Forschung am ivwKöln
Band 4/2018

Die Pfade einer bewerteten inhomogenen Markov-Kette - Fallbeispiele aus der betrieblichen Altersversorgung

Ralf Knobloch

ivwKöln
Institut für Versicherungswesen

Fakultät für Wirtschafts-
und Rechtswissenschaften

Technology
Arts Sciences
TH Köln

Forschung am **ivw**Köln, Band 4/2018

Ralf Knobloch

Forschungsstelle FaRis

Die Pfade einer bewerteten inhomogenen Markov-Kette - Fallbeispiele aus der betrieblichen Altersversorgung

---

Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit werden in drei Fallbeispielen aus dem Bereich der betrieblichen Altersversorgung die Versorgungszusagen mithilfe von bewerteten inhomogenen Markov-Ketten modelliert. Dabei liegt der Fokus auf den Pfaden der Markov-Ketten. Es wird anhand der Fallbeispiele gezeigt, wie man mithilfe der Pfade den Erwartungswert und die Standardabweichung der Zufallsvariablen „Barwert aller zukünftigen Zahlungen" berechnen kann. Darüber hinaus ist es auf Basis der Pfade möglich, in Bezug auf diese Zufallsvariable auch Wahrscheinlichkeiten von speziellen Ereignissen und Risikomaße – Value at Risk und Expected Shortfall – zu berechnen.

Abstract

In the present paper, in three case studies from the field of pensions, the pension liabilities are modeled using priced inhomogeneous Markov chains. The focus lies on the paths of the Markov chains. The case studies show how the paths can be used to calculate the expected value and the standard deviation of the random variable "present value of the cash-flow". In addition, based on the paths, it is possible to calculate probabilities of specific events and risk measures – value at risk and expected shortfall – with respect to this random variable.

Schlagwörter:

Betriebliche Altersversorgung, Markov-Kette, Bewertete Markov-Kette, Barwert, Value at Risk, Expected Shortfall

Keywords:

Pensions, Markov Chain, Priced Markov Chain, Present Value, Value at Risk, Expected Shortfall

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung

Stochastische Prozesse haben in den Wirtschaftswissenschaften die vielfältigsten Anwendungen. Sie werden zur Modellierung sowohl bei klassischen betriebs-wirtschaftlichen Sachverhalten als auch bei speziellen Fragestellungen in den Bereichen Insurance und Finance eingesetzt. Eine der wichtigsten Modellklasse bilden die Markov-Ketten mit endlichem Zustandsraum und diskreter Zeitachse. Als Beispiele für die Anwendung dieser Modelle bei klassischen betriebswirtschaftlichen Fragestellungen seien hier die Themen Warteschlangensysteme, Lagerhaltung und (Markovsche) Entscheidungsprozesse genannt (vgl. [13]). In der Personenversicher-ungsmathematik werden Markov-Ketten zur Kalkulation von Barwerten, Reserven und Prämien verwendet (vgl. [10], [12], [2], [3], [5], [6], [7], [8], [9]).

In dem in dieser Ausarbeitung verwendeten Modell gibt es neben den Zuständen der Markov-Kette eine weitere relevante Modellkomponente – die sogenannte Bewertung. Dabei wird in jedem Zeitpunkt jedem möglichen Zustand ein Zahlbetrag zugeordnet. Dies führt zum Begriff der bewerteten Markov-Kette. Darüber hinaus wird im hier behandelten Modell die zeitliche Entwicklung allgemein als inhomogen angesetzt.

Im Mittelpunkt des Interesses steht der zufällige Barwert des mit der Bewertung modellierten Zahlungsstroms. Für die charakteristische Funktion bzw. die momentenerzeugende Funktion dieser Zufallsvariablen lässt sich eine geschlossene Formel herleiten. Damit ist die Verteilung des zufälligen Barwerts des Zahlungsstroms eindeutig festgelegt und mithilfe der numerischen Ableitung lassen sich der Erwartungswert und höhere Momente berechnen (vgl. [6], [7], [8], [9]).

Offen jedoch ist bisher die Berechnung von Quantilen und Risikomaßen wie Value at Risk und Expected Shortfall. In der vorliegenden Ausarbeitung wird anhand von Fallbeispielen aus dem Bereich der betrieblichen Altersversorgung gezeigt, wie diese Lücke geschlossen werden kann bzw. welche rechentechnischen Probleme dabei entstehen. Die Berechnungen basieren auf einer Analyse der Pfade der zugrundeliegenden inhomogenen Markov-Kette.

2. Das allgemeine Modell

Gegeben sei eine Markov-Kette $(\boldsymbol{X_t})_{t=0,1,2,\dots}$ mit dem endlichen Zustandsraum $\boldsymbol{S} = \{\boldsymbol{0}, \boldsymbol{1}, \boldsymbol{2}, \dots, \boldsymbol{N}\}$. Dabei steht der Zeitpunkt $\boldsymbol{t}$ für den Beginn des $(\boldsymbol{t}+\boldsymbol{1})$-ten Jahres bzw. die Zufallsvariable $\boldsymbol{X_t}$ für den Zustand zu Beginn des $(\boldsymbol{t}+\boldsymbol{1})$-ten Jahres, $\boldsymbol{t} = \boldsymbol{0}, \boldsymbol{1}, \boldsymbol{2}, \dots$. Die Übergangswahrscheinlichkeiten vom Zeitpunkt $\boldsymbol{t}-\boldsymbol{1}$ zum Zeitpunkt $\boldsymbol{t}$ seien gegeben durch die (N+1)x(N+1)-Matrix

$$\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{t}) = \left(\boldsymbol{q_{jk}}(\boldsymbol{t})\right)_{j,k\in S} ,$$

d.h.

$$\boldsymbol{q_{jk}}(\boldsymbol{t}) \coloneqq \boldsymbol{P}(\boldsymbol{X_t} = \boldsymbol{k} | \boldsymbol{X_{t-1}} = \boldsymbol{j}),\ \ \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k} \epsilon \boldsymbol{S} \text{ und } \ \boldsymbol{t} = \boldsymbol{1}, \boldsymbol{2}, \dots$$

(vgl. [2]). Da die Übergangsmatrizen explizit von dem Zeitparameter $\boldsymbol{t}$ abhängen, heißt die Markov-Kette inhomogen (vgl. [10] S.16f, [13] S.11).

Die Verteilung der Zufallsvariablen $\boldsymbol{X_t}$, $\boldsymbol{t} = \boldsymbol{0}, \boldsymbol{1}, \boldsymbol{2}, \dots$, sei gegeben durch den Zeilenvektor $\boldsymbol{P_t} = \left(\boldsymbol{P_{t,j}}\right)_{j\in S}$, d.h.

