\{0,1,\ldots,N\}}\sum_{j=0}^{N}q_{ij}=1$$

und

$$\|\mathbf{Q}-\mathbf{E}\|=\max_{i\in\{0,1,\ldots,N\}}\sum_{j=0}^{N}|q_{ij}-e_{ij}|=\max_{i\in\{0,1,\ldots,N\}}\left(|q_{ii}-1|+\sum_{j=0,j\ne i}^{N}|q_{ij}|\right)=$$

$$=\max_{i\in\{0,1,\ldots,N\}}\left(1-q_{ii}+\sum_{j=0,j\ne i}^{N}q_{ij}\right)=\max_{i\in\{0,1,\ldots,N\}}(2-2\cdot q_{ii})=2\cdot\left(1-\min_{i\in\{0,1,\ldots,N\}}q_{ii}\right)=\gamma<1$$

Für $u=0,1,2,\ldots$ seien $d_{u,ij}$ die Einträge der Matrix $(\mathbf{Q}-\mathbf{E})^{u}$. Die elementweise Konvergenz von ${}_{\alpha,\infty}\mathbf{Q}$ ergibt sich aus

$$\left|{}_{\alpha,\infty}q_{ij}\right|\le\sum_{u=0}^{\infty}\left|\binom{\alpha}{u}\right|\cdot|d_{u,ij}|\le\sum_{u=0}^{\infty}\left|\binom{\alpha}{u}\right|\cdot\left\|(\mathbf{Q}-\mathbf{E})^{u}\right\|\le\sum_{u=0}^{\infty}\left|\binom{\alpha}{u}\right|\cdot\|\mathbf{Q}-\mathbf{E}\|^{u}=\sum_{u=0}^{\infty}\left|\binom{\alpha}{u}\right|\cdot\gamma^{u}<\infty.$$

Die Zeilensummennorm ist als induzierte Matrixnorm der submultiplikativ, daraus folgt die letzte Ungleichung. Die Endlichkeit ergibt sich – wegen $\mathbf{0} \le \gamma < \mathbf{1}$ – aus der oben erwähnten absoluten Konvergenz. Somit konvergieren alle Elemente der Matrix ${}_{\alpha,\infty}\mathbf{Q}$, womit ihre Existenz gegeben ist.

Als Fazit kann festgehalten werden, dass es Beispiele gibt, bei denen die oben dargestellten Partialsummen und Reihen wiederum zu sinnvollen stochastischen Matrizen führen.

Neben den Matrizen ${}_{\mathbf{m},\alpha}\mathbf{Q}$ und ${}_{\alpha,\infty}\mathbf{Q}$ werden zur Konstruktion der unterjährlichen Markov-Ketten auch deren Inversen benötigten. Wir betrachten im folgenden Satz zunächst den Spezialfall, dass $\mathbf{Q}$ eine obere Dreiecksmatrix ist.

Satz 1:

Es sei $\mathbf{Q}$ eine obere Dreiecksmatrix mit $\mathbf{q_{ii}} > \mathbf{0}$ alle $\mathbf{i} = \mathbf{0,1,\ldots,N}$. Es sei $\alpha \in (\mathbf{0,1})$ und $\mathbf{m} \in \mathbf{IN}$. Dann gilt:

a) $\mathbf{det}({}_{\alpha,\mathbf{m}}\mathbf{Q}) \neq \mathbf{0}$

b) $\mathbf{det}({}_{\alpha,\infty}\mathbf{Q}) \neq \mathbf{0}$, sofern ${}_{\alpha,\infty}\mathbf{Q}$ existiert.

c) Die Matrix ${}_{\mathbf{m},\alpha}\mathbf{Q}$ ist invertierbar. Sofern die Matrix ${}_{\alpha,\infty}\mathbf{Q}$ existiert, ist sie ebenfalls invertierbar.

Für den Beweis des Satzes benötigt man folgendes Lemma:

Lemma 1:

Es sei $\mathbf{A}$ eine obere Dreiecksmatrix der Ordnung (N+1)x(N+1).

Für $\mathbf{u} \in \mathbf{IN}$ sei $\mathbf{B} = \mathbf{A^u}$. Dann gilt $\mathbf{b_{ii}} = (\mathbf{a_{ii}})^{\mathbf{u}}$ für alle $\mathbf{i} = \mathbf{0,1,\ldots,N}$.

Beweis:

Induktion:

$\mathbf{u} = \mathbf{1}$: In diesem Fall ist die Aussage trivial.

$\mathbf{u} \to \mathbf{u} + \mathbf{1}$:

$$
\mathbf{A}^{u+1} = \mathbf{A}^u \cdot \mathbf{A} = \begin{pmatrix} (a_{00})^u & & & & \\ & (a_{11})^u & & * & \\ & & \ddots & & \\ & 0 & & \ddots & \\ & & & & (a_{NN})^u \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{00} & & & & \\ & a_{11} & & * & \\ & & \ddots & & \\ & 0 & & \ddots & \\ & & & & a_{NN} \end{pmatrix} =
$$

$$
= \begin{pmatrix} (a_{00})^{u+1} & & & & \\ & (a_{11})^{u+1} & & * & \\ & & \ddots & & \\ & 0 & & \ddots & \\ & & & & (a_{NN})^{u+1} \end{pmatrix} = \mathbf{A}^{u+1}
$$

□

Beweis von Satz 1:

Da $\mathbf{Q}$ eine obere Dreiecksmatrix ist, gilt dies auch für $\mathbf{Q}-\mathbf{E}$. Ferner gilt wegen des Lemmas:

$$
(\mathbf{Q}-\mathbf{E})^u = \begin{pmatrix} (q_{00}-1)^u & & & & \\ & (q_{11}-1)^u & & * & \\ & & \ddots & & \\ & 0 & & \ddots & \\ & & & & (q_{NN}-1)^u \end{pmatrix}
$$

Damit erhält man

$$
\det({}_{\alpha,m}\mathbf{Q}) = \prod_{i=0}^{N}\left(\sum_{u=0}^{m}\binom{\alpha}{u}\cdot(q_{ii}-1)^u\right) \quad \text{und} \quad \det({}_{\alpha,\infty}\mathbf{Q}) = \prod_{i=0}^{N}\left(\sum_{u=0}^{\infty}\binom{\alpha}{u}\cdot(q_{ii}-1)^u\right)
$$

Für alle $i = 0,1,\ldots,N$ gilt $0 < q_{ii} \le 1$ und somit folgt aus der oben beschriebenen Konvergenz der Binomialreihe

$$
\sum_{u=0}^{\infty}\binom{\alpha}{u}\cdot(q_{ii}-1)^u = q_{ii}^{\alpha} > 0\,.
$$

Damit ergibt sich wegen $\det({}_{\alpha,\infty}\mathbf{Q}) = \prod_{i=0}^{N}\left(\sum_{u=0}^{\infty}\binom{\alpha}{u}\cdot(q_{ii}-1)^u\right) = \prod_{i=0}^{N} q_{ii}^{\alpha}$ die Behauptung aus b).

Aus

$$\sum_{u=0}^{m}\binom{\alpha}{u}\cdot(q_{ii}-1)^u=\sum_{u=0}^{m}\frac{\prod_{v=0}^{u-1}(\alpha-v)}{u!}\cdot(q_{ii}-1)^u=1+\sum_{u=1}^{m}\frac{\alpha\cdot\prod_{v=1}^{u-1}(v-\alpha)}{u!}\cdot(1-q_{ii})^u\cdot(-1)^{2\cdot u-1}=$$

$$=1-\sum_{u=1}^{m}\frac{\alpha\cdot\prod_{v=1}^{u-1}(v-\alpha)}{u!}\cdot(1-q_{ii})^u$$

und

$$\frac{\alpha\cdot\prod_{v=1}^{u-1}(v-\alpha)}{u!}\cdot(1-q_{ii})^u>0$$

folgt, dass $\sum_{u=0}^{m}\binom{\alpha}{u}\cdot(q_{ii}-1)^u$ eine für $m\to\infty$ gegen $q_{ii}^{\alpha}>0$ fallende Folge und somit

immer positiv ist. Daraus ergibt sich wegen $\det({}_{\alpha,m}Q)=\prod_{i=0}^{N}\left(\sum_{u=0}^{m}\binom{\alpha}{u}\cdot(q_{ii}-1)^u\right)$ die

Behauptung aus a). Die Behauptung c) folgt aus a) und b).

□

Obere Dreiecksmatrizen kommen als jährliche Übergangsmatrizen in der Personenversicherungsmathematik vor. D.h. in diesem Fall existiert für $\min_{i\in\{0,1,\ldots,N\}} q_{ii}>0$ die Inverse von ${}_{m,\alpha}Q$. Die gleiche Aussage gilt für ${}_{\alpha,\infty}Q$, sofern diese Matrix elementweise existiert.

Analog zur Definition der Matrix ${}_{\alpha,\infty}Q$ mit $\alpha\in(0,1)$ lässt sich auch die Matrix ${}_{\alpha,\infty}Q$ mit $\alpha\in(-1,0)$ durch

$${}_{\alpha,\infty}Q:=\sum_{u=0}^{\infty}\binom{\alpha}{u}\cdot(Q-E)^u$$

definieren. Man erhält damit die folgenden Aussagen.

Satz 2:

Es seien $\alpha,\beta\in(0,1)$ mit $0<\beta<\alpha<1$. Es existieren ${}_{\alpha,\infty}Q$, ${}_{\beta,\infty}Q$, $({}_{\alpha,\infty}Q)^{-1}$, $({}_{\beta,\infty}Q)^{-1}$, ${}_{-\alpha,\infty}Q$ und ${}_{\alpha-\beta,\infty}Q$. Dabei sei bei diesen Matrizen die elementweise Konvergenz als absolute Konvergenz gegeben.

a) Es gilt $\left({}_{\alpha,\infty}\mathbf{Q}\right)^{-1} = {}_{-\alpha,\infty}\mathbf{Q}$.

b) Es gilt $\left({}_{\beta,\infty}\mathbf{Q}\right)^{-1} \cdot {}_{\alpha,\infty}\mathbf{Q} = {}_{\alpha-\beta,\infty}\mathbf{Q}$.

