

---

Forschung am ivwKöln  
Band 4/2020

# Modellierung einer Cantelli-Zusage mithilfe einer bewerteten inhomogenen Markov-Kette

Ralf Knobloch

**ivw**Köln

Institut für Versicherungswesen

Fakultät für Wirtschafts-  
und Rechtswissenschaften

**Technology**  
**Arts Sciences**  
**TH Köln**

**Ralf Knobloch**

**Forschungsstelle FaRis**

## **Modellierung einer Cantelli-Zusage mithilfe einer bewerteten inhomogenen Markov-Kette**

---

### **Zusammenfassung**

In der vorliegenden Arbeit wird eine Cantelli-Zusage mithilfe einer bewerteten inhomogenen Markov-Kette modelliert. Dabei wird der Barwert des zukünftigen Zahlungsstroms als Zufallsvariable aufgefasst. Betrachtet man nur den Erwartungswert des Barwerts, so ergeben sich die für eine Cantelli-Zusage üblichen Ergebnisse. Das bedeutet, dass in dem Modell auf einen Zustand verzichtet werden kann. Dies gilt aber nicht für Streuungs- und Risikomaße.

### **Abstract**

In the present work, a Cantelli Pension Scheme is modelled using a priced inhomogeneous Markov chain. The present value of the future cash flow is regarded as a random variable. If one considers only the expected value of the present value, the usual results for a Cantelli Pension Scheme are obtained. This means that a state can be dispensed with in the model. However, this does not apply to measure of dispersion or risk.

### **Schlagwörter:**

Markov-Kette, Bewertete Markov-Kette, Cantelli-Zusage

### **Keywords:**

Markov Chain, Priced Markov Chain, Cantelli Pension Scheme

# Inhaltsverzeichnis

1. EINLEITUNG .....	2
2. GRUNDPRINZIP .....	4
3. MODELL.....	11
4. BARWERT DES ZUKÜNFTIGEN ZAHLUNGSSTROMS: CHARAKTERISTISCHE FUNKTION UND BEDINGTE MOMENTE .....	14
5. FALLBEISPIEL.....	20
6. FAZIT .....	23
LITERATURVERZEICHNIS.....	25

# 1. Einleitung

Eine Cantelli-Zusage ist ein Konstrukt der Personenversicherungsmathematik. Diese Zusage-Form kommt häufig bei Lebensversicherungsverträgen und in der betrieblichen Altersversorgung vor, z.B. bei der Invaliditäts- oder bei der Todesfalleistung. Dabei wird bei Eintritt eines Versicherungs- bzw. Versorgungsfalls das vorhandene Deckungskapital bzw. die vorhandene Pensionsrückstellung als Kapitalleistung ausgezahlt oder verrentet. Bei Lebensversicherungsverträgen wird bei Stornierung eines Vertrags oft ähnlich verfahren.

In der versicherungsmathematischen Praxis gibt es zwei Varianten eine Cantelli-Zusagen zu modellieren. Zum einen kann das Auslösen des Versicherungs- bzw. Versorgungsfalls, der zur Auszahlung oder zur Verrentung des Deckungskapital bzw. der Pensionsrückstellung führt, in die Berechnungen einbezogen werden. Zum anderen besteht die Möglichkeit diesen Versicherungs- bzw. Versorgungsfall bei der Modellierung nicht zu berücksichtigen, dafür aber die Verbleibe- und Ausscheidewahrscheinlichkeiten anzupassen. Beide Modelle führen bei einer Cantelli-Zusage zu den gleichen Prämien und zum gleichen Verlauf des Deckungskapitals bzw. der Pensionsrückstellung (vgl. [1], S. 306f). Dies begründet sich rechnerisch damit, dass gegenläufige Effekte in der entsprechenden Bilanzgleichung miteinander verrechnet werden können. In der Praxis wird daher für Cantelli-Zusagen bei der Kalkulation von Prämien und bei der Berechnung des Deckungskapitals bzw. der Pensionsrückstellung oft auf die Einbeziehung dieses Versicherungs- und Versorgungsfalls verzichtet.

Aus Sicht der Stochastik wird in der Personenversicherungsmathematik das Deckungskapital bzw. die Pensionsrückstellung i.d.R. auf Basis eines Erwartungswertansatzes für die Zufallsvariable „Barwert des zukünftigen Zahlungsstroms“ ermittelt. Für diese Erwartungswerte kann mithilfe der Bilanzgleichung ein rekursives lineares Gleichungssystem aufgestellt werden. Die Prämie und der Verlauf des Deckungskapitals bzw. der Pensionsrückstellung ergibt sich dann als Lösung dieses Gleichungssystems (vgl. [1], S. 306f). Die beiden oben beschriebenen Modellierungsansätze für eine Cantelli-Zusage führen zum gleichen linearen Gleichungssystem und damit zur gleichen Prämie und zum gleichen Verlauf des Deckungskapitals bzw. der Pensionsrückstellung. Geht man jedoch auf die zugrundeliegende Zufallsvariable „Barwert des zukünftigen Zahlungsstroms“ zurück, so können neben dem Erwartungswert auch andere Kennzahlen, z.B. Streuungs- oder Risikomaße, berechnet werden. Im Unterschied zum Erwartungswert führen die beiden unterschiedlichen Modellierungsansätzen bei einer Cantelli-Zusage für Streuungs- und Risikomaße im Allgemeinen nicht zu den gleichen Ergebnissen.

Im vorliegenden Artikel wird zunächst das Grundprinzip einer Cantelli-Zusage aus Sicht der Stochastik anhand eines einfachen Beispiels, dem  $n$ -fachen unabhängigen

Münzwurfs mit  $n$  unterschiedlichen unfairen Münzen und dessen Verallgemeinerung, dargestellt. Anschließend wird eine für die Personenversicherungsmathematik typische Cantelli-Zusage mithilfe einer bewerteten inhomogenen Markov-Kette modelliert. Sowohl beim Grundprinzip aus Sicht der Stochastik als auch bei der Modellierung mithilfe einer bewerteten inhomogenen Markov-Kette und dem darauf aufbauenden Fallbeispiel zeigt sich, dass die beiden Modellansätze zwar für den Erwartungswert der Zufallsvariablen „Barwert des zukünftigen Zahlungsstroms“ zu zum selben Gleichungssystem und damit zu gleichen Ergebnissen führen, nicht aber für die üblichen Streuungsmaße (Varianz, Standardabweichung) und für die üblichen Risikomaße (Value at Risk und Expected Shortfall).

## 2. Grundprinzip

Zur Erläuterung des Grundprinzips einer Cantelli-Zusage aus Sicht der Stochastik betrachten wir zunächst als Experiment einen  $n$ -fachen stochastisch unabhängigen Münzwurf mit  $n$  unterschiedlichen unfairen Münzen. Dabei steht die Zufallsvariable  $S_i, i = 0, \dots, n - 1$ , für das Ergebnis des  $i$ -ten Münzwurfes. Der Einfachheit halber werden bei jedem Münzwurf die Ergebnisse nicht mit „Kopf“ und „Zahl“ sondern mit „0“ und „1“ bezeichnet. Die Zufallsvariablen sind wie folgt gegeben:

$$S_i = \begin{cases} 0, & 1 - p_i \\ 1, & p_i \end{cases}, i = 0, \dots, n - 1$$

Dabei gelte  $p_i \in [0,1)$ . Das Experiment wird mit einer Zeitachse mit den Zeitpunkten  $0,1,2, \dots, n$  modelliert. Der  $i$ -te Münzwurf wird zum Zeitpunkt  $i$  ( $i = 0,1,2, \dots, n - 1$ ) durchgeführt. Mit jedem Zeitpunkt  $i$  ( $i = 0,1,2, \dots, n$ ) sind Zahlungen verbunden, deren Höhe vom Ausgang der Münzwürfe abhängt. Die Größe  $K_i$  bezeichnet ausgehend von Zeitpunkt  $i$  ( $i = 0,1,2, \dots, n$ ) die Summe der zukünftigen Zahlungen, d.h. die Differenz zukünftiger Aus- und Einzahlungen. Hierbei handelt es sich wegen der Abhängigkeit der Zahlungen von den Münzwürfen um Zufallsvariablen.