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{X_t} = \boldsymbol{j}) = \boldsymbol{P_{t,j}}\ , \boldsymbol{j} \in \boldsymbol{S}.$$

Im Folgenden wird davon ausgegangen, dass $\boldsymbol{P_0}$ vorgegeben ist und alle Wahrscheinlichkeiten, Verteilungen und Momente gegeben dieser Anfangsverteilung berechnet werden. Unter Anwendung der Chapman-Kolmogorov-Gleichung für Markov-Ketten (vgl. [10] S.14) ergibt sich für $\boldsymbol{t} = \boldsymbol{0}, \boldsymbol{1}, \boldsymbol{2}, \dots$

$$\boldsymbol{P_t} = \boldsymbol{P_0} \cdot \prod_{s=1}^{t} \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{s})$$

(vgl. [2]).

Für diese inhomogene Markov-Kette wird nun durch die Spaltenvektoren

$$\boldsymbol{L_t} = \left(\boldsymbol{L_{t,j}}\right)_{j\in S}\ , \boldsymbol{t} = \boldsymbol{0}, \boldsymbol{1}, \boldsymbol{2}, \dots$$

eine Bewertung definiert, die in jedem Zeitpunkt jedem möglichen Zustand eine reelle Zahl bzw. eine Zahlung zuordnet. Die Zufallsvariable „Barwert der ersten $\boldsymbol{n}+\boldsymbol{1}$ Zahlungen“ ist dann gegeben durch:

$$\boldsymbol{B_0}(\boldsymbol{n}) = \sum_{t=0}^{n} \sum_{j=0}^{N} \boldsymbol{1}_{\{X_t = j\}} \cdot \boldsymbol{v}^{t} \cdot \boldsymbol{L_{t,j}}$$

Dabei sei $\boldsymbol{v}$ der Diskontierungsfaktor für ein Jahr gegeben durch $\boldsymbol{v} = \frac{1}{1+r}$ und $\boldsymbol{r} > -\boldsymbol{1}$ der zeitlich konstante Rechnungszins pro Jahr.

3. Betriebliche Altersversorgung

Zur Modellierung einer Versorgungszusage auf betriebliche Altersversorgung mithilfe einer bewerteten inhomogenen Markov-Kette müssen zum einen die Übergangsmatrizen und zum anderen die Bewertungsvektoren besetzt werden. Darüber hinaus ist für die Zufallsvariable „Barwert der ersten $\boldsymbol{n+1}$ Zahlungen" der jährliche Rechnungszins zu wählen. Da eine Zusage auf betriebliche Altersversorgung i.d.R. eine Alters-, eine Invaliden- und eine Hinterbliebenen-versorgung beinhaltet, basieren die Übergangsmatrizen auf einem System bestehend aus Sterbe-, Invalidisierungs- und Verheiratungswahrscheinlichkeiten. Zur Modellierung der Hinterbliebenenversorgung benötigt man zusätzlich (kollektive) Altersunterschiede im Todesfall und zur Modellierung der Rentenphasen ein Alter für den Übergang in die Altersrente und ein generelles Endalter für den letztmöglichen Bezug einer Rentenzahlung. Letzteres orientiert sich an dem maximal erreichbaren Lebensalter. Es wird nur die jährliche Zahlweise behandelt, so dass keine Annahmen über unterjährliche Verzinsungen und unterjährliche Sterbewahrscheinlichkeiten getroffen werden müssen. Die Bewertungsvektoren ergeben sich aus den zugesagten Rentenhöhen.

Als Standardmodell für die betriebliche Altersversorgung werden in Deutschland üblicherweise die Richttafeln von Klaus Heubeck (vgl. [1]) verwendet. Die Richttafeln enthalten ein System von Wahrscheinlichkeiten mit allen für die Besetzung der Übergangsmatrizen nötigen Werten und ein Formelwerk zur Bewertung von Versorgungszusagen. Die Richttafeln sind seit 2005 als Generationentafeln konzipiert. Der mit dem Formelwerk der Richttafeln berechnete Barwert entspricht dem Erwartungswert der oben definierten Zufallsvariablen „Barwert der ersten $\boldsymbol{n+1}$ Zahlungen" mit einem geeigneten $\boldsymbol{n}$.

Die Modellierung mit einer bewerteten inhomogenen Markov-Kette führt bezüglich des Erwartungswertes zu den gleichen Ergebnissen wie das Formelwerk der Richttafeln: In den Fallbeispielen in [6], [7], [8] und [9] weichen die Ergebnisse nur minimal voneinander ab. Zusätzlich ermöglicht die Modellierung aber auch die Berechnung höherer Momente, wie z.B. Varianz und Standardabweichung.

4. Fallbeispiel 1: Ein Rentenbezieher

Zunächst betrachten wir den Fall eines einzelnen Rentenbeziehers. Dieser erhält eine jährlich vorschüssig Rente in Höhe von 1.000 €. Die Zusage beinhaltet keine Hinterbliebenenversorgung. Der Rentenbezieher sei 74 Jahre alt. Das Endalter wird mit 100 angesetzt. Die Sterbewahrscheinlichkeiten seien wie folgt gegeben:

Alter	Sterbewahr-scheinlich-keit	Alter	Sterbewahr-scheinlich-keit	Alter	Sterbewahr-scheinlich-keit
74	0,026	83	0,063	92	0,163
75	0,028	84	0,070	93	0,179
76	0,031	85	0,078	94	0,197
77	0,034	86	0,087	95	0,211
78	0,037	87	0,097	96	0,225
79	0,041	88	0,108	97	0,239
80	0,046	89	0,120	98	0,254
81	0,051	90	0,133	99	0,269
82	0,056	91	0,147	100	1,000

Zunächst wird mit den in der Personenversicherungsmathematik üblichen Methoden der erwartete Barwert der Rentenzahlungen berechnet. Der jährliche Rechnungszins sei 3%. Es wird davon ausgegangen, dass die Rentenzahlung für das Alter 74 sofort erfolgt und somit nicht mehr abgezinst wird, alle andern Rentenzahlungen sind entsprechend der Altersdifferenz abzuzinsen. Damit ergibt sich mit der Formel

$$\boldsymbol{\frac{1}{l_{74}} \cdot \sum_{j=74}^{100} R_j \cdot v^{j-74} \cdot l_j = \frac{1}{D_{74}} \cdot \sum_{j=74}^{100} R_j \cdot D_j}$$

ein erwarteter Barwert von $\mathbf{10.954,38}$ €. Dabei seien wie in der Personenversicherungsmathematik üblich $\boldsymbol{l_j}$ die Lebenden und $\boldsymbol{D_j}$ die diskontierten Lebenden jeweils im Alter $\boldsymbol{j}$. Ferner seien die Rentenzahlungen $\boldsymbol{R_j}$ konstant gleich 1.000 für alle $\boldsymbol{j = 74, \ldots, 100}$. Bei der Berechnung ergeben sich die folgenden (auf vier Nachkommastellen gerundeten) Zwischenergebnisse:

Alter j	Lebende l_j	Diskontierte Lebende D_j	Alter j	Lebende l_j	Diskontierte Lebende D_j
74	100.000,0000	11.221,3568	88	46.330,7775	3.437,1130
75	97.400,0000	10.611,2636	89	41.327,0535	2.976,6066
76	94.672,8000	10.013,7362	90	36.367,8071	2.543,1202
77	91.737,9432	9.420,6896	91	31.530,8888	2.140,6653
78	88.618,8531	8.835,3264	92	26.895,8481	1.772,8034
79	85.339,9555	8.260,6013	93	22.511,8249	1.440,6179
80	81.841,0173	7.691,1812	94	18.482,2082	1.148,2983
81	78.076,3305	7.123,6766	95	14.841,2132	895,2268
82	74.094,4376	6.563,4651	96	11.709,7172	685,7611
83	69.945,1491	6.015,4476	97	9.075,0308	515,9853
84	65.538,6047	5.472,3053	98	6.906,0984	381,2280
85	60.950,9024	4.941,0135	99	5.151,9494	276,1127
86	56.196,7320	4.422,9266	100	3.766,0750	195,9596
87	51.307,6163	3.920,5165	101	0,0000	0,0000
			Summe		122.923,0045

Modelliert man die Rentenzahlungen mithilfe einer bewerten inhomogenen Markov-Kette, so benötigt man die folgenden beiden Zustände:

Zustand 0: „Der Rentenbezieher ist tot“

Zustand 1: „Der Rentenbezieher lebt“

Damit ergibt sich z.B. als dritte Übergangsmatrix $\boldsymbol{Q(3)} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0,031} & \mathbf{0,969} \end{pmatrix}$. Der Bewertungsvektor wird einheitlich mit dem Spaltenvektor $\begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{1.000} \end{pmatrix}$ angesetzt. Da im vorliegenden Beispiel die Rentenzahlungen maximal für 27 Jahre laufen, ist zur Berücksichtigung aller Zahlungen $\boldsymbol{n = 27}$ ausreichend. Damit wird formal als letztes Alter 101 berücksichtigt, obwohl in diesem Alter keine Zahlung mehr erfolgen kann. Berechnet man unter diesen Annahmen die momentenerzeugende Funktion der Zufallsvariablen $\boldsymbol{B_0(27)}$ und leitet diese numerisch ab (vgl. in [6], [7], [8], [9]), so erhält man als Erwartungswert ebenfalls $\mathbf{10.954,38}$ € und als Standardabweichung $\mathbf{4.767,87}$ €.

Wir betrachten nun alle möglichen Pfade der Markov-Kette $(\boldsymbol{X_t})_{\boldsymbol{t=0,1,2,\dots}}$ für die Zeitpunkte $\boldsymbol{t = 0, 1, 2, \dots, 27}$. Im Zeitpunkt $\boldsymbol{t = 0}$ nimmt dieser stochastische Prozess den Zustand $\mathbf{1}$ an, d.h. im Alter 74 erfolgt eine Rentenzahlung. Im Zeitpunkt $\boldsymbol{t = 27}$ nimmt der stochastische Prozess mit Wahrscheinlichkeit $\mathbf{1}$ den Zustand $\mathbf{0}$ an, da im Alter 101 der Rentenbezieher bei den gegeben Modellannahmen mit Wahrscheinlichkeit $\mathbf{1}$ tot ist und somit keine Rentenzahlung mehr erfolgt. Berücksichtigt man dazwischen, d.h. für $\boldsymbol{t = 1, 2, \dots, 26}$, alle Zustandskombinationen sein, so hätte man

$$\mathbf{1 \cdot 2^{26} \cdot 1 = 67.108.864}$$

mögliche Pfade. Aus einfachen Überlegungen folgt aber, dass davon lediglich die folgenden Pfade relevant sind:

Pfad Nr.	Beschreibung „Sterben im Alter …“	Wahrschein-lichkeit des Pfades	Pfad Nr.	Beschreibung „Sterben im Alter …“	Wahrschein-lichkeit des Pfades
1	74	0,02600000	15	88	0,05003724
2	75	0,02727200	16	89	0,04959246
3	76	0,02934857	17	90	0,04836918
4	77	0,03119090	18	91	0,04635041
5	78	0,03278898	19	92	0,04384023
6	79	0,03498938	20	93	0,04029617
7	80	0,03764687	21	94	0,03640995
8	81	0,03981893	22	95	0,03131496
9	82	0,04149289	23	96	0,02634686
10	83	0,04406544	24	97	0,02168932
11	84	0,04587702	25	98	0,01754149
12	85	0,04754170	26	99	0,01385874
13	86	0,04889116	27	100	0,03766075
14	87	0,04976839			

Dabei berechnet sich die Wahrscheinlichkeit eines Pfades mit der Beschreibung „Sterben im Alter $\boldsymbol{x}$“ durch die Multiplikation der Wahrscheinlichkeit bis zum Alter $\boldsymbol{x}$ zu überleben und der Wahrscheinlichkeit im Alter $\boldsymbol{x}$ zu sterben. Beispielhaft sei hier die

Berechnung der Wahrscheinlichkeit für den Pfad mit der Beschreibung „Sterben im Alter 77“ ausgeführt:

$$(\mathbf{1-0,026})\cdot(\mathbf{1-0,028})\cdot(\mathbf{1-0,031})\cdot\mathbf{0,034}=\mathbf{0,03119090}$$

Mithilfe der Barwertformel für eine vorschüssige Jahresrente mit Laufzeit $\boldsymbol{k}$, d.h.

$$\boldsymbol{R}\cdot\frac{\boldsymbol{q^k-1}}{\boldsymbol{q-1}}\cdot\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{q^{k-1}}},$$

wobei $\boldsymbol{R}=\mathbf{1.000}$ und $\boldsymbol{q}=\mathbf{1,03}$, lässt sich für jeden Pfad der Barwert der Rentenzahlungen berechnen. Beispielhaft sei hier wiederum die Berechnung für den Pfad mit der Beschreibung „Sterben im Alter 77“ ausgeführt:

$$\mathbf{1.000}\cdot\frac{\mathbf{1,03^4-1}}{\mathbf{0,03}}\cdot\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1,03^3}}=\mathbf{3.828,61}$$

Insgesamt ergeben sich für die Pfade die folgenden Barwerte:

Pfad Nr.	Beschreibung „Sterben im Alter …“	Barwert €	Pfad Nr.	Beschreibung „Sterben im Alter …“	Barwert €
1	74	1.000,00	15	88	12.296,07
2	75	1.970,87	16	89	12.937,94
3	76	2.913,47	17	90	13.561,10
4	77	3.828,61	18	91	14.166,12
5	78	4.717,10	19	92	14.753,51
6	79	5.579,71	20	93	15.323,80
7	80	6.417,19	21	94	15.877,47
8	81	7.230,28	22	95	16.415,02
9	82	8.019,69	23	96	16.936,92
10	83	8.786,11	24	97	17.443,61
11	84	9.530,20	25	98	17.935,54
12	85	10.252,62	26	99	18.413,15
13	86	10.954,00	27	100	18.876,84
14	87	11.634,96			

Mit den obigen Pfadwahrscheinlichkeiten und den zugehörigen Barwerten erhält man für den Erwartungswert und die Standardabweichung der Zufallsvariablen $\boldsymbol{B_0(27)}$ wiederum die Werte $\mathbf{10.954,38}$ € und $\mathbf{4.767,87}$ €.