Beweis:

Für die Beweise der beiden Aussagen benötigt man das folgende Ergebnis über die verallgemeinerten Binomialkoeffizienten. Für alle $\mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbf{IR}$ und $\mathbf{n} \in \mathbf{IN}$ gilt

$$\binom{\mathbf{x}+\mathbf{y}}{\mathbf{n}} = \sum_{\mathbf{m}=0}^{\mathbf{n}} \binom{\mathbf{x}}{\mathbf{n}-\mathbf{m}} \cdot \binom{\mathbf{y}}{\mathbf{m}}$$

(vgl. [2] S.8).

Für $\mathbf{u} = 0,1,2,\ldots$ seien $\mathbf{d}_{\mathbf{u},\mathbf{ij}}$ die Einträge der Matrix $(\mathbf{Q}-\mathbf{E})^{\mathbf{u}}$.

a) Es sei $\alpha \in (0,1)$. Dann ergibt sich wegen der elementweisen absoluten Konvergenz für die folgende Summe das Cauchy-Produkt (vgl. [2] S.47f):

$$\sum_{k=0}^{N}\left[\left(\sum_{u=0}^{\infty}\binom{-\alpha}{u}\cdot \mathbf{d}_{u,ik}\right)\cdot\left(\sum_{v=0}^{\infty}\binom{\alpha}{v}\cdot \mathbf{d}_{v,kj}\right)\right] =$$

$$= \sum_{k=0}^{N}\left[\sum_{u=0}^{\infty}\sum_{v=0}^{u}\binom{-\alpha}{u-v}\cdot\binom{\alpha}{v}\cdot \mathbf{d}_{u-v,ik}\cdot \mathbf{d}_{v,kj}\right] =$$

$$= \sum_{u=0}^{\infty}\sum_{v=0}^{u}\binom{-\alpha}{u-v}\cdot\binom{\alpha}{v}\cdot\sum_{k=0}^{N}\mathbf{d}_{u-v,ik}\cdot \mathbf{d}_{v,kj} =$$

$$= \sum_{u=0}^{\infty}\left[\sum_{v=0}^{u}\binom{-\alpha}{u-v}\cdot\binom{\alpha}{v}\right]\cdot \mathbf{d}_{u,ij} = \sum_{u=0}^{\infty}\binom{-\alpha+\alpha}{u}\cdot \mathbf{d}_{u,ij} = \mathbf{d}_{0,ij} = \mathbf{e}_{ij}$$

D.h. $\left({}_{\alpha,\infty}\mathbf{Q}\right)^{-1} = {}_{-\alpha,\infty}\mathbf{Q}$.

a) Es sei $0 < \beta < \alpha < 1$. Wegen a) gilt $\left({}_{\beta,\infty}\mathbf{Q}\right)^{-1} \cdot {}_{\alpha,\infty}\mathbf{Q} = {}_{-\beta,\infty}\mathbf{Q} \cdot {}_{\alpha,\infty}\mathbf{Q}$. Analog zu a) erhält man für dieses Produkt:

$$\sum_{k=0}^{N}\left[\left(\sum_{u=0}^{\infty}\binom{-\beta}{u}\cdot \mathbf{d}_{u,ik}\right)\cdot\left(\sum_{v=0}^{\infty}\binom{\alpha}{v}\cdot \mathbf{d}_{v,kj}\right)\right] =$$

$$= \sum_{k=0}^{N}\left[\sum_{u=0}^{\infty}\sum_{v=0}^{u}\binom{-\text{ß}}{u-v}\cdot\binom{\alpha}{v}\cdot \mathbf{d}_{u-v,ik}\cdot \mathbf{d}_{v,kj}\right] =$$

$$= \sum_{u=0}^{\infty}\sum_{v=0}^{u}\binom{-\beta}{u-v}\cdot\binom{\alpha}{v}\cdot\sum_{k=0}^{N}\mathbf{d}_{u-v,ik}\cdot \mathbf{d}_{v,kj} =$$

$$= \sum_{u=0}^{\infty}\left[\sum_{v=0}^{u}\binom{-\beta}{u-v}\cdot\binom{\alpha}{v}\right]\cdot \mathbf{d}_{u,ij} = \sum_{u=0}^{\infty}\binom{\alpha-\beta}{u}\cdot \mathbf{d}_{u,ij} = {}_{\alpha-\beta,\infty}\mathbf{q}_{ij}$$

D.h. $\left({}_{\beta,\infty}\mathbf{Q}\right)^{-1} \cdot {}_{\alpha,\infty}\mathbf{Q} = {}_{\alpha-\beta,\infty}\mathbf{Q}$.

Bemerkung:

Es sei $\mathbf{m} \in \mathbf{IN}$. Analog zur Definition der Matrix ${}_{\alpha,\mathbf{m}}\mathbf{Q}$ mit $\alpha \in (\mathbf{0,1})$ lässt sich auch hier die Matrix ${}_{\alpha,\mathbf{m}}\mathbf{Q}$ mit $\alpha \in (-\mathbf{1,0})$ durch

$$ {}_{\alpha,\mathbf{m}}\mathbf{Q} := \sum_{\mathbf{u}=0}^{\mathbf{m}} \binom{\alpha}{\mathbf{u}} \cdot (\mathbf{Q}-\mathbf{E})^{\mathbf{u}} $$

definieren. Allerdings gelten die analogen Aussagen zu Satz 2 in diesem Fall nicht, wie das folgende einfache Beispiel zeigt.

Es seien $\mathbf{m} = \mathbf{1}$ und $\alpha \in (\mathbf{0,1})$. Es gilt:

$$ {}_{-\alpha,1}\mathbf{Q} \cdot {}_{\alpha,1}\mathbf{Q} = (\mathbf{E} - \alpha \cdot (\mathbf{Q}-\mathbf{E})) \cdot (\mathbf{E} + \alpha \cdot (\mathbf{Q}-\mathbf{E})) = \mathbf{E} - \alpha \cdot (\mathbf{Q}-\mathbf{E}) + \alpha \cdot (\mathbf{Q}-\mathbf{E}) - \alpha^2 \cdot (\mathbf{Q}-\mathbf{E})^2 = $$
$$ = \mathbf{E} - \alpha^2 \cdot (\mathbf{Q}-\mathbf{E})^2 \neq \mathbf{E}, $$

sofern $(\mathbf{Q}-\mathbf{E})^2$ nicht die Nullmatrix ist. Somit ist ${}_{-\alpha,\mathbf{m}}\mathbf{Q}$ im Allgemeinen nicht die inverse Matrix zu ${}_{\alpha,\mathbf{m}}\mathbf{Q}$.

4. Konstruktionsvoraussetzungen

Es seien $\mathbf{T} \in \mathbf{IN}$ und $\mathbf{m} \in \mathbf{IN} \cup \{\infty\}$ fest. Dabei steht $\mathbf{T}$ für die Anzahl der unterjährlicher Zeitpunkte des im nächsten Kapitel eingeführten Modells. Ein endliches $\mathbf{m}$ bedeutet, dass die im letzten Kapitel eingeführte $\mathbf{m}$-te Partialsumme zur Konstruktion der unterjährlichen Markov-Ketten verwendet wird. Im Falle $\mathbf{m} = \infty$ wird die Potenzreihe zugrunde gelegt. Für beide Ansätze werden die Voraussetzungen wie folgt formuliert werden:

(B1) ${}_{\alpha,\mathbf{m}}\mathbf{Q}(\mathbf{t})$ ist für alle $\mathbf{t} \in \mathbf{IN}$ und alle $\alpha \in \left\{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{T}}, \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{T}}, \ldots, \frac{\mathbf{T}-\mathbf{1}}{\mathbf{T}}\right\}$ eine invertierbare stochastische Matrix.

(B2) $\left({}_{\beta,\mathbf{m}}\mathbf{Q}(\mathbf{t})\right)^{-1} \cdot {}_{\alpha,\mathbf{m}}\mathbf{Q}(\mathbf{t})$ ist für alle $\mathbf{t} \in \mathbf{IN}$ und alle $\alpha, \beta \in \left\{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{T}}, \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{T}}, \ldots, \frac{\mathbf{T}-\mathbf{1}}{\mathbf{T}}\right\}$ mit $\mathbf{0} < \beta < \alpha < \mathbf{1}$ eine stochastische Matrix.

Bisher wurde ${}_{\alpha,\mathbf{m}}\mathbf{Q}(\mathbf{t})$ gemäß dem vorherigen Kapitel lediglich für $\alpha \in (\mathbf{0},\mathbf{1})$ definiert. Benötigt werden die Matrizen aber auch für $\alpha = \mathbf{0}$ und $\alpha = \mathbf{1}$. Setzt man ${}_{\mathbf{0},\mathbf{m}}\mathbf{Q}(\mathbf{t}) := \mathbf{E}$, so sind trivialerweise (B1) für $\alpha = \mathbf{0}$ und (B2) für $\beta = \mathbf{0}$ erfüllt. Ferner wird (B2) durch die Setzung ${}_{\mathbf{1},\mathbf{m}}\mathbf{Q}(\mathbf{t}) := \mathbf{Q}(\mathbf{t})$ ausgeweitet. Insgesamt werden die Voraussetzungen wie folgt modifiziert:

(B1) ${}_{\alpha,\mathbf{m}}\mathbf{Q}(\mathbf{t})$ ist für alle $\mathbf{t} \in \mathbf{IN}$ und alle $\alpha \in \left\{\mathbf{0}, \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{T}}, \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{T}}, \ldots, \frac{\mathbf{T}-\mathbf{1}}{\mathbf{T}}\right\}$ eine invertierbare stochastische Matrix.