Zu den Zeitpunkten  $0,1,2, \dots, n - 1$  ist die Einzahlung des festen Betrags  $C > 0$  vorgesehen. Diese Einzahlung erfolgt unabhängig vom Ausgang des zu dem Zeitpunkt gehörenden Münzwurfs. Hat der  $i$ -te Münzwurf für  $i = 0,1,2, \dots, n - 1$  das Ergebnis „1“, so wird das Experiment beendet, d.h. es kommt nach diesem Zeitpunkt zu keinen weiteren Einzahlungen. In diesem Fall wird ein implizit definierender Betrag ausgezahlt, der als bedingter Erwartungswert der Differenz zwischen den noch ausstehenden Aus- und Einzahlungen angesetzt wird. Das Experiment endet im Zeitpunkt  $n$ . Haben alle  $n$  Münzwürfe das Ergebnis „0“, so erfolgt zum Zeitpunkt  $n$  eine Auszahlung der Höhe  $R > 0$ .

Somit gilt unter der Bedingung, dass die Münzwürfe zu den Zeitpunkten  $0,1,2, \dots, n - 1$  alle das Ergebnis „0“ haben, für die Zufallsvariable  $K_n$ :

$$K_n = R$$

Man erhält trivialerweise:

$$E(K_n | S_0 = \dots = S_{n-1} = 0) = R$$

Betrachtet man nun den Zeitpunkt  $n - 1$ , so gilt unter der Bedingung, dass alle Münzwürfe zu den Zeitpunkten  $0,1,2, \dots, n - 2$  das Ergebnis „0“ haben, die Rekursion:

$$K_{n-1} = \begin{cases} K_n - C, & S_{n-1} = 0 \\ E(K_n | S_0 = \dots = S_{n-1} = 0) - C, & S_{n-1} = 1 \end{cases}$$

Hat der  $(n - 1)$ -te Münzwurf das Ergebnis „1“, so wird der bedingte Erwartungswert ausgezahlt und das Experiment wird beendet. Im anderen Fall unterscheiden sich  $K_{n-1}$  und  $K_n$  um eine Einzahlung, d.h. um den Betrag  $C$ .

Diese Rekursion kann analog auch für die Zeitpunkte  $i = 0, 1, 2, \dots, n - 2$  aufgestellt werden. Man erhält unter der Bedingung  $\{S_0 = S_1 = \dots = S_{i-1} = 0\}$ :

$$K_i = \begin{cases} K_{i+1} - C, & S_i = 0 \\ E(K_{i+1}|S_0 = \dots = S_i = 0) - C, & S_i = 1 \end{cases}$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} & E(K_i|S_0 = \dots = S_{i-1} = 0) \\ &= E(K_i|S_0 = \dots = S_{i-1} = 0, S_i = 0) \cdot P(S_i = 0|S_0 = \dots = S_{i-1} = 0) \\ &\quad + E(K_i|S_0 = \dots = S_{i-1} = 0, S_i = 1) \cdot P(S_i = 1|S_0 = \dots = S_{i-1} = 0) \\ &= E(K_i|S_0 = \dots = S_{i-1} = S_i = 0) \cdot P(S_i = 0) \\ &\quad + E(K_i|S_0 = \dots = S_{i-1} = 0, S_i = 1) \cdot P(S_i = 1) \\ &= E(K_{i+1} - C|S_0 = \dots = S_i = 0) \cdot (1 - p_i) + (E(K_{i+1}|S_0 = \dots = S_i = 0) - C) \cdot p_i \\ &= E(K_{i+1}|S_0 = \dots = S_i = 0) - C \end{aligned}$$

für alle  $i = 0, 1, 2, \dots, n - 1$ .

Löst man diese Rekursion schrittweise auf, so ergibt sich für  $i \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$  die Formel:

$$E(K_i|S_0 = \dots = S_{i-1} = 0) = R - (n - i) \cdot C$$

Unter der Annahme  $E(K_0) = 0$ , lässt sich daraus der Betrag  $C$  wie folgt ermitteln:

$$E(K_0) = 0 \Leftrightarrow R - n \cdot C = 0 \Leftrightarrow C = \frac{R}{n}$$

Damit erhält man:

$$E(K_i|S_0 = \dots = S_{i-1} = 0) = R - (n - i) \cdot C = R - \frac{n - i}{n} \cdot R = \frac{i}{n} \cdot R$$

Insbesondere hängen weder der Betrag  $C$  noch die bedingten Erwartungswerte  $E(K_i|S_0 = \dots = S_{i-1} = 0)$  von der Wahl der Wahrscheinlichkeiten  $p_i$  ab.

Ferner ist für  $i = 0, 1, 2, \dots, n$  gegeben  $\{S_0 = \dots = S_{i-1} = 0\}$  die Zufallsvariable  $K_i$  eine Konstante. Insbesondere gilt unter dieser Bedingung  $K_i = \frac{i}{n} \cdot R$ . Dies kann mit vollständiger Induktion wie folgt bewiesen werden:

$i = n$ : Gegeben alle Münzwürfe haben das Ergebnis „0“ gilt per Definition  $K_n = R$ .

$i = n - 1$ :

Falls  $S_{n-1} = 0$ , so gilt  $K_{n-1} = K_n - C = R - C$ . Im Fall  $S_{n-1} = 1$  ergibt sich

$$K_{n-1} = E(K_n|S_0 = \dots = S_{n-1} = 0) - C = R - C.$$

Somit erhält man in beiden Fällen  $K_{n-1} = R - C = R - \frac{R}{n} = \frac{n-1}{n} \cdot R$ .

$i + 1 \rightarrow i$ :

Hat der  $i$ -te Münzwurf das Ergebnis „0“, so gilt:  $K_i = K_{i+1} - C = \frac{i+1}{n} \cdot R - \frac{1}{n} \cdot R = \frac{i}{n} \cdot R$

Hat der  $i$ -te Münzwurf das Ergebnis „1“, so hat man:

$$K_i = E(K_{i+1} | S_0 = \dots = S_i = 0) - C = \frac{i+1}{n} \cdot R - \frac{1}{n} \cdot R = \frac{i}{n} \cdot R$$

□

Setzt man dieses Beispiel in den Kontext der Personenversicherungsmathematik und verwendet als Deckungskapital zum Zeitpunkt  $i \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$  den bedingten Erwartungswert  $E(K_i | S_0 = \dots = S_{i-1} = 0)$ , so hängt der Verlauf des Deckungskapitals nicht von der Wahl der Wahrscheinlichkeiten  $p_i$  ab. Diese Invarianz bezüglich der Wahl der Wahrscheinlichkeiten ergibt in diesem einfachen Beispiel schon auf der Ebene der Zufallsvariablen  $K_i$  und nicht erst auf der Ebene von Kennzahlen. Da es sich gegeben  $\{S_0 = \dots = S_{i-1} = 0\}$  bei der Zufallsvariablen  $K_i$  um konstante Größen handelt, sind die bedingten Streuungsmaße (Varianz und Standardabweichung) trivialerweise jeweils null und die bedingten Risikomaße Value at Risk und Expected Shortfall nehmen ebenfalls trivialerweise jeweils den konstanten Wert an.

Die „Finanzierung“ bzw. der „Preis“ dieses Experiments hängt somit nicht von der Wahl der Wahrscheinlichkeiten  $p_i$  ab. Die Wahl der Wahrscheinlichkeiten definiert lediglich das zeitliche Auszahlungsprofil des Experiments.

Setzt man insbesondere für alle  $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$  die Wahrscheinlichkeit für das Ergebnis „1“ mit null an, so ergibt sich der gleiche Verlauf für das Deckungskapital wie bei jedem anderen Ansatz auch. Somit können der Einfachheit halber alle Wahrscheinlichkeiten  $p_i = 0$  gesetzt werden, d.h. das Risiko das aus den Münzwürfen entsteht, kann bei der Kalkulation des Betrags  $C$  und des Deckungskapitals unberücksichtigt bleiben.