Somit lässt sich der erwartete Barwert der Rentenzahlungen in diesem einfachen Fall nicht nur mit den klassischen Methoden der Pensionsversicherungsmathematik und der numerischen Ableitung der momentenerzeugenden Funktion berechnen, sondern auch durch eine Betrachtung der möglichen bzw. relevanten Pfade.

Neben den üblichen Momenten können in diesem Beispiel mit der Betrachtung aller relevanten Pfade auch Wahrscheinlichkeiten für einzelne Intervalle berechnet werden. So beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass die Zufallsvariable $\boldsymbol{B_0(27)}$ Werte zwischen $\mathbf{10.000}$ € und $\mathbf{15.000}$ € annimmt ca. 38%. Ferner ermöglicht die Betrachtung aller relevanten Pfade die Berechnung der Risikomaße Value at Risk (kurz: VaR) und Expected Shortfall (kurz: ES) für die Zufallsvariable $\boldsymbol{B_0(27)}$. Für diese beiden Risiko-Kennzahlen ergeben sich z.B. bei einem Niveau von 5% im vorliegenden Beispiel die folgenden Werte:

$$\boldsymbol{VaR_{0,05} = 18.413,15} \text{ €}$$

$$\boldsymbol{ES_{0,05} = 18.762,41} \text{ €}$$

Dabei wird für eine Zufallsvariable $\boldsymbol{Y}$ (hier $\boldsymbol{B_0(27)}$) und ein Niveau $\boldsymbol{\alpha} \in (\mathbf{0,1})$ (hier 0,05) der Value at Risk ($\boldsymbol{VaR_\alpha(Y)}$) als minimaler (Bar-)Wert unter den $\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{100}$% (hier 5%) höchsten (Bar-)Werten interpretiert, d.h.

$$\boldsymbol{VaR_\alpha(Y) := inf\{y \in IR \mid P(Y \le y) \ge 1 - \alpha\}}\,.$$

Der Expected Shortfall ($\boldsymbol{ES_\alpha(Y)}$) entspricht dem Erwartungswert (erwarteten Barwert) unter den $\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{100}$% (hier 5%) höchsten (Bar-)Werten, d.h.

$$\boldsymbol{ES_\alpha(Y) := \frac{1}{\alpha} \cdot \int_0^\alpha VaR_\beta(Y)\, d\beta}$$

(vgl. [11] S.19ff).

5. Fallbeispiel 2: Ein Arbeitnehmer

Einem männlichen Arbeitnehmer werden Leistungen aus einer betrieblichen Altersversorgung zugesagt. Als Alters- und Invalidenrente erhält der Arbeitnehmer im Versorgungsfall jährlich 1.000 €, als Hinterbliebenenrente jährlich 600 €. Die Zahlweise erfolgt jährlich vorschüssig. Der Bewertungsstichtag sei der 31.12.2017. Das Endalter (Übergang in den Zustand „Bezug von Altersrente") wird mit dem Alter 67 angesetzt. Der Einfachheit halber wird die Bewertung ohne Dynamik und ohne Fluktuation durchgeführt. Letzteres hat zu Folge, dass der Zustand „Arbeitnehmer ausgeschieden" nicht relevant ist. Das Geburtsdatum des Arbeitnehmers sei der 1. Januar 1975, d.h. zum Stichtag hat der Arbeitnehmer ein versicherungstechnisches Alter von 43 Jahren. Als Wahrscheinlichkeiten für den Eintritt eines Versorgungsfalls werden die Werte der Richttafeln von Klaus Heubeck (vgl. [1]) angesetzt. Damit wird der Bewertung insbesondere eine Generationentafel zugrunde gelegt. Der Rechnungszins wird mit 3% p.a. angesetzt.

Wählt man nun für die Zufallsvariable „Barwert der ersten $\boldsymbol{n+1}$ Zahlungen" $\boldsymbol{n}$ groß genug, so handelt es sich um den „Barwert aller zukünftigen Zahlungen". Bewertet man diese Versorgungszusage mit dem Formelwerk der Richttafeln (vgl. [1]), so ergibt sich als Erwartungswert der Zufallsvariablen „Barwert aller zukünftigen Zahlungen" $\mathbf{9.634}$ €. Durch numerisches Ableiten der momentenerzeugenden Funktion (vgl. [6], [7], [8], [9]) erhält man für den Erwartungswert dieser Zufallsvariablen ebenfalls **9.634 €** und für die Standardabweichung $\mathbf{3.313}$ €.

Im Folgenden werden analog zu Fallbeispiel 1 alle relevanten Pfade betrachtet. Zunächst muss zur Analyse der Verteilung der Zufallsvariablen „Barwert der ersten $\boldsymbol{n+1}$ Zahlungen" der Parameter $\boldsymbol{n}$ festgelegt werden. Hier wird der Maximalwert wie folgt angesetzt: Das Richttafelmodell beginnt für alle Personen mit Alter 20 und endet mit Alter 115. D.h. im Alter 115 erfolgt die letzte Zahlung und im Alter 116 sind alle Personen tot. Würde man somit für die Alter von 20 bis 116 Jahre 97 Zahlungen berücksichtigen, so wäre $\boldsymbol{n+1=97}$ bzw. $\boldsymbol{n=96}$ der richtige Ansatz. Wegen des im Richttafelmodell verwendeten kollektiven Altersunterschieds im Todesfall werden zusätzliche Jahre benötigt. Der Altersunterschied zu der weiblichen Hinterbliebenen beträgt bei männlichen Arbeitnehmern und Rentenbeziehern maximal 6 Jahre. Rechnet man diesen Zeitraum hinzu, so ergibt sich als Ansatz $\boldsymbol{n+1=103}$ bzw. $\boldsymbol{n=102}$. Dieser Ansatz stellt die maximal benötigte Anzahl von Jahren da und kann daher für alle Personen unabhängig von dem aktuellen Alter verwendet werden. Da das Maximum bei der hier modellierten Zusage aber nur für einen Arbeitnehmer mit aktuellem Alter 20 benötigt wird, könnte man für $\boldsymbol{n}$ im vorliegenden Fallbeispiel auch einen kleineren Wert ansetzen. Mit Blick auf das Bestandsbeispiel im nächsten Kapitel wird in der EDV-technischen Umsetzung generell $\boldsymbol{n=102}$ angesetzt.