(B2) $\left({}_{\beta,\mathbf{m}}\mathbf{Q}(\mathbf{t})\right)^{-1} \cdot {}_{\alpha,\mathbf{m}}\mathbf{Q}(\mathbf{t})$ ist für alle $\mathbf{t} \in \mathbf{IN}$ und alle $\alpha, \beta \in \left\{\mathbf{0}, \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{T}}, \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{T}}, \ldots, \frac{\mathbf{T}-\mathbf{1}}{\mathbf{T}}, \frac{\mathbf{T}}{\mathbf{T}}\right\}$ mit $\mathbf{0} \leq \beta < \alpha \leq \mathbf{1}$ eine stochastische Matrix.

5. Konstruktion des unterjährlichen Modells

Es seien $\mathbf{T} \in \mathbf{IN}$ und $\mathbf{m} \in \mathbf{IN} \cup \{\infty\}$. Dabei gibt der Parameter $\mathbf{m}$ vor, ob die unterjährlichen Übergangsmatrizen auf Basis der $\mathbf{m}$-ten Partialsumme oder im Fall $\mathbf{m} = \infty$ auf Basis der Potenzreihe angesetzt werden. Der Parameter $\mathbf{T}$ gibt die Anzahl der unterjährlichen äquidistanten Zeitpunkte an. Die Konstruktionsvoraussetzungen (B1) und (B2) seien erfüllt. Die Konstruktion der unterjährlichen Markov-Kette erfolgt mit Satz 4 aus ([9]). Danach ist ausreichend, ein System von unterjährlichen Übergangsmatrizen zu definieren, so dass das Produkt der unterjährlichen Übergangsmatrizen die jeweilige jährliche Übergangsmatrix ergibt. Der Beweis für dieses Konstruktionsprinzip basiert auf dem Satz von Kolmogorov ([3] S.257f).

Vorgegeben sei ein äquidistantes unterjährliches Zeitraster:

$$\mathbf{0 = \frac{0}{T}, \frac{1}{T}, \frac{2}{T}, \ldots, \frac{T-1}{T}, 1 = 1 + \frac{0}{T}, 1 + \frac{1}{T}, 1 + \frac{2}{T} \ldots, 1 + \frac{T-1}{T}, 2 = 2 + \frac{0}{T}, 2 + \frac{1}{T}, 2 + \frac{2}{T} \ldots}$$

Die Menge der Zeitpunkt lässt sich wie folgt parametrisieren:

$$\left\{ \mathbf{t - 1 + \frac{s-1}{T}} \,\middle|\, \mathbf{s = 1, \ldots T; t = 1, 2, \ldots} \right\}$$

Definiere in Anlehnung an die Notation von [9] Satz 4 für $\mathbf{s = 1, 2, \ldots, T}$ und $\mathbf{t = 1, 2, \ldots}$ die folgenden Übergangsmatrizen:

$$\mathbf{R(s,t,T,m) := \left({}_{\frac{s-1}{T},m}Q(t) \right)^{-1} \cdot {}_{\frac{s}{T},m}Q(t)}$$

Dann gilt für alle $\mathbf{t = 1, 2, \ldots}$:

$$\mathbf{\prod_{s=1}^{T} R(s,t,T,m) = \prod_{s=1}^{T} \left({}_{\frac{s-1}{T},m}Q(t) \right)^{-1} \cdot {}_{\frac{s}{T},m}Q(t) = \left({}_{\frac{0}{T},m}Q(t) \right)^{-1} \cdot {}_{\frac{T}{T},m}Q(t) = E^{-1} \cdot Q(t) = Q(t)}$$

Somit existiert eine unterjährliche Markov-Kette

$$\mathbf{Y_0, Y_{1/T}, Y_{2/T}, \ldots, Y_{(T-1)/T}, Y_1, Y_{1+1/T}, \ldots, Y_{1+(T-1)/T}, Y_2, Y_{2+1/T}, \ldots}$$

mit der Anfangsverteilung $\mathbf{P_0}$ und den unterjährlichen Übergangsmatrizen $\mathbf{R(s,t,T,m) = (r_{i,j}(s,t,T,m))}$, d.h.

$$\mathbf{P\left(Y_{t-1+s/T} = k \,\middle|\, Y_{t-1+s/T-1/T} = l \right) = r_{l,k}(s,t,T,m)}$$

für alle $\mathbf{l, k \in \{0,1,2,...,N\}}$, $\mathbf{s = 1, 2, \ldots, T}$ und $\mathbf{t = 1, 2, \ldots}$.

6. Bewertete inhomogene Markov-Ketten

Es seien wie im letzten Kapitel $\mathbf{T} \in \mathbf{IN}$ und $\mathbf{m} \in \mathbf{IN} \cup \{\infty\}$. Gegeben sei ferner die im letzten Kapitel konstruierte unterjährliche Markov-Kette $\left(\mathbf{Y}_{t-1+(s-1)/T}\right)_{t=1,2,\ldots,\, s=1,\ldots,T}$. Für diesen stochastischen Prozess wird nun durch die Spaltenvektoren

$$\mathbf{L}_{t-1+(s-1)/T} = \left(\mathbf{L}_{t-1+(s-1)/T,j}\right)_{j=0,1,2,\ldots,N}, \quad \mathbf{t = 1,2,\ldots}, \quad \mathbf{s = 1,2,\ldots,T},$$

eine Bewertung definiert, d.h. jeder Kombination aus Zustand $\mathbf{j = 0,1,2,\ldots,N}$ und Zeitpunkt $\mathbf{t - 1 + (s-1)/T}$, $\mathbf{t = 1,2,\ldots}$, $\mathbf{s = 1,2,\ldots,T}$, wird eine reelle Zahl zugeordnet. Der stochastische Prozess $\left(\mathbf{Y}_{t-1+(s-1)/T}\right)_{t=1,2,\ldots,\, s=1,\ldots,T}$ wird dann als bewertete inhomogene Markov-Kette bezeichnet.

Der Barwert der Bewertung für die ersten $\mathbf{n}$ Jahre, wird durch

$$\mathbf{B_0(T,n)} := \sum_{t=1}^{n} \sum_{s=1}^{T} \sum_{j=0}^{N} \mathbf{1}_{\left\{Y_{t-1+(s-1)/T}=j\right\}} \cdot \mathbf{v}^{t-1} \cdot \mathbf{v(s-1)} \cdot \mathbf{L}_{t-1+(s-1)/T,j}$$

definiert.

Dabei sei $\mathbf{v}$ der Diskontierungsfaktor für ein Jahr gegeben durch $\mathbf{v} = \frac{1}{1+r}$ und $\mathbf{r > 0}$ der zeitlich konstante Rechnungszins pro Jahr. Ferner sei $\mathbf{v(s-1)}$ der Diskontierungsfaktor für das unterjährliche Intervall $\left(\mathbf{t, t + \frac{s-1}{T}}\right)$. Für den unterjährlichen Diskontierungsfaktor gibt es die unterschiedlichsten Ansätze. Die beiden Gebräuchlichsten sind die lineare Verzinsung, d.h.

$$\mathbf{v(s)} = \frac{1}{1 + \frac{s-1}{T} \cdot r},$$

und die exponentielle Verzinsung, d.h.

$$\mathbf{v(s)} = \frac{1}{(1+r)^{\frac{s-1}{T}}}.$$

Der lineare Ansatz führt in Kombination mit der jährlichen Verzinsung mit Zinseszins zur relativ gemischten Verzinsung, der exponentielle Ansatz zur konformen Verzinsung (vgl. [1]).

Wir betrachten nun die charakteristische Funktion der Zufallsvariable $\mathbf{B_0(T,n)}$ und führen dafür die folgende Notation ein:

$$\varphi(x,T,n,m) := E(\exp(i \cdot x \cdot B_0(T,n))) \text{ , } x \in IR$$

Dabei sei $\mathbf{i} = \sqrt{-1}$ die imaginäre Einheit. Es gilt der folgende Hauptsatz:

Hauptsatz:

Die Matrix $\mathbf{V(s-1,t-1,x)}$ sei für $\mathbf{t = 1,2,\ldots}$, $\mathbf{s = 1,\ldots,T}$ und $\mathbf{x \in IR}$ definiert als (N+1)x(N+1)-Diagonalmatrix mit den Diagonalelementen

$$\exp\left(i \cdot x \cdot v^{t-1} \cdot v(s-1) \cdot L_{t-1+{(s-1)}/{T},j} \right),\ j = 0,1,2,\ldots,N .$$

Dann gilt für alle $\mathbf{x \in IR}$, $\mathbf{n \in IN}$, $\mathbf{T \in IN}$ und $\mathbf{m \in IN \cup \{\infty\}}$:

$$\varphi(x,T,n,m) = E(\exp(i \cdot x \cdot B_0(T,n))) = \sum_{j=0}^{N} \left(\begin{array}{l} P_0 \cdot \prod_{t=1}^{n-1} \prod_{s=1}^{T} \left(V(s-1,t-1,x) \cdot R(s,t,T,m) \right) \cdot \\ \prod_{s=1}^{T-1} \left(V(s-1,n-1,x) \cdot R(s,n,T,m) \right) \cdot V(T-1,n-1,x) \end{array} \right)_j$$

Dabei sind die unterjährlichen Übergangsmatrizen gemäß letztem Kapitel gegeben durch $\mathbf{R(s,t,T,m)} = \left({}_{\frac{s-1}{T},m}Q(t) \right)^{-1} \cdot {}_{\frac{s}{T},m}Q(t)$.