Ein etwas differenzierteres Bild ergibt sich, wenn man in dem Modell keine Münzwürfe mit zwei möglichen Ausgängen zugrunde legt, sondern in jedem Zeitpunkt ein Zufallsexperiment mit mehr als zwei möglichen Ausgängen. Die Experimente sollen weiterhin stochastisch unabhängig sein und bei einem der Ausgänge wird als Leistung die bedingte Erwartungswert der Differenz der zukünftigen Aus- und Einzahlungen ausgezahlt. In diesem Fall kann im Kontext der Personenversicherungsmathematik bei der Bestimmung der Prämie und des Deckungskapitals ebenfalls auf die Einbeziehung des Ausgangs, bei dem die bedingte erwartete Differenz der zukünftigen Aus- und Einzahlungen ausgezahlt wird, verzichtet werden.

Wir ersetzen in obigem Beispiel den  $n$ -fachen stochastisch unabhängigen Münzwurf durch die  $n$  stochastisch unabhängigen Zufallsvariablen

$$S_i = \begin{cases} 0, & 1 - (p_{1i} + p_{2i} + \dots + p_{mi}) \\ 1, & p_{1i} \\ 2, & p_{2i} \\ \dots & \dots \\ m, & p_{mi} \end{cases} .$$

Dabei sei  $0 \leq p_{ji} \leq 1$  für alle  $j \in \{1, 2, \dots, m\}$  und  $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ . Des Weiteren gelte für alle  $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ :  $0 \leq p_{1i} + p_{2i} + \dots + p_{mi} < 1$ .

Zu den Zeitpunkten  $0, 1, 2, \dots, n-1$  ist wiederum die Einzahlung des Betrags  $C > 0$  vorgesehen. Diese Einzahlung erfolgt unabhängig vom Wert der zu dem Zeitpunkt gehörenden Zufallsvariablen. Hat der  $i$ -te Zufallsvariable für  $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$  das Ergebnis „ $j$ “ ( $1 \leq j \leq m$ ), so wird das Experiment beendet. Für  $j = 1, \dots, m-1$  wird der Betrag  $R_{j,i} \geq 0$  ausgezahlt. Nimmt die  $i$ -te Zufallsvariable den Wert  $m$  an, so wird ein implizit definierender Betrag ausgezahlt, der als bedingter Erwartungswert der Differenz zwischen den noch ausstehenden Aus- und Einzahlungen angesetzt wird. In beiden Fällen kommt es nach diesem Zeitpunkt zu keinen weiteren Einzahlungen. Das Experiment endet im Zeitpunkt  $n$ . Haben alle  $n$  Zufallsvariablen den Wert „0“, so erfolgt zum Zeitpunkt  $n$  eine Auszahlung der Höhe  $R > 0$ .

Zunächst gilt gegeben  $\{S_0 = \dots = S_{n-1} = 0\}$ :

$$K_n = R$$

Analog zu obigem Beispiel ergibt sich dann für  $i = 0, 1, \dots, n-1$  unter der Bedingung  $\{S_0 = \dots = S_{i-1} = 0\}$  für folgende Rekursion:

$$K_i = \begin{cases} K_{i+1} - C, & S_i = 0 \\ R_{1,i} - C & S_i = 1 \\ \dots & \\ R_{m-1,i} - C & S_i = m-1 \\ E(K_{i+1} | S_0 = \dots = S_i = 0) - C & S_i = m \end{cases} , i = 0, 1, \dots, n-1$$

Damit erhält man für den bedingten Erwartungswert im Zeitpunkt  $n$

$$E(K_n | S_0 = \dots = S_{n-1} = 0) = R$$

und für die Zeitpunkte  $i = 0, 1, \dots, n-1$

$$\begin{aligned}
& E(K_i | S_0 = \dots = S_{i-1} = 0) \\
&= \sum_{j=0}^m E(K_i | S_0 = \dots = S_{i-1} = 0, S_i = j) \cdot P(S_i = j | S_0 = \dots = S_{i-1} = 0) \\
&= \sum_{j=0}^m E(K_i | S_0 = \dots = S_{i-1} = 0, S_i = j) \cdot P(S_i = j) \\
&= E(K_{i+1} - C | S_0 = \dots = S_{i-1} = S_i = 0) \cdot P(S_i = 0) \\
&+ \sum_{j=1}^{m-1} (R_{j,i} - C) \cdot P(S_i = j) + (E(K_{i+1} | S_0 = \dots = S_i = 0) - C) \cdot P(S_i = m) \\
&= E(K_{i+1} - C | S_0 = \dots = S_i = 0) \cdot (1 - (p_{1i} + p_{2i} + \dots + p_{mi})) \\
&+ \sum_{j=1}^{m-1} (R_{j,i} - C) \cdot p_{ji} + (E(K_{i+1} | S_0 = \dots = S_i = 0) - C) \cdot p_{mi} = \\
&= E(K_{i+1} | S_0 = \dots = S_i = 0) \cdot (1 - (p_{1i} + p_{2i} + \dots + p_{m-1i})) + \\
&+ \sum_{j=1}^{m-1} R_{j,i} \cdot p_{ji} - C
\end{aligned}$$

Somit ist die Rekursion unabhängig von der Auswahl der Wahrscheinlichkeiten  $p_{mi}$  ( $i = 0, 1, \dots, n-1$ ). Insbesondere können diese Wahrscheinlichkeiten alle mit null angesetzt werden. D.h. verwendet man in diesem Beispiel im Kontext der Personenversicherungsmathematik als Deckungskapital den bedingten Erwartungswert

$$E(K_i | S_0 = \dots = S_{i-1} = 0)$$

und als Prämie den Betrag  $C$ , so hängen der Verlauf des Deckungskapitals und die Prämie nicht von den Wahrscheinlichkeiten  $p_{mi}$  ( $i = 0, 1, \dots, n-1$ ) ab.

Dies gilt aber nicht für die bedingten Streuungsmaße, z.B. die bedingte Varianz

$$\text{Var}(K_i | S_0 = \dots = S_{i-1} = 0).$$

Trivialerweise erhält man für den Zeitpunkt  $n$

$$\text{Var}(K_n | S_0 = \dots = S_{n-1} = 0) = 0.$$

Für  $i = 0, 1, \dots, n-1$  ergibt sich zunächst

$$\begin{aligned}
& E((K_i + C)^2 | S_0 = \dots = S_{i-1}) \\
&= \sum_{j=0}^m E((K_i + C)^2 | S_0 = \dots = S_{i-1} = 0, S_i = j) \cdot P(S_i = j | S_0 = \dots = S_{i-1} = 0)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j=0}^m E((K_i + C)^2 | S_0 = \dots = S_{i-1} = 0, S_i = j) \cdot P(S_i = j) \\
&= E(K_{i+1}^2 | S_0 = \dots = S_{i-1} = S_i = 0) \cdot P(S_i = 0) \\
&\quad + \sum_{j=1}^{m-1} R_{j,i}^2 \cdot P(S_i = j) + (E(K_{i+1} | S_0 = \dots = S_i = 0))^2 \cdot P(S_i = m) \\
&= E(K_{i+1}^2 | S_0 = \dots = S_i = 0) \cdot (1 - (p_{1i} + p_{2i} + \dots + p_{mi})) \\
&\quad + \sum_{j=1}^{m-1} R_{j,i}^2 \cdot p_{ji} + (E(K_{i+1} | S_0 = \dots = S_i = 0))^2 \cdot p_{mi}
\end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned}
\text{Var}(K_i | S_0 = \dots = S_{i-1} = 0) &= \text{Var}(K_i + C | S_0 = \dots = S_{i-1} = 0) \\
&= E((K_i + C)^2 | S_0 = \dots = S_{i-1} = 0) - (E(K_i + C | S_0 = \dots = S_{i-1} = 0))^2 \\
&= E((K_i + C)^2 | S_0 = \dots = S_{i-1} = 0) - (E(K_i | S_0 = \dots = S_{i-1} = 0) + C)^2 \\
&= E(K_{i+1}^2 | S_0 = \dots = S_i = 0) \cdot (1 - (p_{1i} + p_{2i} + \dots + p_{mi})) \\
&\quad + \sum_{j=1}^{m-1} R_{j,i}^2 \cdot p_{ji} + (E(K_{i+1} | S_0 = \dots = S_i = 0))^2 \cdot p_{mi} \\
&\quad - \left( E(K_{i+1} | S_0 = \dots = S_i = 0) \cdot (1 - (p_{1i} + p_{2i} + \dots + p_{m-1i})) + \sum_{j=1}^{m-1} R_{j,i} \cdot p_{ji} \right)^2 \\
&= E(K_{i+1}^2 | S_0 = \dots = S_i = 0) \cdot (1 - (p_{1i} + p_{2i} + \dots + p_{m-1i})) + \sum_{j=1}^{m-1} R_{j,i}^2 \cdot p_{ji} \\
&\quad - \left( E(K_{i+1} | S_0 = \dots = S_i = 0) \cdot (1 - (p_{1i} + p_{2i} + \dots + p_{m-1i})) + \sum_{j=1}^{m-1} R_{j,i} \cdot p_{ji} \right)^2 \\
&\quad - (E(K_{i+1}^2 | S_0 = \dots = S_i = 0) - (E(K_{i+1} | S_0 = \dots = S_i = 0))^2) \cdot p_{mi} \\
&= E(K_{i+1}^2 | S_0 = \dots = S_i = 0) \cdot (1 - (p_{1i} + p_{2i} + \dots + p_{m-1i})) \\
&\quad - (E(K_{i+1} | S_0 = \dots = S_i = 0) \cdot (1 - (p_{1i} + p_{2i} + \dots + p_{m-1i})))^2 \\
&\quad - 2 \cdot E(K_{i+1} | S_0 = \dots = S_i = 0) \cdot (1 - (p_{1i} + p_{2i} + \dots + p_{m-1i})) \cdot \sum_{j=1}^{m-1} R_{j,i} \cdot p_{ji}
\end{aligned}$$