Mit diesem Modell ergeben sich für den Arbeitnehmer aus der EDV-technischen Umsetzung 55.050 relevante Pfade, d.h. Pfade mit positiver Wahrscheinlichkeit.

Wertet man diese Pfade analog zu Fallbeispiel 1 aus, so ergeben sich für die Zufallsvariable „Barwert aller zukünftigen Zahlungen“ folgende Ergebnisse:

Erwartungswert	9.634 €
Standardabweichung	3.313 €
Value at Risk zum Niveau 5%	15.531 €
Expected Shortfall zum Niveau 5%	18.637 €

Somit erhält man für den Erwartungswert und die Standardabweichung die gleichen Ergebnisse wie mit den anderen Methoden. Darüber hinaus ist es möglich, die Verteilung direkt auszuwerten und z.B. Risikomaße zu berechnen.

6. Fallbeispiel 3: Bestand mit zehn Personen

Im dritten Fallbeispiel betrachten wir einen Bestand mit der folgenden Struktur:

- Zehn Personen
- Vier aktive Arbeitnehmer
- Sechs Rentenbezieher: zwei Invalidenrentner, zwei Altersrentner und zwei Hinterbliebenenrentner
- Fünf Frauen und fünf Männer

Gegeben sei wiederum eine einfache Zusage auf betriebliche Altersversorgung. Als Alters- und Invalidenrente werden dabei jährlich 1.000 €, als Hinterbliebenenrente jährlich 600 € gewährt. Die Zahlweise sei jährlich vorschüssig, der jährliche Rechnungszins 3%. Der Bewertungsstichtag sei der 31.12.2017. Das Endalter wird mit dem Alter 67 angesetzt. Der Einfachheit halber wird die Bewertung wie in Fallbeispiel 2 ohne Dynamik und ohne Fluktuation durchgeführt. Ebenfalls wie in Fallbeispiel 2 basieren die Wahrscheinlichkeiten für den Eintritt eines Versorgungsfalls auf den Richttafeln von Klaus Heubeck (vgl. [1]).

Jede Person wird einzeln bewertet, d.h. für jede Person wird auf Basis der Pfade der zugehörigen inhomogenen Markov-Kette die Verteilung der Zufallsvariablen „Barwert der ersten $\boldsymbol{n+1}$ Zahlungen“ EDV-technisch ermittelt. Der Parameter $\boldsymbol{n}$ wird dabei einheitlich mit $\mathbf{102}$ angesetzt. Damit kann analog zum Fallbeispiel 2 die Zufallsvariable auch als „Barwert aller zukünftigen Zahlungen“ bezeichnet werden.

Für die Anzahl der Pfade bezogen auf die einzelnen Personen und den Stichtag 31.12.2017 ergibt sich aus der EDV-technischen Umsetzung:

Person Nr.	Status	Alter	Jahrgang	Geschlecht	Anzahl der relevanten Pfade
1	Aktiv	43	1975	männlich	55.050
2	Aktiv	33	1985	männlich	89.633
3	Aktiv	43	1975	weiblich	45.141
4	Aktiv	33	1985	weiblich	74.721
5	Invalidenrente	43	1975	männlich	3.022
6	Invalidenrente	43	1975	weiblich	2.551
7	Altersrente	73	1945	männlich	1.177
8	Altersrente	83	1935	männlich	751
9	Hinterbliebenenrente	43	1975	weiblich	73
10	Hinterbliebenenrente	63	1955	weiblich	53

Dabei ist bei einer Person ein Pfad relevant, wenn er eine positive Wahrscheinlichkeit hat.

Setzt man die (stochastische) Unabhängigkeit der Personenschicksale voraus, so müssen für die Verteilung der Zufallsvariablen „Barwert aller zukünftigen Zahlungen" bezogen auf den Bestand, alle Kombinationen von relevanten Pfaden der Einzelpersonen berücksichtigt werden. Es ergeben sich dann für den Bestand ca. $4{,}39 \cdot 10^{35}$ relevante Pfade. Die Wahrscheinlichkeit eines Pfades berechnet sich dabei wegen der Unabhängigkeit der Personenschicksale durch die Multiplikation der Wahrscheinlichkeiten der zehn zugehörigen Pfade der einzelnen Personen.

Da aber bei einer solchen Anzahl von Pfaden die EDV-technische Umsetzung mit Blick auf die Rechenzeit schnell an ihre Grenzen stößt, werden im vorliegenden Fallbeispiel die Ausgänge der Zufallsvariablen „Barwert aller zukünftigen Zahlungen" für die Einzelpersonen durch Rundung zu Klassen zusammengefasst. Dadurch reduziert sich bezogen auf den Bestand die Anzahl der relevanten Pfade erheblich. Mit der so berechneten Verteilung werden dann für die Zufallsvariable „Barwert aller zukünftigen Zahlungen" bezogen auf den Bestand die Kennzahlen Erwartungswert, Standardabweichung, Value at Risk zum Niveau 5% und Expected Shortfall zum Niveau 5% berechnet.

Die Ergebnisse sind in der nachfolgenden Tabelle zusammengestellt. Dabei ergibt sich der Wert für den Erwartungswert der Zufallsvariablen „Barwert aller zukünftigen Zahlungen" bei der Methode „Numerisches Ableiten der momentenerzeugenden Funktion" wegen der Linearität des Erwartungswertes durch Addition der Einzelwerte. Wegen der Unabhängigkeit der Personenschicksale, lässt sich bei dieser Methode die Varianz ebenfalls durch Addition der Einzelwerte berechnen. Die Standardabweichung ergibt sich dann als Wurzel aus der Varianz. Berechnet man für die Momente Erwartungswert und Varianz die Einzelwerte analog zu den Fallbeispielen 1 und 2 über die jeweiligen aus den Pfaden abgeleiteten Wahrscheinlichkeiten und addiert anschließend die Einzelwerte, so erhält man bezogen auf den Bestand für den Erwartungswert 123.673 und für die Standardabweichung 13.176.