Für den Beweis wird das folgende elementare Ergebnis der Matrizenrechnung benötigt.

Hilfssatz:

Es seien gegeben die (N+1)x(N+1)-Matrizen $\mathbf{A(t)} = \left(a_{jk}(t)\right)_{j,k\in\{0,1,\ldots,N\}}$, $\mathbf{t = 1,2,3,\ldots}$ und der Vektor $\mathbf{z} = \left(z_0 \quad z_1 \quad \cdots \quad z_N\right)$.

Für $\mathbf{n \in \{2,3,\ldots\}}$ gilt: $\left(z \cdot \prod_{t=1}^{n-1} A(t) \right)_{l_n} = \sum_{l_1,\ldots,l_{n-1}=0}^{N} z_{l_1} \cdot \prod_{t=1}^{n-1} a_{l_k l_{k+1}}(t)$.

Beweis: Induktion nach $\mathbf{n}$

$\mathbf{n=2:}$

$$\left(\mathbf{z}\cdot\prod_{t=1}^{2-1}\mathbf{A(t)}\right)_{l_2}=\left(\mathbf{z}\cdot\mathbf{A(1)}\right)_{l_2}=\left(\begin{pmatrix}z_0 & z_1 & \cdots & z_N\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a_{00}(1) & \cdots & a_{0N}(1)\\ \vdots & & \vdots\\ a_{N0}(1) & \cdots & a_{NN}(1)\end{pmatrix}\right)_{l_1}=\sum_{l_1=0}^{N} z_{l_1}\cdot a_{l_1 l_2}(1)$$

$\mathbf{n\to n+1:}$

$$\left(\mathbf{z}\cdot\prod_{t=1}^{n}\mathbf{A(t)}\right)_{l_{n+1}}=\left(\mathbf{z}\cdot\prod_{t=1}^{n-1}\mathbf{A(t)}\cdot\mathbf{A(n)}\right)_{l_{n+1}}=\sum_{l_n=0}^{N}\left(\mathbf{z}\cdot\prod_{t=1}^{n-1}\mathbf{A(t)}\right)_{l_n}\cdot a_{l_n l_{n+1}}(n+1)=$$

$$=\sum_{l_n=0}^{N}\sum_{l_1,\ldots,l_{n-1}=0}^{N} z_{l_1}\cdot\prod_{t=1}^{n-1}a_{l_k l_{k+1}}(t)\cdot a_{l_n l_{n+1}}(n+1)=\sum_{l_1,\ldots,l_{n-1},l_n=0}^{N} z_{l_1}\cdot\prod_{t=1}^{n}a_{l_k l_{k+1}}(t)\cdot$$

□

Beweis des Hauptsatzes:

Im Fall $\mathbf{n\cdot T=1}$, d.h. $\mathbf{n=1}$ und $\mathbf{T=1}$, ist die Behauptung trivialerweise erfüllt. Es sei also $\mathbf{n\cdot T>1}$. Zunächst wird die Menge relevanten unterjährlichen Zeitpunkte durchnummeriert, d.h. wir betrachten statt der Parametrisierung $\left\{\mathbf{t-1+\frac{s-1}{T}}\,\middle|\,\mathbf{t=1,2,\ldots,n;s=1,\ldots T}\right\}$ als Menge der Zeitpunkte $\{\mathbf{1,2,\ldots,n\cdot T-1,n\cdot T}\}$.

Gibt man den Zeitpunkt in der durchnummerierten Variante an, so lässt sich wie folgt die parametrisierte Darstellung berechnen:

Es sei $\mathbf{k\in\{1,2,\ldots,n\cdot T-1,n\cdot T\}}$, dann entspricht dies $\mathbf{t(k)-1+\frac{s(k)-1}{T}}$ mit $\mathbf{t(k)=\left[\frac{k-1}{T}\right]+1}$ und $\mathbf{s(k)=\left(\frac{k-1}{T}-\left[\frac{k-1}{T}\right]\right)\cdot T+1}$.

Damit werden folgende Notationen eingeführt:

$\mathbf{Z_k := Y_{t(k)-1+(s(k)-1)/T}}$ (Markov-Kette)

$\mathbf{\tilde{Q}(k) := R(s(k),t(k),T,m)}$ (Übergangswahrscheinlichkeiten)

$\mathbf{\tilde{L}_k := L_{t(k)-1+(s(k)-1)/T}}$ (Bewertung)

$\mathbf{w(k) := v^{t(k)-1}\cdot v(s(k)-1)}$ (Abzinsungsfaktoren)

$\mathbf{\tilde{V}(k,x) := V(s(k)-1,t(k)-1,x)}$

$$\varphi(x,T,n,m) := E(\exp(i\cdot x\cdot B_0(T,n))) =$$

$$= E\left(\exp\left(i\cdot x\cdot\sum_{t=1}^{n}\sum_{s=1}^{T}\sum_{j=0}^{N}1_{\left\{Y_{t-1+(s-1)/T}=j\right\}}\cdot v^{t-1}\cdot v(s-1)\cdot L_{t-1+(s-1)/T,j}\right)\right) =$$

$$= E\left(\exp\left(i\cdot x\cdot\sum_{k=1}^{n\cdot T}\sum_{j=0}^{N}1_{\{Z_k=j\}}\cdot w(k)\cdot\tilde{L}_{k,j}\right)\right) =$$

$$= \sum_{l_1,l_2,\ldots,l_{n\cdot T}=0}^{N}\exp\left(i\cdot x\cdot\sum_{k=1}^{n\cdot T}w(k)\cdot\tilde{L}_{k,l_k}\right)\cdot P\left(Z_1=l_1,Z_2=l_2,\ldots,Z_{n\cdot T}=l_{n\cdot T}\right) =$$

$$= \sum_{l_1,l_2,\ldots,l_{n\cdot T}=0}^{N}\prod_{k=1}^{n\cdot T}\exp\left(i\cdot x\cdot w(k)\cdot\tilde{L}_{k,l_k}\right)\cdot P_{0,l_1}\cdot\prod_{k=1}^{n\cdot T-1}\tilde{q}_{l_k l_{k+1}}(k) =$$

$$= \sum_{l_1,l_2,\ldots,l_{n\cdot T}=0}^{N}P_{0,l_1}\cdot\prod_{k=1}^{n\cdot T-1}\left(\exp\left(i\cdot x\cdot w(k)\cdot\tilde{L}_{k,l_k}\right)\cdot\tilde{q}_{l_k l_{k+1}}(k)\right)\cdot\exp\left(i\cdot x\cdot w(n\cdot T)\cdot\tilde{L}_{n\cdot T,l_{n\cdot T}}\right) =$$

$$= \sum_{l_1,l_2,\ldots,l_{n\cdot T}=0}^{N}P_{0,l_1}\cdot\prod_{k=1}^{n\cdot T-1}\left(\tilde{V}(k,x)\cdot\tilde{Q}(k)\right)_{l_k l_{k+1}}\cdot\tilde{V}(n\cdot T,x)_{l_{n\cdot T}l_{n\cdot T}} =$$

$$= \sum_{l_{n\cdot T}=0}^{N}\sum_{l_1,l_2,\ldots,l_{n\cdot T-1}=0}^{N}P_{0,l_1}\cdot\prod_{k=1}^{n\cdot T-1}\left(\tilde{V}(k,x)\cdot\tilde{Q}(k)\right)_{l_k l_{k+1}}\cdot\tilde{V}(n\cdot T,x)_{l_{n\cdot T}l_{n\cdot T}} =$$

$$= \sum_{l_{n\cdot T}=0}^{N}\left(P_0\cdot\prod_{k=1}^{n\cdot T-1}\left(\tilde{V}(k,x)\cdot\tilde{Q}(k)\right)\right)_{l_{n\cdot T}}\cdot\tilde{V}(n\cdot T,x)_{l_{n\cdot T}l_{n\cdot T}} =$$

$$= \sum_{l_{n\cdot T}=0}^{N}\left(P_0\cdot\prod_{k=1}^{n\cdot T-1}\left(\tilde{V}(k,x)\cdot\tilde{Q}(k)\right)\cdot\tilde{V}(n\cdot T,x)\right)_{l_{n\cdot T}} =$$

$$= \sum_{l_{n\cdot T}=0}^{N}\begin{pmatrix}P_0\cdot\prod_{t=1}^{n-1}\prod_{s=1}^{T}\left(V(s-1,t-1,x)\cdot R(s,t,T,m)\right)\cdot\\ \prod_{s=1}^{T-1}\left(V(s-1,n-1,x)\cdot R(s,n,T,m)\right)\cdot V(T-1,n-1,x)\end{pmatrix}_{l_{n\cdot T}}$$

□

Mithilfe des Hauptsatzes lassen sich Folgerungen für die momentenerzeugende Funktion und den Erwartungswert der beschränkten Zufallsvariablen $\mathbf{B_0(T,n)}$ formulieren.

Folgerung 1:

Es sei seien $\mathbf{u} \in \mathbf{IR}$, $\mathbf{n} \in \mathbf{IN}$, $\mathbf{T} \in \mathbf{IN}$ und $\mathbf{m} \in \mathbf{IN} \cup \{\infty\}$. Für die momentenerzeugende Funktion der Zufallsvariablen $\mathbf{B_0(T,n)}$ gilt mit den Notationen des Hauptsatzes:

$$\mathbf{M(u,T,n,m) := E(\exp(u \cdot B_0(T,n)))}$$
$$\mathbf{= \sum_{j=0}^{N} \left(\begin{array}{l} P_0 \cdot \prod_{t=1}^{n-1} \prod_{s=1}^{T} (V(s-1,t-1,-i \cdot u) \cdot R(s,t,T,m)) \cdot \\ \prod_{s=1}^{T-1} (V(s-1,n-1,-i \cdot u) \cdot R(s,n,T,m)) \cdot V(T-1,n-1,-i \cdot u) \end{array} \right)_j}$$

Beweis:

Wegen der Beschränktheit von $\mathbf{B_0(T,n)}$ existiert die Funktion $\mathbf{M(u,T,n,m)}$ für alle $\mathbf{u} \in \mathbf{IR}$. Der Beweis der Behauptung erfolgt analog zum Beweis des Hauptsatzes. Weitet man den Definitionsbereich der charakteristischen Funktion auf die komplexen Zahlen aus, so folgt die Behauptung aus $\mathbf{M(u,T,n,m) = \varphi(-i \cdot u,T,n,m)}$.