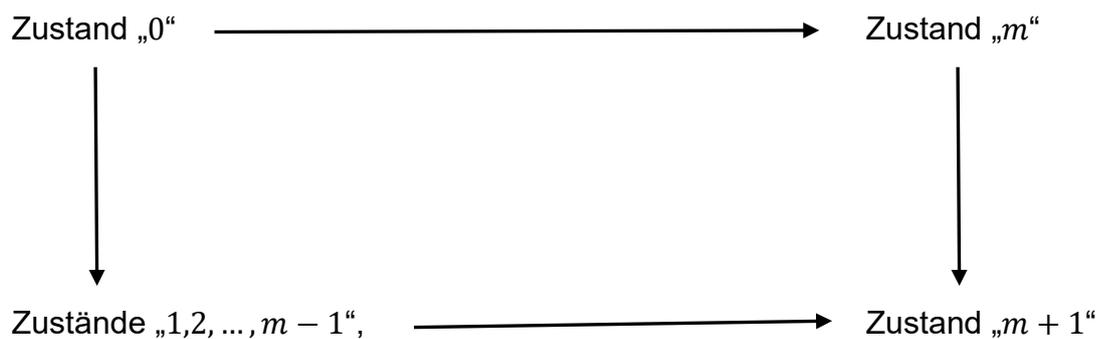
$$\begin{aligned}
& + \sum_{j=1}^{m-1} R_{j,i}^2 \cdot p_{ji} - \left( \sum_{j=1}^{m-1} R_{j,i} \cdot p_{ji} \right)^2 - \text{Var}(K_{i+1} | S_0 = \dots = S_i = 0) \cdot p_{mi} \\
& = \text{Var}(K_{i+1} | S_0 = \dots = S_i = 0) \cdot (1 - (p_{1i} + p_{2i} + \dots + p_{m-1i})) \\
& + (E(K_{i+1} | S_0 = \dots = S_i = 0))^2 \cdot (1 - (p_{1i} + p_{2i} + \dots + p_{m-1i})) \cdot (p_{1i} + p_{2i} + \dots + p_{m-1i}) \\
& - 2 \cdot E(K_{i+1} | S_1 = S_2 = \dots = S_i = 0) \cdot (1 - (p_{1i} + p_{2i} + \dots + p_{m-1i})) \cdot \sum_{j=1}^{m-1} R_{j,i} \cdot p_{ji} \\
& + \sum_{j=1}^{m-1} R_{j,i}^2 \cdot p_{ji} - \left( \sum_{j=1}^{m-1} R_{j,i} \cdot p_{ji} \right)^2 - \text{Var}(K_{i+1} | S_1 = S_2 = \dots = S_i = 0) \cdot p_{mi} \\
& = \text{Var}(K_{i+1} | S_0 = \dots = S_i = 0) \cdot (1 - (p_{1i} + p_{2i} + \dots + p_{mi})) \\
& + (E(K_{i+1} | S_0 = \dots = S_i = 0))^2 \cdot (1 - (p_{1i} + p_{2i} + \dots + p_{m-1i})) \cdot (p_{1i} + p_{2i} + \dots + p_{m-1i}) \\
& - 2 \cdot E(K_{i+1} | S_1 = S_2 = \dots = S_i = 0) \cdot (1 - (p_{1i} + p_{2i} + \dots + p_{m-1i})) \cdot \sum_{j=1}^{m-1} R_{j,i} \cdot p_{ji} \\
& + \sum_{j=1}^{m-1} R_{j,i}^2 \cdot p_{ji} - \left( \sum_{j=1}^{m-1} R_{j,i} \cdot p_{ji} \right)^2
\end{aligned}$$

Der erste Teil dieser Rekursion hängt somit von der Wahl der Wahrscheinlichkeiten  $p_{mi}$  ( $i = 0, 1, \dots, n-1$ ) ab, wohingegen der Rest unabhängig davon ist. Der Verlauf der bedingten Varianz ist daher (im Unterschied zum Verlauf des bedingten Erwartungswerts) abhängig von diesen Wahrscheinlichkeiten.

### 3. Modell

Zur Modellierung einer Cantelli-Zusage mithilfe einer bewerteten inhomogenen Markov-Kette werden zunächst  $m + 2$  Zustände ( $m \geq 2$ ) definiert und mit  $0, 1, 2, \dots, m, m + 1$  durchnummeriert. Die Zeitachse wird unterteilt in die  $n + 1$  Zeitpunkte  $t = 0, 1, \dots, n$ . Wobei der Zeitraum zwischen zwei Zeitpunkten als Periode interpretiert wird. Mit jedem Zustand sind bestimmte Ein- und Auszahlungen verbunden. Die Einzahlungen in Höhe  $C > 0$  sind in jeder Periode gleich, die Zahlweise sei vorschüssig. Die Zahlweise der Auszahlungen in einer Periode sei nachschüssig, d.h. die Auszahlungen sind zu den Zeitpunkten  $1, 2, \dots, n$  vorgesehen. Das Modell startet im Zustand „0“, in jeder Periode sind Übergänge in andere Zustände möglich. Ausgehend vom Zustand „0“ ist neben dem Verbleib ein Übergang in einen der Zustände  $1, 2, \dots, m$  möglich. Bei einem Übergang von Zustand „0“ in einen der Zustände „ $j$ “ ( $1 \leq j \leq m - 1$ ) erfolgt eine Auszahlung, deren Höhe  $R_{j,t} \geq 0$  von dem Zeitpunkt  $t = 0, 1, \dots, n - 1$  abhängig ist. Der Übergang in den Zustand „ $m$ “ ist mit einer Auszahlung in Höhe des bedingten Erwartungswerts des zukünftigen Zahlungsstroms verbunden. In den Zuständen  $1, 2, \dots, m$  ist ein Verbleib nicht möglich, es erfolgt in der nächsten Periode ein Übergang in den Zustand „ $m + 1$ “, der weder mit Aus- noch mit Einzahlungen verbunden ist. Bei einem Verbleib im Zustand „0“ bis Ende der  $n$ -ten Periode erfolgt eine Auszahlung in Höhe  $R > 0$ . Andere als die hier beschriebenen Übergänge sind im Modell nicht enthalten.

Grafisch lassen sich die möglichen Übergänge wie folgt darstellen:



Gegeben sei also eine inhomogene Markov-Kette  $(X_t)_{t=0,1,2,\dots,n}$  mit dem endlichen Zustandsraum  $S = \{0,1,2, \dots, m+1\}$ , wobei  $m \geq 2$ . Gegeben seien  $n+1$  stochastische  $(m+2) \times (m+2)$ -Matrizen

$$Q(t) = (q_{jk}(t))_{j,k \in S},$$

$t = 0,1,2, \dots, n$  (vgl. [2]).