Methode	Numerisches Ableiten der momenten-erzeugenden Funktion	Verteilung mit Klassenbildung durch Runden auf 5.000	Verteilung mit Klassenbildung durch Runden auf 3.000	Verteilung mit Klassenbildung durch Runden auf 2.000
Erwartungs-wert	123.673	122.662	123.551	123.420
Standard-abweichung	13.176	13.956	13.483	13.382
Value at Risk Niveau 5%		145.000	144.000	144.000
Expected Shortfall Niveau 5%		149.581	149.440	149.031
Anzahl der relevanten Pfade		84.707.280	6.696.500.580	ca. $2{,}54 \cdot 10^{11}$
Rechenzeit in std:min:sek (Delphi-Programm)		00:02:10	00:06:49	02:54:42

Für den Erwartungswert und die Standardabweichung erhält man im vorliegenden Beispiel bei der Klassenbildung durch Runden auf 2.000 bzw. auf 3.000 hinreichend genaue Ergebnisse. Dabei liefert die Rundung auf 3.000 für den Erwartungswert eine bessere Näherung als die Rundung auf 2.000. Jedoch ist der Unterschied minimal. Beide Werte haben eine Abweichung vom exakten Wert von weniger als 0,25%. Rundet man auf 5.000, so ist das Ergebnis für den Erwartungswert mit einer Abweichung unter 1% immer noch sehr gut. Die Standardabweichung jedoch hat mit 5,9% eine relativ hohe Abweichung vom exakten Wert. Der Vorteil der Berechnungen mit den auf den relevanten Pfaden basierenden Wahrscheinlichkeiten liegt aber darin, dass neben den Momenten auch Wahrscheinlichkeiten von Ereignissen und Risikomaße (Value at Risk und Expected Shortfall) berechnet werden können. Allerdings ist die Rechenzeit für die Rundung auf 2.000 bei der hier verwendeten Soft- bzw. Hardware relativ hoch. Die anderen beiden Berechnungen (Rundung auf 5.000 und Rundung auf 3.000) haben zwar geringere Rechenzeiten, dafür verliert man bei den Ergebnissen aber an Genauigkeit.

Die Beurteilung der mit der Zusage verbundenen biometrischen Risiken kann auf Basis der Risikomaße erfolgen. Dabei steht der über den erwarteten Barwert der zukünftigen Zahlungen hinausgehende Aufwand, d.h. die Differenz von Risikomaß und Erwartungswert, im Fokus. Verwendet man den exakt berechneten Erwartungswert und die Risikomaße auf Basis der Rundung auf 2.000, so ergibt sich für den „unerwarteten" Aufwand auf Basis des Value at Risk ein Wert von

$$\mathbf{144.000 - 123.673 = 20.327}$$

und auf Basis des Expected Shortfalls eine Wert von

$$\mathbf{149.031 - 123.673 = 25.358.}$$

Bewertet man die biometrischen Risiken mit dem unerwarteten Aufwand für jede der zehn Personen einzeln und addiert diese Bewertungen, so ergibt auf Basis des Value at Risk ein Wert von

$$\mathbf{53.356}$$

und auf Basis des Expected Shortfall ein Wert von

$$\mathbf{72.035.}$$

Der Unterschied zwischen der Risikobewertung für den Bestand und der Summe der Bewertung der Einzelrisiken ist dabei auf den Diversifikationseffekt zurückzuführen.

7. Fazit

In der vorliegenden Ausarbeitung wird in einfachen Fallbeispielen aus der betrieblichen Altersversorgung die Zusage mithilfe einer inhomogenen Markov-Kette modelliert. Dabei steht die Zufallsvariable „Barwert aller zukünftigen Zahlungen“ und deren Verteilung im Mittelpunkt des Interesses. Durch eine Betrachtung der einzelnen Pfade der inhomogenen Markov-Kette ist es möglich, neben den üblichen Momenten (wie Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung) auch Wahrscheinlichkeiten von speziellen Ereignissen und Risikomaße zu berechnen. Wegen der hohen Anzahl der Pfade erfordert dies aber den Einsatz von EDV-technischen Methoden. Bei Beständen kann dabei – wie in Fallbeispiel 3 – ein Verfahren zur Reduktion der Rechenzeit erforderlich sein.

In der betrieblichen Altersversorgung benötigt man zur Modellierung einer Versorgungszusage i.d.R. mehr Zustände als in den vorliegenden Fallbeispielen. Darüber hinaus ist in Fallbeispiel 3 die Anzahl der Personen mit zehn – im Vergleich zu den in der Praxis üblichen Bestandsgrößen – sehr niedrig. So dass es im Allgemeinen weiterer EDV-technischer Entwicklungen bedarf, wenn man diese hier vorgestellten Methoden in der Praxis einsetzen möchte.

Literaturverzeichnis

[1] *Heubeck, Klaus* Richttafeln 2005G,Textband und Programm Heurika 2,Verlag: Heubeck-Richttafeln-GmbH, Köln 2005.

[2] *Knobloch, Ralf* Bewertung von risikobehafteten Zahlungsströmen mithilfe von Markov-Ketten, In: Forschung am ivwKöln, Band 3/2011, Köln 2012, http://nbn-resolving.de/urn:nbn:de:hbz:832-cos-98 (Stand 01. April 2018).

[3] *Knobloch, Ralf* Ein Konzept zur Berechnung von einfachen Barwerten in der betrieblichen Altersversorgung mithilfe einer Markov-Kette, In: Forschung am ivwKöln, Band 4/2011, Köln 2012, http://nbn-resolving.de/urn:nbn:de:hbz:832-cos-100 (Stand 01. April 2018).

[4] *Knobloch, Ralf* Bewertung von risikobehafteten Zahlungsströmen mithilfe von Markov-Kette bei unterjährlicher Zahlweise, In: Forschung am ivwKöln, Band 6/2012, Köln 2012, http://nbn-resolving.de/urn:nbn:de:hbz:832-cos-204 (Stand 01. April 2018).

[5] *Knobloch, Ralf* Konstruktion einer unterjährlichen Markov-Kette aus einer jährlichen Markov-Kette, In: Forschung am ivwKöln, Band 6/2013, Köln 2013, http://nbn-resolving.de/urn:nbn:de:hbz:832-cos-402 (Stand 01. April 2018).

[6] *Knobloch, Ralf* Momente und charakteristische Funktion des Barwerts einer bewerteten inhomogenen Markov-Kette-Anwendung bei risikobehafteten Zahlungsströmen, In: Forschung am ivwKöln, Band 5/2015, Köln 2015, http://nbn-resolving.de/urn:nbn:de:hbz:832-cos-816 (Stand 01. April 2018).

[7] *Knobloch, Ralf* Bewertete inhomogene Markov-Ketten – Spezielle unterjährliche und zeitstetige Modelle, In: Forschung am ivwKöln, Band 4/2016, Köln 2016, http://nbn-resolving.de/urn:nbn:de:hbz:832-cos4-3416 (Stand 01. April 2018).

[8] *Knobloch, Ralf* Der Barwert der Rentenzahlungen aus einer betrieblichen Versorgungszusage, Der Aktuar 2016, Heft 4, S. 210 – 213.

[9] *Knobloch, Ralf* Konstruktion einer unterjährlichen Markov-Kette aus einer jährlichen Markov-Kette - Eine Verallgemeinerung des linearen Ansatzes, In: Forschung am ivwKöln, Band 7/2017, Köln 2017, http://nbn-resolving.de/urn:nbn:de:hbz:832-cos4-5535 (Stand 01. April 2018).