□

Folgerung 2:

Es seien $\mathbf{u} \in \mathbf{IR}$, $\mathbf{n} \in \mathbf{IN}$, $\mathbf{T} \in \mathbf{IN}$ und $\mathbf{m} \in \mathbf{IN} \cup \{\infty\}$. Für den Erwartungswert der Zufallsvariablen $\mathbf{B_0(T,n)}$ gilt:

$$\mathbf{E(B_0(T,n)) = \sum_{t=1}^{n} \sum_{s=1}^{T} v^{t-1} \cdot v(s-1) \cdot P_0 \cdot \prod_{k=1}^{t-1} Q(k) \cdot_{\frac{s-1}{T},m} Q(t) \cdot L_{t-1+(s-1)/T}}$$

Beweis:

Mit den Notationen aus dem Beweis des Hauptsatzes gilt:

$$\mathbf{M(u,T,n,m) = \sum_{l_1,l_2,\ldots,l_{n\cdot T}=0}^{N} \prod_{k=1}^{n\cdot T} \exp(u \cdot w(k) \cdot \tilde{L}_{k,l_k}) \cdot P_{0,l_1} \cdot \prod_{k=1}^{n\cdot T-1} \tilde{q}_{l_k l_{k+1}}(t)}$$

Damit folgt:

$$\mathbf{E}\left(\mathbf{B_0(T,n)}\right)=\mathbf{M'}\left(\mathbf{0,T,n,m}\right)=$$

$$=\sum_{l_1,l_2,\ldots,l_{n\cdot T}=0}^{N}P_{0,l_1}\cdot\prod_{k=1}^{n\cdot T-1}\tilde{q}_{l_k l_{k+1}}(k)\cdot\left(\sum_{j=1}^{n\cdot T}w(j)\cdot\tilde{L}_{j,l_j}\cdot\prod_{k=1}^{n\cdot T}\exp\left(u\cdot w(k)\cdot\tilde{L}_{k,l_k}\right)\right)\Bigg|_{u=0}=$$

$$=\sum_{l_1,l_2,\ldots,l_{n\cdot T}=0}^{N}P_{0,l_1}\cdot\prod_{k=1}^{n\cdot T-1}\tilde{q}_{l_k l_{k+1}}(k)\cdot\sum_{j=1}^{n\cdot T}w(j)\cdot\tilde{L}_{j,l_j}=\sum_{j=1}^{n\cdot T}w(j)\cdot\sum_{l_1,l_2,\ldots,l_{n\cdot T}=0}^{N}P_{0,l_1}\cdot\tilde{L}_{j,l_j}\cdot\prod_{k=1}^{n\cdot T-1}\tilde{q}_{l_k l_{k+1}}(k)=$$

$$=\sum_{j=1}^{n\cdot T}w(j)\cdot\sum_{l_1,l_2,\ldots,l_j=0}^{N}P_{0,l_1}\cdot\prod_{k=1}^{j-1}\tilde{q}_{l_k l_{k+1}}(k)\cdot\tilde{L}_{j,l_j}\cdot\sum_{l_{j+1},\ldots,l_{n\cdot T}=0}^{N}\prod_{k=j}^{n\cdot T-1}\tilde{q}_{l_k l_{k+1}}(k)=$$

$$=\sum_{j=1}^{n\cdot T}w(j)\cdot\sum_{l_1,l_2,\ldots,l_j=0}^{N}P_{0,l_1}\cdot\prod_{k=1}^{j-1}\tilde{q}_{l_k l_{k+1}}(k)\cdot\tilde{L}_{j,l_j}\cdot\sum_{l_{n\cdot T}=0}^{N}\left(\prod_{k=j}^{n\cdot T-1}\tilde{Q}(k)\right)_{l_j l_{n\cdot T}}=$$

$$=\sum_{j=1}^{n\cdot T}w(j)\cdot\sum_{l_1,l_2,\ldots,l_j=0}^{N}P_{0,l_1}\cdot\prod_{k=1}^{j-1}\tilde{q}_{l_k l_{k+1}}(k)\cdot\tilde{L}_{j,l_j}\cdot 1=\sum_{j=1}^{n\cdot T}w(j)\cdot P_0\cdot\prod_{k=1}^{j-1}\tilde{Q}(k)\cdot\tilde{L}_j=$$

$$=\sum_{t=1}^{n}\sum_{s=1}^{T}v^{t-1}\cdot v(s-1)\cdot P_0\cdot\prod_{k=1}^{t-1}\prod_{j=1}^{T-1}R(j,k,T,m)\cdot\prod_{j=1}^{s-1}R(j,t,T,m)\cdot L_{t-1+(s-1)/T}=$$

$$=\sum_{t=1}^{n}\sum_{s=1}^{T}v^{t-1}\cdot v(s-1)\cdot P_0\cdot\prod_{k=1}^{t-1}Q(k)\cdot\left({}_{0,m}Q(t)\right)^{-1}\cdot{}_{\frac{s-1}{T},m}Q(t)\cdot L_{t-1+(s-1)/T}=$$

$$=\sum_{t=1}^{n}\sum_{s=1}^{T}v^{t-1}\cdot v(s-1)\cdot P_0\cdot\prod_{k=1}^{t-1}Q(k)\cdot{}_{\frac{s-1}{T},m}Q(t)\cdot L_{t-1+(s-1)/T}$$

□

Bemerkungen:

a) Durch Ableiten der momentenerzeugende Funktion können auch höhere Momente berechnet werden. Allgemein gilt

$$\mathbf{E}\left(\left(\mathbf{B_0(T,n)}\right)^k\right)=\mathbf{M}^{(k)}\left(\mathbf{0,T,n,m}\right).$$

In konkreten Anwendungen können daher mithilfe der numerischen Ableitung höhere Momente EDV-technisch berechnet werden. Dies gilt insbesondere für die Varianz bzw. die Standardabweichung ([10], [11]).

b) Wählt man eine andere als die hier vorgestellten unterjährlichen Verteilungen der jährlichen Übergangswahrscheinlichkeiten, so müssen für die Gültigkeit des Hauptsatzes zum einen die Produkte der unterjährlichen Übergangsmatrizen die entsprechenden jährlichen Übergangsmatrizen ergeben und zum anderen Bedingungen analog zu (B1) und (B2) erfüllt sein.

7. Fallbeispiel 1: Kreditausfall

Wir betrachten das folgende einfache Beispiel: Eine Bank hat an ein Unternehmen einen Kredit vergeben. Der Kreditbetrag inklusive Zinsen wird über einen Zeitraum von 5 Jahren mit jährlichen Zahlungen in Höhe von 10.000 Geldeinheiten zurückgezahlt. Die Bank geht davon aus, dass das Risiko eines Kreditausfalls pro Jahr bei einem Prozent liegt. Dabei wird angenommen, dass die Zahlungen nach einem Ausfall nicht wieder aufgenommen werden. Berechnet man den erwarteten Barwert der Zahlungen und geht man von einer Zahlung pro Jahr aus, so muss man zwischen der vorschüssigen und der nachschüssigen Zahlweise unterscheiden. Den folgenden Berechnungen wird ein Jahreszins von 3% zugrunde gelegt. Bei der jährlich vorschüssigen Zahlweise ergibt sich als erwarteter Barwert:

$$\mathbf{10.000 \cdot \left(1 + 1{,}03^{-1} \cdot 0{,}99 + 1{,}03^{-2} \cdot 0{,}98 + 1{,}03^{-3} \cdot 0{,}97 + 1{,}03^{-4} \cdot 0{,}96\right) = 46.255{,}44}$$

Geht man von der jährlich nachschüssigen Zahlweise aus, so erhält man als erwarteten Barwert der Zahlungen:

$$\mathbf{10.000 \cdot \left(1{,}03^{-1} \cdot 0{,}99 + 1{,}03^{-2} \cdot 0{,}98 + 1{,}03^{-3} \cdot 0{,}97 + 1{,}03^{-4} \cdot 0{,}96 + 1{,}03^{-5} \cdot 0{,}95\right) = 44.050{,}22}$$

Dieser Sachverhalt wird nun als Markov-Kette modelliert. Als Zustandsraum wird die Menge $\mathbf{S = \{0,1\}}$ gewählt, wobei $\mathbf{0}$ für den Zustand „kein Ausfall“ und $\mathbf{1}$ für den Zustand „Ausfall“ steht. Es wird eine einjährige Ausfallwahrscheinlichkeit von 1% unterstellt. Die jährlichen Übergangsmatrizen sind dann gegeben durch

$$\mathbf{Q(t) = \begin{pmatrix} 1 - q_t & q_t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

mit $\mathbf{q_1 = 0{,}01}$, $\mathbf{q_2 = \frac{0{,}01}{0{,}99}}$, $\mathbf{q_3 = \frac{0{,}01}{0{,}98}}$ $\mathbf{q_4 = \frac{0{,}01}{0{,}97}}$ $\mathbf{q_5 = \frac{0{,}01}{0{,}96}}$.