Dabei können lediglich die zum Zustand „0“ gehörende Zeile und die zum Zustand „ $m+1$ “ gehörende Spalte mit Wahrscheinlichkeiten ungleich null besetzt sein, d.h. es gilt für alle  $t \in \{0,1,2, \dots, n\}$

$$q_{jk}(t) = 0,$$

falls  $j \neq 0$  und  $k \neq m+1$ . Ferner gilt für alle  $t \in \{0,1,2, \dots, n\}$

$$q_{0m+1}(t) = 0$$

und

$$q_{jm+1}(t) = 1 \text{ falls } j \neq 0.$$

Zusätzlich gelte

$$q_{00}(n) = 1.$$

Die Verteilung der Zufallsvariablen  $X_t$ ,  $t = 0,1,2, \dots, n$ , sei gegeben durch den Zeilenvektor  $P_t = (P_{t,j})_{j \in S}$ , d.h.

$$P(X_t = j) = P_{t,j}, j \in S.$$

Die Anfangsverteilung ist gegeben durch:

$$P_0 = e \cdot Q(0),$$

dabei sei  $e$  der Vektor

$$e := (1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0).$$

Die stochastischen Matrizen  $Q(1), Q(2), \dots, Q(n)$  sind die Übergangsmatrizen der inhomogenen Markov-Kette, d.h. für die Übergangswahrscheinlichkeiten vom Zeitpunkt  $t-1$  zum Zeitpunkt  $t$  sei

$$q_{jk}(t) := P(X_t = k | X_{t-1} = j), j, k \in S \text{ und } t = 1,2, \dots, n.$$

Die Markov-Kette heißt inhomogen, da die Übergangsmatrizen von dem Zeitparameter  $t$  abhängen (vgl. [6], S.16f). Unter Anwendung der Chapman-Kolmogorov-Gleichung für Markov-Ketten (vgl. [6], S.14) gilt dann für  $t = 0,1,2, \dots, n$ :

$$P_t = P_0 \cdot \prod_{s=1}^t Q(s) = e \cdot \prod_{s=0}^t Q(s)$$

Für die inhomogene Markov-Kette wird nun durch die Spaltenvektoren

$$L_t = (L_{t,j})_{j \in S}, \quad t = 0, 1, 2, \dots, n,$$

eine Bewertung definiert, die in jedem Zeitpunkt jedem möglichen Zustand eine reelle Zahl bzw. eine Aus- oder Einzahlung zuordnet.

Für  $t \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$  sei die Zufallsvariable „Barwert des zukünftigen Zahlungsstroms zum Zeitpunkt  $t$ “ gegeben durch:

$$B_t = \sum_{s=t}^n \sum_{j=0}^{m+1} 1_{\{X_s=j\}} \cdot v^{s-t} \cdot L_{s,j}$$

Dabei sei  $v$  der Diskontierungsfaktor gegeben durch  $v = \frac{1}{1+r}$  und  $r > -1$  der zeitlich konstante Rechnungszins pro Periode.

Zur Modellierung der Cantelli-Zusage werden die Spaltenvektoren wie folgt gewählt:

$$L_t = \begin{pmatrix} -C \\ v \cdot R_{1,t} - C \\ \vdots \\ v \cdot R_{m-1,t} - C \\ v \cdot E(B_{t+1} | X_{t+1-} = 0) - C \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{für alle } t \in \{0, 1, \dots, n-1\}$$

$$\text{und } L_n = \begin{pmatrix} R \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$X_{t+1-}$  bedeutet dabei, dass der mit der stochastischen Matrix  $Q(t+1)$  modellierte Zustandswechsel noch nicht stattgefunden hat.



Es gilt:

$$E(B_n | X_{n-} = 0) = v^0 \cdot e \cdot Q(n) \cdot L_n = R$$

Für die Zufallsvariablen  $B_t$ ,  $t \in \{0, 1, \dots, n-1\}$  ergibt sich:

$$\begin{aligned} E(B_t | X_{t-} = 0) &= v^0 \cdot e \cdot Q(t) \cdot L_t + v \cdot \sum_{s=t+1}^n v^{s-(t+1)} \cdot e \cdot \prod_{k=t}^s Q(k) \cdot L_s \\ &= e \cdot Q(t) \cdot L_t + v \cdot \sum_{s=t+1}^n v^{s-(t+1)} \cdot (q_{00}(t) \quad q_{01}(t) \quad \dots \quad q_{0m+1}(t)) \cdot \prod_{k=t+1}^s Q(k) \cdot L_s \\ &= e \cdot Q(t) \cdot L_t + v \cdot \sum_{s=t+1}^n v^{s-(t+1)} \cdot q_{00}(t) \cdot e \cdot \prod_{k=t+1}^s Q(k) \cdot L_s \end{aligned}$$

Das letzte Gleichheitszeichen gilt, da für alle Zustände  $j \neq 0$  vom Zeitpunkt  $t$  zum Zeitpunkt  $t+1$  ein Übergang in den Zustand  $m+1$  erfolgt, dieser Zustand danach aber nicht mehr verlassen wird und dieser Zustand weder mit einer Aus- noch mit einer Einzahlung verbunden ist. Das weitere Umformen liefert die Rekursion:

$$E(B_t | X_{t-} = 0) = e \cdot Q(t) \cdot L_t + v \cdot q_{00}(t) \cdot E(B_{t+1} | X_{t+1-} = 0)$$

Dies entspricht der Rekursionsformel aus Kapitel 2, wie folgende Überlegungen zeigen:

$$\begin{aligned} E(B_t | X_{t-} = 0) &= e \cdot Q(t) \cdot L_t + v \cdot q_{00}(t) \cdot E(B_{t+1} | X_{t+1-} = 0) \\ &= (q_{00}(t) \quad q_{01}(t) \quad \dots \quad q_{0m+1}(t)) \cdot \begin{pmatrix} -C \\ v \cdot R_{1,t} - C \\ \vdots \\ v \cdot R_{m-1,t} - C \\ v \cdot E(B_{t+1} | X_{t+1-} = 0) - C \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\quad + v \cdot q_{00}(t) \cdot E(B_{t+1} | X_{t+1-} = 0) \\ &= \sum_{j=1}^{m-1} q_{0j}(t) \cdot v \cdot R_{j,t} + q_{0m}(t) \cdot v \cdot E(B_{t+1} | X_{t+1-} = 0) - \sum_{j=0}^m q_{0j}(t) \cdot C \\ &\quad + v \cdot \left(1 - (q_{01}(t) + q_{02}(t) + \dots + q_{0m+1}(t))\right) \cdot E(B_{t+1} | X_{t+1-} = 0) \\ &= \sum_{j=1}^{m-1} q_{0j}(t) \cdot v \cdot R_{j,t} - C \\ &\quad + v \cdot \left(1 - (q_{01}(t) + q_{02}(t) + \dots + q_{0m-1}(t))\right) \cdot E(B_{t+1} | X_{t+1-} = 0) \end{aligned}$$

Damit ist analog zu Kapitel 2 auch diese Rekursion unabhängig von den Übergangswahrscheinlichkeiten vom Zustand „0“ in den Zustand „m“. Möchte man

lediglich den Verlauf des bedingten Erwartungswerts und die Einzahlung  $C$  berechnen, so kann bei der Modellierung in Kapitel 3 auf den Zustand „ $m$ “ verzichtet werden. Dies entspricht auch den Überlegungen in [1], S. 306f. Es gilt aber nicht für den Verlauf der bedingten Varianz, wie der folgende Satz zeigt.

Satz:

Es sei  $(\tilde{X}_t)_{t=0,1,2,\dots,n}$  die inhomogene Markov-Kette mit dem endlichen Zustandsraum  $\tilde{S} = \{0,1,2, \dots, m-1, m+1\}$  und den stochastischen Matrizen  $\tilde{Q}(t)$ . Dabei gelte

- $\tilde{q}_{jk}(t) = q_{jk}(t)$  für alle  $(j, k) \in \tilde{S} \times \tilde{S}$  mit  $(j, k) \neq (0,0)$  und
- $\tilde{q}_{00}(t) = q_{00}(t) + q_{0m}(t)$

für alle  $t \in \{0,1, \dots, n\}$ :

Streicht man bei den Spaltenvektoren der Bewertung  $L_t$  die  $m$ -te Zeile, so erhält man die Bewertung für die inhomogene Markov-Kette  $(\tilde{X}_t)_{t=0,1,2,\dots,n}$ , d.h. die Spaltenvektoren  $\tilde{L}_t$ .