[10] *Koller, Michael* Stochastische Modelle in der Lebensversicherung, 2. Auflage, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg 2010.

[11] *Kriele, Marcus; Wolf, Jochen* Wertorientiertes Risikomanagement von Versicherungsunter-nehmen, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg 2012

[12] *Milbrodt, Hartmut; Helbig, Manfred* Mathematische Methoden der Personenversicherung, De Gruyter, Berlin New York 1999.

[13] *Waldmann, Karl-Heinz; Stocker, Ulrike M.* Stochastische Modelle, 2. Auflage, Springer Verlag, Heidelberg 2013.

Impressum

Diese Veröffentlichung erscheint im Rahmen der Online-Publikationsreihe „Forschung am **ivw**Köln“. Eine vollständige Übersicht aller bisher erschienenen Publikationen findet sich am Ende dieser Publikation und kann hier abgerufen werden.

Forschung am ivwKöln, 4/2018
ISSN (online) 2192-8479

Ralf Knobloch: Die Pfade einer bewerteten inhomogenen Markov-Kette – Fallbeispiele aus der betrieblichen Altersversorgung

Köln, April 2018

Schriftleitung / editor's office:

Prof. Dr. Jürgen Strobel

Institut für Versicherungswesen /
Institute for Insurance Studies

Fakultät für Wirtschafts- und Rechtswissenschaften /
Faculty of Business, Economics and Law

Technische Hochschule Köln /
University of Applied Sciences

Gustav Heinemann-Ufer 54
50968 Köln

Tel. +49 221 8275-3270
Fax +49 221 8275-3277
Mail juergen.strobel@th-koeln.de
Web www.th-koeln.de

Herausgeber der Schriftenreihe / Series Editorship:

Prof. Dr. Lutz Reimers-Rawcliffe
Prof. Dr. Peter Schimikowski
Prof. Dr. Jürgen Strobel

Kontakt Autor / Contact author:

Prof. Dr. Ralf Knobloch

Schmalenbach Institut für Wirtschaftswissenschaften /
Schmalenbach Institute of Business Administration

Fakultät für Wirtschafts- und Rechtswissenschaften /
Faculty of Business, Economics and Law

Technische Hochschule Köln /
University of Applied Sciences

Gustav Heinemann-Ufer 54
50968 Köln

Mail ralf.knobloch@th-koeln.de

Publikationsreihe „Forschung am ivwKöln“

Die Veröffentlichungen der Online-Publikationsreihe "Forschung am ivwKöln" (ISSN: 2192-8479) werden üblicherweise über Cologne Open Science (Publikationsserver der TH Köln) veröffentlicht. Die Publikationen werden hierdurch über nationale und internationale Bibliothekskataloge, Suchmaschinen sowie andere Nachweisinstrumente erschlossen.

Alle Publikationen sind auch kostenlos abrufbar unter www.ivw-koeln.de.

2018

3/2018	Völler, Müller-Peters: InsurTech Karte ivwKöln 1/2018 - Beiträge zu InsurTechs und Innovation am ivwKöln
2/2018	Schmidt, Schulz: InsurTech. Proceedings zum 12. FaRis & DAV Symposium am 9. Juni 2017 in Köln
1/2018	Institut für Versicherungswesen: Forschungsbericht für das Jahr 2017

2017

8/2017	Materne, Pütz: Alternative Capital und Basisrisiko in der Standardformel (non-life) von Solvency II
7/2017	Knobloch: Konstruktion einer unterjährlichen Markov-Kette aus einer jährlichen Markov-Kette - Eine Verallgemeinerung des linearen Ansatzes
6/2017	Goecke, Oskar (Hrsg.): Risiko und Resilienz. Proceedings zum 11. FaRis & DAV Symposium am 9. Dezember 2016 in Köln
5/2017	Grundhöfer, Dreuw, Quint, Stegemann: Bewertungsportale - eine neue Qualität der Konsumenteninformation?
4/2017	Heep-Altiner, Mehring, Rohlfs: Bewertung des verfügbaren Kapitals am Beispiel des Datenmodells der „IVW Privat AG“
3/2017	Müller-Peters, Völler: InsurTech Karte ivwKöln 1/2017 - Beiträge zu InsurTechs und Innovation am ivwKöln
2/2017	Heep-Altiner, Müller-Peters, Schimikowski, Schnur (Hrsg.): Big Data für Versicherungen. Proceedings zum 21. Kölner Versicherungssymposium am 3. 11. 2016 in Köln
1/2017	Institut für Versicherungswesen: Forschungsbericht für das Jahr 2016

2016

13/2016	Völler: Erfolgsfaktoren eines Online-Portals für Akademiker
12/2016	Müller-Peters, Gatzert: Todsicher: Die Wahrnehmung und Fehlwahrnehmung von Alltagsrisiken in der Öffentlichkeit (erscheint 2017)
11/2016	Heep-Altiner, Penzel, Rohlfs, Voßmann: Standardformel und weitere Anwendungen am Beispiel des durchgängigen Datenmodells der „IVW Leben AG“
10/2016	Heep-Altiner (Hrsg.): Big Data. Proceedings zum 10. FaRis & DAV Symposium am 10. Juni 2016 in Köln
9/2016	Materne, Pütz, Engling: Die Anforderungen an die Ereignisdefinition des Rückversicherungsvertrags: Eindeutigkeit und Konsistenz mit dem zugrundeliegenden Risiko
8/2016	Rohlfs (Hrsg.): Quantitatives Risikomanagement. Proceedings zum 9. FaRis & DAV Symposium am 4. Dezember 2015 in Köln
7/2016	Eremuk, Heep-Altiner: Internes Modell am Beispiel des durchgängigen Datenmodells der „IVW Privat AG“
6/2016	Heep-Altiner, Rohlfs, Dağoğlu, Pulido, Venter: Berichtspflichten und Prozessanforderungen nach Solvency II
5/2016	Goecke: Collective Defined Contribution Plans - Backtesting based on German capital market data 1955 - 2015

4/2016	Knobloch: Bewertete inhomogene Markov-Ketten - Spezielle unterjährliche und zeitstetige Modelle
3/2016	Völler (Hrsg.): Sozialisiert durch Google, Apple, Amazon, Facebook und Co. – Kundenerwartungen und –erfahrungen in der Assekuranz. Proceedings zum 20. Kölner Versicherungssymposium am 5. November 2015 in Köln
2/2016	Materne (Hrsg.): Jahresbericht 2015 des Forschungsschwerpunkts Rückversicherung
1/2016	Institut für Versicherungswesen: Forschungsbericht für das Jahr 2015