Damit ergibt sich z.B. als Wahrscheinlichkeit, dass die Zahlung zu Beginn des vierten/zum Ende des dritten Jahres erfolgt

$$\mathbf{\prod_{j=1}^{3} \left(1 - q_j\right) = (1 - 0{,}01) \cdot \left(1 - \frac{0{,}01}{0{,}99}\right) \cdot \left(1 - \frac{0{,}01}{0{,}98}\right) = 0{,}99 \cdot \frac{0{,}98}{0{,}99} \cdot \frac{0{,}97}{0{,}98} = 0{,}97}\,.$$

Üblicherweise werden Kredite mit unterjährlichen, z.B. monatlichen oder quartalsweisen Zahlungen bedient. Als Zinsmodell wird in diesem Beispiel die konforme Verzinsung verwendet.

Es sei $\mathbf{m \in \mathrm{IN} \cup \{\infty\}}$ der Parameter zur Modellierung der unterjährlichen Übergangsmatrizen. Analog zu den Beispielen in Kapitel 3 gilt für $\mathbf{s \in \{0,1,\ldots,12\}}$

$$_{s/12,m}Q(t) := \sum_{u=0}^{m} \binom{s/12}{u} \cdot (Q(t)-E)^u = E + \sum_{u=1}^{m} \binom{s/12}{u} \cdot (-1)^u \cdot q_t^u \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_{u=0}^{m} \binom{s/12}{u} \cdot (-1)^u \cdot q_t^u & 1 - \sum_{u=0}^{m} \binom{s/12}{u} \cdot (-1)^u \cdot q_t^u \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

bzw.

$$_{s/12,\infty}Q(t) := \sum_{u=0}^{\infty} \binom{s/12}{u} \cdot (Q(t)-E)^u = E + \sum_{u=1}^{\infty} \binom{s/12}{u} \cdot (-1)^u \cdot q_t^u \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_{u=0}^{\infty} \binom{s/12}{u} \cdot (-1)^u \cdot q_t^u & 1 - \sum_{u=0}^{\infty} \binom{s/12}{u} \cdot (-1)^u \cdot q_t^u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-q_t)^{\frac{s}{12}} & 1-(1-q_t)^{\frac{s}{12}} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Setzt man voraus, dass die Bedingungen (B1) und (B2) erfüllt sind, so lässt sich gemäß Kapitel 4 der Fall der monatlich vorschüssigen Zahlweise als unterjährliche Markov-Kette modellieren. Dabei sei $n = 5$ und $T = 12$.

Mit den Ergebnissen aus Kapitel 6, d.h. durch (numerisches) Ableiten der dort definierten momentenerzeugenden Funktion, können die Momente der Zufallsvariablen „Barwert der Zahlungen“ berechnet werden.

Verwendet man die üblichen numerischen Ableitungen (vgl. [15] S.43ff), so ergibt sich:

$$E(B_0(T,n)) = M_x(x,T,n,m)\big|_{x=0} \approx \frac{M(h,T,n,m) - M(-h,T,n,m)}{2 \cdot h}$$

und

$$E\left((B_0(T,n))^2\right) = M_{xx}(x,T,n,m)\big|_{x=0} \approx \frac{M(h,T,n,m) + M(-h,T,n,m) - 2 \cdot M(0,T,n,m)}{h^2} =$$

$$= \frac{M(h,T,n,m) + M(-h,T,n,m) - 2}{h^2}$$

bzw.

$$\sqrt{Var(B_0(T,n))} = \sqrt{E\left((B_0(T,n))^2\right) - \left(E(B_0(T,n))\right)^2} =$$

$$= \sqrt{M_{xx}(x,T,n,m)\big|_{x=0} - \left(M_x(x,T,n,m)\big|_{x=0}\right)^2} \approx$$

$$\approx \sqrt{\frac{M(h,T,n,m) + M(-h,T,n,m) - 2}{h^2} - \left(\frac{M(h,T,n,m) - M(-h,T,n,m)}{2 \cdot h}\right)^2} .$$

Dabei wird im vorliegenden Beispiel $h = 10^{-9}$ gewählt.

Die EDV-technischen Umsetzung (inklusive der Überprüfung der Bedingungen (B1) und (B2)) liefert für den Erwartungswert und die Standardabweichung der Zufallsvariablen „Barwert der Zahlungen“ folgende Ergebnisse:

m	Erwartungswert der Zufallsvariablen „Barwert der Zahlungen“	Standardabweichung der Zufallsvariablen „Barwert der Zahlungen“	Bedingung (B1) und Bedingung (B2) erfüllt
1	45.422,496598≈ 45.422	5.712,498668 ≈ 5.712	Ja
2	45.422,104259≈ 45.422	5.713,995287 ≈ 5.714	Ja
3	45.422,102256≈ 45.422	5.714,195793 ≈ 5.714	Ja
5	45.422,102243≈ 45.422	5.714,176465 ≈ 5.714	Ja
10	45.422,102243≈ 45.422	5.713,855873 ≈ 5.714	Ja
50	45.422,102243≈ 45.422	5.713,855873 ≈ 5.714	Ja
∞	45.422,102243≈ 45.422	5.713,982169 ≈ 5.714	Ja

Im vorliegenden Beispiel ist es somit vollkommen ausreichend, das unterjährliche Modell basierend auf $\mathbf{m=1}$ zu definieren.

8. Fallbeispiel 2: Betriebliche Altersversorgung

Als zweites Beispiel betrachten wir eine einfache Zusage auf betriebliche Altersversorgung. Diese Anwendung setzt das Fallbeispiel zur Pensionsversicherungsmathematik aus [11] fort.

Das Schicksal einer Person wird mithilfe einer inhomogenen Markov-Kette auf Basis der in Deutschland in der Pensionsversicherungsmathematik üblicherweise verwendeten Sterbetafeln – auch Richttafeln genannt – (vgl. [4]) modelliert. Mögliche Zustände sind dabei „Arbeitnehmer/in aktiv“, „Arbeitnehmer/in ausgeschieden“, „Bezieher/in einer Invalidenrente“, „Bezieher/in einer Altersrente“ und „Bezieher/in einer Hinterbliebenenrente“. Die Übergangswahrscheinlichkeiten der Markov-Kette ergeben sich aus den biometrischen Rechnungsgrundlagen der Richttafeln. Dabei handelt es sich um eine Generationentafel, d.h. die Wahrscheinlichkeiten hängen nicht nur von Geschlecht und Alter, sondern auch vom Geburtsjahrgang ab (vgl. [4]). Die unterjährlichen Übergänge werden mithilfe der in Kapitel 3 definierten Partialsummen modelliert. Analog zum Fallbeispiel Pensionsversicherungsmathematik aus [11] werden davon abweichend die Wahrscheinlichkeiten für den Übergang in den Zustand „Bezieher/in von Altersrente“ nicht unterjährlich verteilt, sondern es wird davon ausgegangen, dass der Übergang exakt im Endalter erfolgt. Dies entspricht der Modellierung im Modell der Richttafeln.

Die Pensionszusage und die Berechnungsparameter seien wie folgt gegeben: Als Alters- und Invalidenrente werden monatlich 100 €, als Hinterbliebenenrente monatlich 60 € zugesagt. Die Zahlweise sei monatlich vorschüssig, der Rechnungszins 3%. Der Bewertungsstichtag sei der 31.12.2017 und alternativ der 31.12.2015 (vgl. [11]). Als Zinsmodell wird die relativ gemischte Verzinsung verwendet. Das Endalter (Übergang in den Zustand „Bezieher/in einer Altersrente“) wird mit dem Alter 67 angesetzt. Der Einfachheit halber wird die Bewertung ohne Dynamik und ohne Fluktuation durchgeführt. Letzteres hat zu Folge, dass der Zustand „Arbeitnehmer/in ausgeschieden“ nicht relevant ist. Der Bestand ist wie folgt strukturiert:

- Zehn Personen
- Vier aktive Arbeitnehmer
- Sechs Rentenbezieher: zwei Invalidenrentner, zwei Altersrentner und zwei Hinterbliebenenrentner
- Fünf Frauen und fünf Männer

Jede Person wird einzeln bewertet, d.h. für jede Person werden der Erwartungswert und die Varianz der Zufallsvariable „Barwert der Verpflichtungen“ ermittelt. Die Berechnungen erfolgen durch (numerisches) Ableiten der zugehörigen momentenerzeugenden Funktion mit $\mathbf{h} = \mathbf{10}^{-6}$. Analog zum ersten Fallbeispiel muss auch hier bei jeder Bewertung die Gültigkeit der Bedingungen (B1) und (B2) überprüft werden.

Da der Erwartungswert als stochastische Kennzahl linear ist, ergibt sich der erwartete Barwert der Verpflichtungen bezogen auf den Bestand durch Addition der Einzelwerte. Setzt man die Unabhängigkeit der personenbezogenen Barwerte voraus, so berechnet sich die Varianz des Barwerts der Verpflichtungen bezogen auf den Bestand ebenfalls durch Addition der Einzelwerte. Die Standardabweichung erhält man als Wurzel aus der Varianz.

Die EDV-technische Umsetzung liefert die folgenden Ergebnisse. Dabei sei $\mathbf{m}$ der Parameter für die Modellierung der unterjährlichen Übergangsmatrizen mithilfe der Partialsummen. Zusätzlich zu den Berechnungsergebnissen werden in den Tabellen zu Vergleichszwecken die Bewertungen nach den Richttafeln aufführt.