Für  $t \in \{0,1,2, \dots, n\}$  sei  $\tilde{B}_t$  der analog definierte Barwert des zukünftigen Zahlungsstroms zum Zeitpunkt  $t$ .

Es gilt:

a) Es gilt die Rekursion:

$$E(B_n | X_{n-} = 0) = R$$

$$E(B_t | X_{t-} = 0) = \sum_{j=1}^{m-1} v \cdot R_{j,t} \cdot q_{0j}(t) - C$$

$$+ v \cdot \left(1 - (q_{01}(t) + \dots + q_{0m-1}(t))\right) \cdot E(B_{t+1} | X_{t+1-} = 0)$$

für alle  $t \in \{0,1,2, \dots, n-1\}$ .

b) Die bewertete inhomogene Markov-Kette  $(\tilde{X}_t)_{t=0,1,2,\dots,n}$  bzw. die bedingten Erwartungswerte der Barwerte des zukünftigen Zahlungsstroms genügen ebenfalls dieser Rekursion und es gilt für alle  $t \in \{0,1,2, \dots, n\}$ :

$$E(B_t | X_{t-} = 0) = E(\tilde{B}_t | \tilde{X}_{t-} = 0)$$

c) Für die bedingten Varianzen gilt die Rekursion:

$$\text{Var}(B_n | X_{n-} = 0) = 0$$

$$\frac{\text{Var}(B_t | X_{t-} = 0)}{v^2} = \text{Var}(B_{t+1} | X_{t+1-} = 0) \cdot \left(1 - (q_{01}(t) + \dots + q_{0m}(t))\right)$$

$$+ (E(B_{t+1} | X_{t+1-} = 0))^2 \cdot \left(1 - (q_{01}(t) + \dots + q_{0m-1}(t))\right) \cdot (q_{01}(t) + \dots + q_{0m-1}(t))$$

$$\begin{aligned}
& -2 \cdot E(B_{t+1}|X_{t+1-} = 0) \cdot \left(1 - (q_{01}(t) + \dots + q_{0m-1}(t))\right) \cdot \sum_{j=1}^{m-1} R_{j,t} \cdot q_{0j}(t) \\
& + \sum_{j=1}^{m-1} R_{j,t}^2 \cdot q_{0j}(t) - \left(\sum_{j=1}^{m-1} R_{j,t} \cdot q_{0j}(t)\right)^2
\end{aligned}$$

für alle  $t \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ .

d) Für die bedingten Varianzen gilt die Rekursion:

$$Var(\tilde{B}_n | \tilde{X}_{n-} = 0) = 0$$

$$\frac{Var(\tilde{B}_t | \tilde{X}_{t-} = 0)}{v^2} = Var(\tilde{B}_{t+1} | \tilde{X}_{t+1-} = 0) \cdot \left(1 - (\tilde{q}_{01}(t) + \dots + \tilde{q}_{0m-1}(t))\right)$$

$$+ \left(E(\tilde{B}_{t+1} | \tilde{X}_{t+1-} = 0)\right)^2 \cdot \left(1 - (\tilde{q}_{01}(t) + \dots + \tilde{q}_{0m-1}(t))\right) \cdot (\tilde{q}_{01}(t) + \dots + \tilde{q}_{0m-1}(t))$$

$$- 2 \cdot E(\tilde{B}_{t+1} | \tilde{X}_{t+1-} = 0) \cdot \left(1 - (\tilde{q}_{01}(t) + \dots + \tilde{q}_{0m-1}(t))\right) \cdot \sum_{j=1}^{m-1} R_{j,t} \cdot \tilde{q}_{0j}(t)$$

$$+ \sum_{j=1}^{m-1} R_{j,t}^2 \cdot \tilde{q}_{0j}(t) - \left(\sum_{j=1}^{m-1} R_{j,t} \cdot \tilde{q}_{0j}(t)\right)^2$$

für alle  $t \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$

e) Für alle  $t \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$  gilt:

$$Var(B_t | X_{t-} = 0) = Var(\tilde{B}_t | \tilde{X}_{t-} = 0) - Var(\tilde{B}_{t+1} | \tilde{X}_{t+1-} = 0) \cdot q_{0m}(t) \cdot v^2$$

$$+ \left(Var(B_{t+1} | X_{t+1-} = 0) - Var(\tilde{B}_{t+1} | \tilde{X}_{t+1-} = 0)\right) \cdot \left(1 - (q_{01}(t) + \dots + q_{0m}(t))\right) \cdot v^2$$

f) Für alle  $t \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$  gilt:  $Var(B_t | X_{t-} = 0) \leq Var(\tilde{B}_t | \tilde{X}_{t-} = 0)$

Beweis:

Die Behauptungen in a) und b) folgen direkt aus den obigen Überlegungen.

c) und d) ergeben sich analog zu der Rekursion für die bedingten Varianzen in Kapitel 2 wie folgt:

Trivialerweise gilt  $Var(B_n | X_{n-} = 0) = 0$ .

Es sei nun  $t \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ . Gegeben  $\{X_{t-} = 0, X_{t+1-} = 0\}$  gilt  $v \cdot B_{t+1} - B_t = C$ . Damit erhält man zunächst:

$$E((B_t + C)^2 | X_{t-} = 0) = \sum_{j=0}^{m+1} E((B_t + C)^2 | X_{t-} = 0, X_{t+1-} = j) \cdot P(X_{t+1-} = j | X_{t-} = 0)$$

$$\begin{aligned}
&= E(v^2 \cdot B_{t+1}^2 | X_{t-} = 0, X_{t+1-} = 0) \cdot q_{00}(t) + \sum_{j=1}^{m-1} v^2 \cdot R_{j,t}^2 \cdot q_{0j}(t) \\
&+ v^2 \cdot (E(B_{t+1} | X_{t-} = 0))^2 \cdot q_{0m}(t) \\
&= E(B_{t+1}^2 | X_{t+1-} = 0) \cdot v^2 \cdot (1 - (q_{01}(t) + \dots + q_{0m}(t))) \\
&+ \sum_{j=1}^{m-1} v^2 \cdot R_{j,t}^2 \cdot q_{0j}(t) + (E(B_{t+1} | X_{t+1-} = 0))^2 \cdot v^2 \cdot q_{0m}(t)
\end{aligned}$$

Daraus ergibt sich:

$$\begin{aligned}
&Var(B_t | X_{t-} = 0) = Var(B_t + C | X_{t-} = 0) = \\
&= E((B_t + C)^2 | X_{t-} = 0) - (E(B_t | X_{t-} = 0) + C)^2 \\
&= E(B_{t+1}^2 | X_{t+1-} = 0) \cdot v^2 \cdot (1 - (q_{01}(t) + \dots + q_{0m}(t))) \\
&+ \sum_{j=1}^{m-1} v^2 \cdot R_{j,t}^2 \cdot q_{0j}(t) + (E(B_{t+1} | X_{t+1-} = 0))^2 \cdot v^2 \cdot q_{0m}(t) \\
&- \left( \sum_{j=1}^{m-1} v \cdot R_{j,t} \cdot q_{0j}(t) + v \cdot (1 - (q_{01}(t) + \dots + q_{0m-1}(t))) \cdot E(B_{t+1} | X_{t+1-} = 0) \right)^2 \\
&= Var(B_{t+1} | X_{t+1-} = 0) \cdot (1 - (q_{01}(t) + \dots + q_{0m}(t))) \cdot v^2 \\
&+ (E(B_{t+1} | X_{t+1-} = 0))^2 \cdot (1 - (q_{01}(t) + \dots + q_{0m-1}(t))) \cdot (q_{01}(t) + \dots + q_{0m-1}(t)) \cdot v^2 \\
&- 2 \cdot E(B_{t+1} | X_{t+1-} = 0) \cdot (1 - (q_{01}(t) + \dots + q_{0m-1}(t))) \cdot \sum_{j=1}^{m-1} R_{j,t} \cdot q_{0j}(t) \cdot v^2 \\
&+ \left( \sum_{j=1}^{m-1} R_{j,t}^2 \cdot q_{0j}(t) - \left( \sum_{j=1}^{m-1} R_{j,t} \cdot q_{0j}(t) \right)^2 \right) \cdot v^2
\end{aligned}$$

Damit folgt die Behauptung aus c). Der Beweis für d) geht analog.