2015

11/2015	Goecke (Hrsg.): Kapitalanlagerisiken: Economic Scenario Generator und Liquiditätsmanagement. Proceedings zum 8. FaRis & DAV Symposium am 12. Juni 2015 in Köln
10/2015	Heep-Altiner, Rohlfs: Standardformel und weitere Anwendungen am Beispiel des durchgängigen Datenmodells der „IVW Privat AG“ – Teil 2
9/2015	Goecke: Asset Liability Management in einem selbstfinanzierenden Pensionsfonds
8/2015	Strobel (Hrsg.): Management des Langlebigkeitsrisikos. Proceedings zum 7. FaRis & DAV Symposium am 5.12.2014 in Köln
7/2015	Völler, Wunder: Enterprise 2.0: Konzeption eines Wikis im Sinne des prozessorientierten Wissensmanagements
6/2015	Heep-Altiner, Rohlfs: Standardformel und weitere Anwendungen am Beispiel des durchgängigen Datenmodells der „IVW Privat AG“
5/2015	Knobloch: Momente und charakteristische Funktion des Barwerts einer bewerteten inhomogenen Markov-Kette. Anwendung bei risikobehafteten Zahlungsströmen
4/2015	Heep-Altiner, Rohlfs, Beier: Erneuerbare Energien und ALM eines Versicherungsunternehmens
3/2015	Dolgov: Calibration of Heston's stochastic volatility model to an empirical density using a genetic algorithm
2/2015	Heep-Altiner, Berg: Mikroökonomisches Produktionsmodell für Versicherungen
1/2015	Institut für Versicherungswesen: Forschungsbericht für das Jahr 2014

2014

10/2014	Müller-Peters, Völler (beide Hrsg.): Innovation in der Versicherungswirtschaft
9/2014	Knobloch: Zahlungsströme mit zinsunabhängigem Barwert
8/2014	Heep-Altiner, Münchow, Scuzzarello: Ausgleichsrechnungen mit Gauß Markow Modellen am Beispiel eines fiktiven Stornobestandes
7/2014	Grundhöfer, Röttger, Scherer: Wozu noch Papier? Einstellungen von Studierenden zu E-Books
6/2014	Heep-Altiner, Berg (beide Hrsg.): Katastrophenmodellierung - Naturkatastrophen, Man Made Risiken, Epidemien und mehr. Proceedings zum 6. FaRis & DAV Symposium am 13.06.2014 in Köln
5/2014	Goecke (Hrsg.): Modell und Wirklichkeit. Proceedings zum 5. FaRis & DAV Symposium am 6. Dezember 2013 in Köln
4/2014	Heep-Altiner, Hoos, Krahforst: Fair Value Bewertung von zedierten Reserven
3/2014	Heep-Altiner, Hoos: Vereinfachter Nat Cat Modellierungsansatz zur Rückversicherungsoptimierung
2/2014	Zimmermann: Frauen im Versicherungsvertrieb. Was sagen die Privatkunden dazu?
1/2014	Institut für Versicherungswesen: Forschungsbericht für das Jahr 2013

2013

11/2013 Heep-Altiner: Verlustabsorbierung durch latente Steuern nach Solvency II in der Schadenversicherung, Nr. 11/2013

10/2013 Müller-Peters: Kundenverhalten im Umbruch? Neue Informations- und Abschlusswege in der Kfz-Versicherung, Nr. 10/2013

9/2013 Knobloch: Risikomanagement in der betrieblichen Altersversorgung. Proceedings zum 4. FaRis & DAV-Symposium am 14. Juni 2013

8/2013 Strobel (Hrsg.): Rechnungsgrundlagen und Prämien in der Personen- und Schadenversicherung - Aktuelle Ansätze, Möglichkeiten und Grenzen. Proceedings zum 3. FaRis & DAV Symposium am 7. Dezember 2012

7/2013 Goecke: Sparprozesse mit kollektivem Risikoausgleich - Backtesting

6/2013 Knobloch: Konstruktion einer unterjährlichen Markov-Kette aus einer jährlichen Markov-Kette

5/2013 Heep-Altiner et al. (Hrsg.): Value-Based-Management in Non-Life Insurance

4/2013 Heep-Altiner: Vereinfachtes Formelwerk für den MCEV ohne Renewals in der Schadenversicherung

3/2013 Müller-Peters: Der vernetzte Autofahrer – Akzeptanz und Akzeptanzgrenzen von eCall, Werkstattvernetzung und Mehrwertdiensten im Automobilbereich

2/2013 Maier, Schimikowski (beide Hrsg.): Proceedings zum 6. Diskussionsforum Versicherungsrecht am 25. September 2012 an der FH Köln

1/2013 Institut für Versicherungswesen (Hrsg.): Forschungsbericht für das Jahr 2012

2012

11/2012 Goecke (Hrsg.): Alternative Zinsgarantien in der Lebensversicherung. Proceedings zum 2. FaRis & DAV-Symposiums am 1. Juni 2012

10/2012 Klatt, Schiegl: Quantitative Risikoanalyse und -bewertung technischer Systeme am Beispiel eines medizinischen Gerätes

9/2012 Müller-Peters: Vergleichsportale und Verbraucherwünsche

8/2012 Füllgraf, Völler: Social Media Reifegradmodell für die deutsche Versicherungswirtschaft

7/2012 Völler: Die Social Media Matrix - Orientierung für die Versicherungsbranche

6/2012 Knobloch: Bewertung von risikobehafteten Zahlungsströmen mithilfe von Markov-Ketten bei unterjährlicher Zahlweise

5/2012 Goecke: Sparprozesse mit kollektivem Risikoausgleich - Simulationsrechnungen

4/2012 Günther (Hrsg.): Privat versus Staat - Schussfahrt zur Zwangsversicherung? Tagungsband zum 16. Kölner Versicherungssymposium am 16. Oktober 2011

3/2012 Heep-Altiner/Krause: Der Embedded Value im Vergleich zum ökonomischen Kapital in der Schadenversicherung

2/2012 Heep-Altiner (Hrsg.): Der MCEV in der Lebens- und Schadenversicherung - geeignet für die Unternehmenssteuerung oder nicht? Proceedings zum 1. FaRis & DAV-Symposium am 02.12.2011 in Köln

1/2012 Institut für Versicherungswesen (Hrsg.): Forschungsbericht für das Jahr 2011

2011

5/2011 Reimers-Rawcliffe: Eine Darstellung von Rückversicherungsprogrammen mit Anwendung auf den Kompressionseffekt

4/2011 Knobloch: Ein Konzept zur Berechnung von einfachen Barwerten in der betrieblichen Altersversorgung mithilfe einer Markov-Kette

3/2011 Knobloch: Bewertung von risikobehafteten Zahlungsströmen mithilfe von Markov-Ketten

2/2011 Heep-Altiner: Performanceoptimierung des (Brutto) Neugeschäfts in der Schadenversicherung

1/2011 Goecke: Sparprozesse mit kollektivem Risikoausgleich