Stichtag 31.12.2017

Methode/Modell	Erwartungswert „Barwert der Verpflichtungen“	Prozentuale Abweichung von der Richttafeln-Bewertung	Standardabweichung „Barwert der Verpflichtungen“
Richttafel-Bewertung	144.887,28		
Bewertete Markov-Kette mit $\mathbf{m}=\mathbf{1}$	144.887,30	0,0000%	15.857,83
Bewertete Markov-Kette mit $\mathbf{m}=\mathbf{2}$	144.857,68	-0,0204%	15.854,87
Bewertete Markov-Kette mit $\mathbf{m}=\mathbf{3}$	144.855,16	-0,0222%	15.854,38
Bewertete Markov-Kette mit $\mathbf{m}=\mathbf{5}$	144.854,74	-0,0225%	15.854,27
Bewertete Markov-Kette mit $\mathbf{m}=\mathbf{10}$	144.854,70	-0,0225%	15.854,26
Bewertete Markov-Kette mit $\mathbf{m}=\mathbf{50}$	144.854,66	-0,0225%	15.854,24

Stichtag 31.12.2015

Methode/Modell	Erwartungswert „Barwert der Verpflichtungen“	Prozentuale Abweichung von der Richttafeln-Bewertung	Standardabweichung „Barwert der Verpflichtungen“
Richttafel-Bewertung	146.326,56		
Bewertete Markov-Kette mit $\mathbf{m=1}$	146.328,70	0,0015%	15.914,16
Bewertete Markov-Kette mit $\mathbf{m=2}$	146.300,24	-0,0180%	15.911,31
Bewertete Markov-Kette mit $\mathbf{m=3}$	146.299,19	-0,0187%	15.910,86
Bewertete Markov-Kette mit $\mathbf{m=5}$	146.298,83	-0,0190%	15.910,76
Bewertete Markov-Kette mit $\mathbf{m=10}$	146.298,79	-0,0190%	15.910,75
Bewertete Markov-Kette mit $\mathbf{m=50}$	146.298,76	-0,0190%	15.910,73

Somit stimmen in diesem Beispiel bei beiden Stichtagen der Erwartungswert auf Basis einer bewerteten inhomogenen Markov-Kette mit $\mathbf{m=1}$ und die übliche Richttafel-Bewertung bis auf eine minimale Abweichung überein. Für größere $\mathbf{m}$ verringert sich zwar der Erwartungswert der Zufallsvariablen „Barwert der Verpflichtungen“, jedoch ist der Unterschied zur üblichen Bewertung nur von geringer wirtschaftlicher Bedeutung. Auch die Veränderung der Standardabweichung ist mit zunehmenden $\mathbf{m}$ nicht gravierend. Auch in diesem Beispiel ist es somit vollkommen ausreichend, das unterjährliche Modell basierend auf $\mathbf{m=1}$ zu definieren.

9. Fazit

Geht man von einer jährlichen inhomogenen Markov-Kette aus, so erscheint zur Definition von unterjährlichen Übergangsmatrizen ein linearer Ansatz am Einfachsten, d.h. die Interpolation der jährlichen Übergangsmatrizen und der Einheitsmatrix. In der vorliegenden Arbeit wird gezeigt, dass diese Methodik verallgemeinert werden kann. Von zentraler Bedeutung ist dabei die Taylorreihe der Potenzfunktion $\mathbf{x} \to \mathbf{x}^{\alpha}$ für $\alpha \in [\mathbf{0,1}]$ bzw. deren Partialsummen.

Durch Einsetzen der Übergangsmatrizen in diese Taylorreihe bzw. diese Partialsummen ergeben sich weitere Möglichkeiten zur Definition unterjährlicher Übergangsmatrizen. Der oben genannte Fall der linearen Interpolation entspricht dann der Verwendung der ersten Partialsumme, d.h. dem Fall dass der Parameter $\mathbf{m}$ den Wert $\mathbf{1}$ annimmt.

In den beiden Beispielen zeigt sich, dass der Fall $\mathbf{m} \geq \mathbf{2}$ EDV-technisch umgesetzt werden kann, dass aber die wirtschaftliche Bedeutung sehr gering ist. Der Barwert der Zahlungsströme verändert sich sowohl bei der Anwendung Kreditausfall als auch bei der Anwendung Betriebliche Altersversorgung nur minimal.

Literaturverzeichnis

[1] *Arrenberg, Jutta* Finanzmathematik, 3. Auflage, De Gruyter Oldenbourg Verlag, Berlin 2015.

[2] *Forster,Otto* Analysis 1, 4. Auflage, Friedrich Vieweg & Sohn Verlagsgesellschaft mbH, Braunschweig 1983.

[3] *Gänssler, Peter; Stute, Winfried* Wahrscheinlichkeitstheorie, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York 1977.

[4] *Heubeck, Klaus* Richttafeln 2005G,Textband und Programm Heurika 2,Verlag: Heubeck-Richttafeln-GmbH, Köln 2005.

[5] *Heuser, Harro* Lehrbuch der Analysis Teil 1, 7. Auflage, B. G. Teubner, Stuttgart 1990.

[6] *Knobloch, Ralf* Bewertung von risikobehafteten Zahlungsströmen mithilfe von Markov-Ketten, In: Forschung am IVW Köln, Band 3/2011, Köln 2012, http://nbn-resolving.de/urn:nbn:de:hbz:832-cos-98 (Stand 01. August 2017).

[7] *Knobloch, Ralf* Ein Konzept zur Berechnung von einfachen Barwerten in der betrieblichen Altersversorgung mithilfe einer Markov-Kette, In: Forschung am IVW Köln, Band 4/2011, Köln 2012, http://nbn-resolving.de/urn:nbn:de:hbz:832-cos-100 (Stand 01. August 2017).

[8] *Knobloch, Ralf* Bewertung von risikobehafteten Zahlungsströmen mithilfe von Markov-Kette bei unterjährlicher Zahlweise, In: Forschung am IVW Köln, Band 6/2012, Köln 2012, http://nbn-resolving.de/urn:nbn:de:hbz:832-cos-204 (Stand 01. August 2017).

[9] *Knobloch, Ralf* Konstruktion einer unterjährlichen Markov-Kette aus einer jährlichen Markov-Kette, In: Forschung am IVW Köln, Band 6/2013, Köln 2013, http://nbn-resolving.de/urn:nbn:de:hbz:832-cos-402 (Stand 01. August 2017).

[10] *Knobloch, Ralf* Momente und charakteristische Funktion des Barwerts einer bewerteten inhomogenen Markov-Kette-Anwendung bei risikobehafteten Zahlungsströmen, In: Forschung am IVW Köln, Band 5/2015, Köln 2015, http://nbn-resolving.de/urn:nbn:de:hbz:832-cos-816 (Stand 01. August 2017).

[11] *Knobloch, Ralf* Bewertete inhomogene Markov-Ketten – Spezielle unterjährliche und zeitstetige Modelle, In: Forschung am ivwKöln, Band 4/2016, Köln 2016, http://nbn-resolving.de/urn:nbn:de:hbz:832-cos4-3416 (Stand 01. August 2017).

[12] *Koller, Michael* Stochastische Modelle in der Lebensversicherung, 2. Auflage, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg 2010.

[13] *Milbrodt, Hartmut; Helbig, Manfred* Mathematische Methoden der Personenversicherung, De Gruyter, Berlin New York 1999.

[14] *Waldmann, Karl-Heinz; Stocker, Ulrike M.* Stochastische Modelle, 2. Auflage, Springer Verlag, Heidelberg 2013.

[15] *Westermann, Thomas* Mathematik für Ingenieure 6. Auflage, ergänzende Kapitel, Springer Verlag, Heidelberg Dordrecht London New York 2011, http://www.home.hs-karlsruhe.de/~weth0002/buecher/mathe/downloads/kap18.pdf (Stand 01. August 2017).

Impressum

Diese Veröffentlichung erscheint im Rahmen der Online-Publikationsreihe „Forschung am **ivw**Köln“. Eine vollständige Übersicht aller bisher erschienenen Publikationen findet sich am Ende dieser Publikation und kann hier abgerufen werden.

Forschung am ivwKöln, 7/2017
ISSN (online) 2192-8479

Ralf Knobloch: Konstruktion einer unterjährlichen Markov-Kette aus einer jährlichen Markov-Kette - Eine Verallgemeinerung des linearen Ansatzes

Köln, Oktober 2017

Schriftleitung / editor's office:

Prof. Dr. Jürgen Strobel

Institut für Versicherungswesen /
Institute for Insurance Studies

Fakultät für Wirtschafts- und Rechtswissenschaften /
Faculty of Business, Economics and Law

Technische Hochschule Köln /
University of Applied Sciences

Gustav Heinemann-Ufer 54
50968 Köln

Tel. +49 221 8275-3270
Fax +49 221 8275-3277
Mail juergen.strobel@th-koeln.de
Web www.th-koeln.de

Kontakt Autor / Contact author:

Prof. Dr. Ralf Knobloch

Schmalenbach Institut für Wirtschaftswissenschaften /
Schmalenbach Institute of Business Administration

Fakultät für Wirtschafts- und Rechtswissenschaften /
Faculty of Business, Economics and Law

Technische Hochschule Köln /
University of Applied Sciences

Gustav Heinemann-Ufer 54
50968 Köln

Mail ralf.knobloch@th-koeln.de

Publikationsreihe „Forschung am ivwKöln“

Die Veröffentlichungen der Online-Publikationsreihe "Forschung am ivwKöln" (ISSN: 2192-8479) werden üblicherweise über Cologne Open Science (Publikationsserver der TH Köln) veröffentlicht. Die Publikationen werden hierdurch über nationale und internationale Bibliothekskataloge, Suchmaschinen sowie andere Nachweisinstrumente erschlossen.

Alle Publikationen sind auch kostenlos abrufbar unter www.ivw-koeln.de.