Subtrahiert man die Rekursion in d) von der Rekursion in c) und multipliziert man das Ergebnis mit  $v^2$ , so erhält man:

$$\begin{aligned}
&Var(B_t | X_{t-} = 0) - Var(\tilde{B}_t | \tilde{X}_{t-} = 0) \\
&= Var(B_{t+1} | X_{t+1-} = 0) \cdot (1 - (q_{01}(t) + \dots + q_{0m}(t))) \cdot v^2 \\
&- Var(\tilde{B}_{t+1} | \tilde{X}_{t+1-} = 0) \cdot (1 - (\tilde{q}_{01}(t) + \dots + \tilde{q}_{0m-1}(t))) \cdot v^2
\end{aligned}$$

$$= \left( \text{Var}(B_{t+1}|X_{t+1-} = 0) - \text{Var}(\tilde{B}_{t+1}|\tilde{X}_{t+1-} = 0) \right) \cdot \left( 1 - (q_{01}(t) + \dots + q_{0m}(t)) \right) \cdot v^2 \\ - \text{Var}(\tilde{B}_{t+1}|\tilde{X}_{t+1-} = 0) \cdot q_{0m}(t) \cdot v^2$$

Damit folgt die Behauptung aus e).

Die Behauptung aus f) folgt mit vollständiger Induktion aus e):

$t = n$ : Behauptung ist trivialerweise erfüllt.

$t + 1 \rightarrow t$ :

$$\text{Var}(B_t|X_{t-} = 0) = \text{Var}(\tilde{B}_t|\tilde{X}_{t-} = 0) - \underbrace{\text{Var}(\tilde{B}_{t+1}|\tilde{X}_{t+1-} = 0) \cdot q_{0m}(t) \cdot v^2}_{\geq 0} \\ + \underbrace{\left( \text{Var}(B_{t+1}|X_{t+1-} = 0) - \text{Var}(\tilde{B}_{t+1}|\tilde{X}_{t+1-} = 0) \right)}_{\leq 0} \cdot \underbrace{\left( 1 - (q_{01}(t) + \dots + q_{0m}(t)) \right)}_{\geq 0} \cdot v^2 \\ \leq \text{Var}(\tilde{B}_t|\tilde{X}_{t-} = 0)$$

□

## 5. Fallbeispiel

Wir betrachten nun ein Fallbeispiel, dessen Struktur an die Gegebenheiten einer Zusage auf betriebliche Altersversorgung oder eines Lebensversicherungsvertrags angelehnt ist: Es gibt einen Zustand („0“) in dem die Auszahlungen durch Einzahlungen finanziert werden bzw. zum Endzeitpunkt eine Auszahlung erfolgt, einen Zustand („1“) in dem eine Leistung aufgrund eines Versicherungs- bzw. Versorgungsfalls gewährt wird und einen Zustand („2“) in dem bei Eintritt eines Ereignisses das Deckungskapitals bzw. die Pensionsrückstellung ausgezahlt oder verrentet wird.

Gegeben sei eine bewertete inhomogene Markov-Kette  $(X_t)_{t=0,1,2,\dots,n}$  mit den vier Zuständen 0,1,2,3, d.h. gemäß der Modellierung aus Kapitel 3 mit  $m = 2$ . Ferner sei  $n = 10$ .

Dabei gelte für die Übergangsmatrizen zusätzlich zu den in Kapitel 3 geforderten Bedingungen:

$$q_{01}(0) = 0,0050; q_{01}(1) = 0,0051; q_{01}(2) = 0,0052; q_{01}(3) = 0,0053; q_{01}(4) = 0,0054; \\ q_{01}(5) = 0,0055; q_{01}(6) = 0,0056; q_{01}(7) = 0,0057; q_{01}(8) = 0,0058; q_{01}(9) = 0,0059$$

und

$$q_{02}(0) = 0,10; q_{02}(1) = 0,11; q_{02}(2) = 0,12; q_{02}(3) = 0,13; q_{02}(4) = 0,14; \\ q_{02}(5) = 0,15; q_{02}(6) = 0,16; q_{02}(7) = 0,17; q_{02}(8) = 0,18; q_{02}(9) = 0,19$$

Der Rechnungszins wird mit 2% pro Periode angesetzt. Die Bewertung ergibt sich aus der Auszahlung bei einem Wechsel vom Zustand „0“ im Zustand „1“ mit

$$R_{1,t} = 50, \text{ für alle } t \in \{0,1, \dots, n-1\}$$

und bei einem Verbleib im Zustand „0“ bis zum Zeitpunkt  $n = 10$  mit

$$R = 100.$$

Bei einem Wechsel vom Zustand „0“ in den Zustand „2“ wird, wie in den vorherigen Kapiteln erläutert, der bedingte Erwartungswert ausgezahlt.

Setzt man zunächst

$$E(B_0 | X_{0-} = 0) = 0,$$

so lässt sich damit die konstante Einzahlung  $C$  mithilfe der Rekursion ermitteln. Man erhält

$$C = 8,94.$$

Der Verlauf des bedingten Erwartungswerts

$$E(B_t | X_{t-} = 0), t = 0,1, \dots, n,$$

und der Verlauf der bedingten Varianz

$$\text{Var}(B_t | X_{t-} = 0), t = 0, 1, \dots, n,$$

lassen sich sowohl über die Rekursionen aus dem vorherigen Kapitel als auch durch numerisches Ableiten der momentenerzeugenden Funktionen (vgl. [3]) berechnen. Beide Methoden liefern die folgenden Ergebnisse:

Zeitpunkt $t$	Bedingter Erwartungswert $E(B_t   X_{t-} = 0)$	Bedingte Varianz $\text{Var}(B_t   X_{t-} = 0)$
0	0,00	20,78
1	8,91	14,77
2	18,04	11,51
3	27,41	10,67
4	37,00	11,80
5	46,84	14,31
6	56,94	17,32
7	67,29	19,60
8	77,91	19,38
9	88,81	14,09
10	100,00	0,00

Minimale Abweichung zwischen den beiden Methoden ergeben sich beim bedingten Erwartungswert in der achten Stelle, bei der bedingten Varianz in der vierten Stelle nach dem Komma. Diese Abweichungen sind aber numerischer Natur.

Lässt man in dem Modell den Zustand „2“ weg und verwendet man als bewertete inhomogene Markov-Kette  $(\tilde{X}_t)_{t=0,1,2,\dots,n}$  aus dem vorherigen Kapitel (inklusive aller weiteren Modifikationen), so erhält man folgende Ergebnisse:

Zeitpunkt $t$	Bedingter Erwartungswert $E(\tilde{B}_t   \tilde{X}_{t-} = 0)$	Bedingte Varianz $Var(\tilde{B}_t   \tilde{X}_{t-} = 0)$
0	0,00	35,70
1	8,91	28,88
2	18,04	25,00
3	27,41	23,49
4	37,00	23,67
5	46,84	24,71
6	56,94	25,58
7	67,29	25,09
8	77,91	21,82
9	88,81	14,09
10	100,00	0,00

Man erkennt, dass der Verlauf des bedingten Erwartungswerts bei beiden Modellen identisch ist, der Verlauf der bedingten Varianz jedoch unterscheidet sich. Der Zusammenhang der bedingten Varianzen aus beiden Modellen ergibt sich gemäß Teil e) des Satzes aus dem vorherigen Kapitels.

Interpretiert man den bedingten Erwartungswert als prospektiv berechnete Reserve (z.B. im Sinne eines Deckungskapitals oder einer Pensionsrückstellung), so ist es unerheblich, ob der Zustand „2“ bei der Modellierung berücksichtigt wird. Ein anderes Bild ergibt sich bei der bedingten Varianz. Hier liefert die Berücksichtigung des Zustandes „2“ bei der Modellierung niedrigere Werte. D.h. die bedingte Streuung der Zufallsvariablen „Barwert des zukünftigen Zahlungsstroms“ ist geringer.