2017

6/2017	Goecke, Oskar (Hrsg.): Risiko und Resilienz. Proceedings zum 11. FaRis & DAV Symposium am 9. Dezember 2016 in Köln
5/2017	Grundhöfer, Dreuw, Quint, Stegemann: Bewertungsportale - eine neue Qualität der Konsumenteninformation?
4/2017	Heep-Altiner, Mehring, Rohlfs: Bewertung des verfügbaren Kapitals am Beispiel des Datenmodells der „IVW Privat AG“
3/2017	Müller-Peters, Völler: InsurTech Karte ivwKöln 1/2017 - Beiträge zu InsurTechs und Innovation am ivwKöln
2/2017	Heep-Altiner, Müller-Peters, Schimikowski, Schnur (Hrsg.): Big Data für Versicherungen. Proceedings zum 21. Kölner Versicherungssymposium am 3. 11. 2016 in Köln
1/2017	Institut für Versicherungswesen: Forschungsbericht für das Jahr 2016

2016

13/2016	Völler: Erfolgsfaktoren eines Online-Portals für Akademiker
12/2016	Müller-Peters, Gatzert: Todsicher: Die Wahrnehmung und Fehlwahrnehmung von Alltagsrisiken in der Öffentlichkeit (erscheint 2017)
11/2016	Heep-Altiner, Penzel, Rohlfs, Voßmann: Standardformel und weitere Anwendungen am Beispiel des durchgängigen Datenmodells der „IVW Leben AG“
10/2016	Heep-Altiner (Hrsg.): Big Data. Proceedings zum 10. FaRis & DAV Symposium am 10. Juni 2016 in Köln
9/2016	Materne, Pütz, Engling: Die Anforderungen an die Ereignisdefinition des Rückversicherungsvertrags: Eindeutigkeit und Konsistenz mit dem zugrundeliegenden Risiko
8/2016	Rohlfs (Hrsg.): Quantitatives Risikomanagement. Proceedings zum 9. FaRis & DAV Symposium am 4. Dezember 2015 in Köln
7/2016	Eremuk, Heep-Altiner: Internes Modell am Beispiel des durchgängigen Datenmodells der „IVW Privat AG“
6/2016	Heep-Altiner, Rohlfs, Dağoğlu, Pulido, Venter: Berichtspflichten und Prozessanforderungen nach Solvency II
5/2016	Goecke: Collective Defined Contribution Plans - Backtesting based on German capital market data 1955 - 2015
4/2016	Knobloch: Bewertete inhomogene Markov-Ketten - Spezielle unterjährliche und zeitstetige Modelle
3/2016	Völler (Hrsg.): Sozialisiert durch Google, Apple, Amazon, Facebook und Co. – Kundenerwartungen und –erfahrungen in der Assekuranz. Proceedings zum 20. Kölner Versicherungssymposium am 5. November 2015 in Köln
2/2016	Materne (Hrsg.): Jahresbericht 2015 des Forschungsschwerpunkts Rückversicherung
1/2016	Institut für Versicherungswesen: Forschungsbericht für das Jahr 2015

2015

11/2015	Goecke (Hrsg.): Kapitalanlagerisiken: Economic Scenario Generator und Liquiditätsmanagement. Proceedings zum 8. FaRis & DAV Symposium am 12. Juni 2015 in Köln
10/2015	Heep-Altiner, Rohlfs: Standardformel und weitere Anwendungen am Beispiel des durchgängigen Datenmodells der „IVW Privat AG" – Teil 2
9/2015	Goecke: Asset Liability Management in einem selbstfinanzierenden Pensionsfonds
8/2015	Strobel (Hrsg.): Management des Langlebigkeitsrisikos. Proceedings zum 7. FaRis & DAV Symposium am 5.12.2014 in Köln
7/2015	Völler, Wunder: Enterprise 2.0: Konzeption eines Wikis im Sinne des prozessorientierten Wissensmanagements
6/2015	Heep-Altiner, Rohlfs: Standardformel und weitere Anwendungen am Beispiel des durchgängigen Datenmodells der „IVW Privat AG"
5/2015	Knobloch: Momente und charakteristische Funktion des Barwerts einer bewerteten inhomogenen Markov-Kette. Anwendung bei risikobehafteten Zahlungsströmen
4/2015	Heep-Altiner, Rohlfs, Beier: Erneuerbare Energien und ALM eines Versicherungsunternehmens
3/2015	Dolgov: Calibration of Heston's stochastic volatility model to an empirical density using a genetic algorithm
2/2015	Heep-Altiner, Berg: Mikroökonomisches Produktionsmodell für Versicherungen
1/2015	Institut für Versicherungswesen: Forschungsbericht für das Jahr 2014

2014

10/2014	Müller-Peters, Völler (beide Hrsg.): Innovation in der Versicherungswirtschaft
9/2014	Knobloch: Zahlungsströme mit zinsunabhängigem Barwert
8/2014	Heep-Altiner, Münchow, Scuzzarello: Ausgleichsrechnungen mit Gauß Markow Modellen am Beispiel eines fiktiven Stornobestandes
7/2014	Grundhöfer, Röttger, Scherer: Wozu noch Papier? Einstellungen von Studierenden zu E-Books
6/2014	Heep-Altiner, Berg (beide Hrsg.): Katastrophenmodellierung - Naturkatastrophen, Man Made Risiken, Epidemien und mehr. Proceedings zum 6. FaRis & DAV Symposium am 13.06.2014 in Köln
5/2014	Goecke (Hrsg.): Modell und Wirklichkeit. Proceedings zum 5. FaRis & DAV Symposium am 6. Dezember 2013 in Köln
4/2014	Heep-Altiner, Hoos, Krahforst: Fair Value Bewertung von zedierten Reserven
3/2014	Heep-Altiner, Hoos: Vereinfachter Nat Cat Modellierungsansatz zur Rückversicherungsoptimierung
2/2014	Zimmermann: Frauen im Versicherungsvertrieb. Was sagen die Privatkunden dazu?
1/2014	Institut für Versicherungswesen: Forschungsbericht für das Jahr 2013

2013

11/2013 Heep-Altiner: Verlustabsorbierung durch latente Steuern nach Solvency II in der Schadenversicherung, Nr. 11/2013

10/2013 Müller-Peters: Kundenverhalten im Umbruch? Neue Informations- und Abschlusswege in der Kfz-Versicherung, Nr. 10/2013

9/2013 Knobloch: Risikomanagement in der betrieblichen Altersversorgung. Proceedings zum 4. FaRis & DAV-Symposium am 14. Juni 2013

8/2013 Strobel (Hrsg.): Rechnungsgrundlagen und Prämien in der Personen- und Schadenversicherung - Aktuelle Ansätze, Möglichkeiten und Grenzen. Proceedings zum 3. FaRis & DAV Symposium am 7. Dezember 2012

7/2013 Goecke: Sparprozesse mit kollektivem Risikoausgleich - Backtesting

6/2013 Knobloch: Konstruktion einer unterjährlichen Markov-Kette aus einer jährlichen Markov-Kette

5/2013 Heep-Altiner et al. (Hrsg.): Value-Based-Management in Non-Life Insurance

4/2013 Heep-Altiner: Vereinfachtes Formelwerk für den MCEV ohne Renewals in der Schadenversicherung

3/2013 Müller-Peters: Der vernetzte Autofahrer – Akzeptanz und Akzeptanzgrenzen von eCall, Werkstattvernetzung und Mehrwertdiensten im Automobilbereich

2/2013 Maier, Schimikowski (beide Hrsg.): Proceedings zum 6. Diskussionsforum Versicherungsrecht am 25. September 2012 an der FH Köln

1/2013 Institut für Versicherungswesen (Hrsg.): Forschungsbericht für das Jahr 2012

2012

11/2012 Goecke (Hrsg.): Alternative Zinsgarantien in der Lebensversicherung. Proceedings zum 2. FaRis & DAV-Symposiums am 1. Juni 2012

10/2012 Klatt, Schiegl: Quantitative Risikoanalyse und -bewertung technischer Systeme am Beispiel eines medizinischen Gerätes

9/2012 Müller-Peters: Vergleichsportale und Verbraucherwünsche

8/2012 Füllgraf, Völler: Social Media Reifegradmodell für die deutsche Versicherungswirtschaft

7/2012 Völler: Die Social Media Matrix - Orientierung für die Versicherungsbranche

6/2012 Knobloch: Bewertung von risikobehafteten Zahlungsströmen mithilfe von Markov-Ketten bei unterjährlicher Zahlweise

5/2012 Goecke: Sparprozesse mit kollektivem Risikoausgleich - Simulationsrechnungen

4/2012 Günther (Hrsg.): Privat versus Staat - Schussfahrt zur Zwangsversicherung? Tagungsband zum 16. Kölner Versicherungssymposium am 16. Oktober 2011

3/2012 Heep-Altiner/Krause: Der Embedded Value im Vergleich zum ökonomischen Kapital in der Schadenversicherung

2/2012 Heep-Altiner (Hrsg.): Der MCEV in der Lebens- und Schadenversicherung - geeignet für die Unternehmenssteuerung oder nicht? Proceedings zum 1. FaRis & DAV-Symposium am 02.12.2011 in Köln

1/2012 Institut für Versicherungswesen (Hrsg.): Forschungsbericht für das Jahr 2011

2011

5/2011 Reimers-Rawcliffe: Eine Darstellung von Rückversicherungsprogrammen mit Anwendung auf den Kompressionseffekt

4/2011 Knobloch: Ein Konzept zur Berechnung von einfachen Barwerten in der betrieblichen Altersversorgung mithilfe einer Markov-Kette

3/2011 Knobloch: Bewertung von risikobehafteten Zahlungsströmen mithilfe von Markov-Ketten

2/2011 Heep-Altiner: Performanceoptimierung des (Brutto) Neugeschäfts in der Schadenversicherung

1/2011 Goecke: Sparprozesse mit kollektivem Risikoausgleich