Dies gilt ebenfalls für das Risiko, wie sich an den folgenden Werten der Risikomaße Value at Risk (VaR) und Expected Shortfall (ES) zum Zeitpunkt  $t = 0$  zeigt:

Berücksichtigung von Zustand „2“	VaR	VaR	ES	ES
	$\alpha = 0,05$	$\alpha = 0,01$	$\alpha = 0,05$	$\alpha = 0,01$
Ja	0,14	20,82	9,57	34,80
Nein	0,14	30,36	10,74	35,22

Diese Werte können im vorliegenden Beispiel durch eine pfadweise Betrachtung (vgl. [5]) berechnet werden. Durch das Wegelassen des Zustands bei dessen Erreichen der bedingte Erwartungswert ausgezahlt wird, wird das Risiko, dass die Auszahlungen die Einzahlungen übersteigen, d.h. der Barwert positiv ist, überschätzt. Berücksichtigt man den Zustand „2“ in der Modellierung, so nimmt der Value at Risk ( $\alpha = 0,01$ ) den Wert 20,82 an. Somit beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass die zukünftigen Auszahlungen die zukünftigen Einzahlungen (jeweils abgezinst auf den Zeitpunkt  $t = 0$ ) um mehr als 20,82 übersteigen, höchstes 1%. Der entsprechende Wert bei Nichtberücksichtigung von Zustand „2“ liegt mit 30,36 höher, d.h. man benötigt bei dieser Modellierung mehr finanzielle Mittel zur Absicherung des Risikos. Für  $\alpha = 0,05$  sind beide Value at Risk-Werte gleich. Betrachtet man als Risikomaß den Expected Shortfall, d.h. den durchschnittlichen Barwert unter den 1% bzw. 5% ungünstigsten Szenarien, so sind die Werte ohne Berücksichtigung von Zustand „2“ ebenfalls höher.

## 6. Fazit

Eine Cantelli-Zusage kann mithilfe einer bewerteten inhomogenen Markov-Kette modelliert werden. Dabei kann gezeigt werden, dass für die Berechnung des Verlaufs des bedingten Erwartungswerts auf die Modellierung des Zustands, bei dessen Erreichen der bedingte Erwartungswert ausgezahlt wird, verzichtet werden kann. Dies entspricht den Standardergebnissen der Personenversicherungsmathematik.

Fasst man jedoch den Barwert des zukünftigen Zahlungsstroms als Zufallsvariable auf, so gilt dies nicht für andere Momente, wie am Verlauf der bedingten Varianz zu erkennen ist. Gleiches gilt für die üblichen Risikomaße. Anhand der Ergebnisse des Fallbeispiels ist ersichtlich, dass man durch das Weglassen des Zustands bei dessen Erreichen der bedingte Erwartungswert ausgezahlt wird, die Streuung und das Risiko überschätzt.

In der hier vorgenommenen Modellierung erfolgt die Auszahlung des bedingten Erwartungswerts am Ende der Periode, also nachschüssig. Bei einer Modellierung mit einer vorschüssigen Auszahlung können analoge Aussagen für den Verlauf des bedingten Erwartungswerts und den Verlauf der bedingten Varianz hergeleitet werden. Dabei ist allerdings zu beachten, dass sich dann die Modifikation der Wahrscheinlichkeiten nicht allein durch Addition von Übergangswahrscheinlichkeiten ergibt, vielmehr muss eine Normierung der modifizierten Wahrscheinlichkeiten vorgenommen werden.

## Literaturverzeichnis

- [1] *Kahlenberg, Jens* Lebensversicherungsmathematik, SpringerGabler, Wiesbaden 2018.
- [2] *Knobloch, Ralf* Bewertung von risikobehafteten Zahlungsströmen mithilfe von Markov-Ketten, In: Forschung am ivwKöln, Band 3/2011, Köln 2012, <http://nbn-resolving.de/urn:nbn:de:hbz:832-cos-98>  
(Stand 01. April 2018).
- [3] *Knobloch, Ralf* Momente und charakteristische Funktion des Barwerts einer bewerteten inhomogenen Markov-Kette - Anwendung bei risikobehafteten Zahlungsströmen, In: Forschung am ivwKöln, Band 5/2015, Köln 2015, <http://nbn-resolving.de/urn:nbn:de:hbz:832-cos-816>  
(Stand 01. April 2018).
- [4] *Knobloch, Ralf* Der Barwert der Rentenzahlungen aus einer betrieblichen Versorgungszusage, Der Aktuar 2016, Heft 4, S. 210 – 213.
- [5] *Knobloch, Ralf* Die Pfade einer bewerteten inhomogenen Markov-Kette - Fallbeispiele aus der betrieblichen Altersversorgung, , In: Forschung am ivwKöln, Band 4/2018, Köln 2018, <http://nbn-resolving.de/urn:nbn:de:hbz:832-cos4-6459>
- [6] *Koller, Michael* Stochastische Modelle in der Lebensversicherung, 2. Auflage, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg 2010.

## Impressum

Diese Veröffentlichung erscheint im Rahmen der Online-Publikationsreihe „Forschung am **ivwKöln**“. Eine vollständige Übersicht aller bisher erschienenen Publikationen findet sich am Ende dieser Publikation und kann [hier](#) abgerufen werden.

**Forschung am ivwKöln, 4/2020**  
**ISSN (online) 2192-8479**

**Ralf Knobloch: Modellierung einer Cantelli-Zusage mithilfe einer bewerteten inhomogenen Markov-Kette**

**Köln, April 2020**

### **Schriftleitung / editor's office:**

**Prof. Dr. Jürgen Strobel**

Institut für Versicherungswesen /  
Institute for Insurance Studies

Fakultät für Wirtschafts- und Rechtswissenschaften /  
Faculty of Business, Economics and Law

Technische Hochschule Köln /  
University of Applied Sciences

Gustav Heinemann-Ufer 54  
50968 Köln

Tel. +49 221 8275-3270

Fax +49 221 8275-3277

Mail [juergen.strobel@th-koeln.de](mailto:juergen.strobel@th-koeln.de)

Web [www.th-koeln.de](http://www.th-koeln.de)

### **Herausgeber der Schriftenreihe / Series Editorship:**

Prof. Dr. Peter Schimikowski

Prof. Dr. Jürgen Strobel

### **Kontakt Autor / Contact author:**

#### **Prof. Dr. Ralf Knobloch**

Schmalenbach Institut für Wirtschaftswissenschaften /  
Schmalenbach Institute of Business Administration

Fakultät für Wirtschafts- und Rechtswissenschaften /  
Faculty of Business, Economics and Law

Technische Hochschule Köln /  
University of Applied Sciences

Gustav Heinemann-Ufer 54  
50968 Köln

Mail [ralf.knobloch@th-koeln.de](mailto:ralf.knobloch@th-koeln.de)

## Publikationsreihe „Forschung am ivwKöln“

Die Veröffentlichungen der Online-Publikationsreihe "Forschung am ivwKöln" (ISSN: 2192-8479) werden üblicherweise über [Cologne Open Science](#) (Publikationsserver der TH Köln) veröffentlicht. Die Publikationen werden hierdurch über nationale und internationale Bibliothekskataloge, Suchmaschinen sowie andere Nachweisinstrumente erschlossen.

Alle Publikationen sind auch kostenlos abrufbar unter [www.ivw-koeln.de](http://www.ivw-koeln.de).

### 2020

- 3/2020 Müller-Peters, Gatzert: Todsicher: Die Wahrnehmung und Fehlwahrnehmung von Alltagsrisiken in der Öffentlichkeit
- 2/2020 Völler, Müller-Peters: InsurTech Karte ivwKöln 2020 - [Beiträge zu InsurTechs und Innovation am ivwKöln](#)
- 1/2020 Institut für Versicherungswesen: [Forschungsbericht für das Jahr 2019](#)

### 2019

- 5/2019 Muders: [Risiko und Resilienz kollektiver Sparprozesse – Backtesting auf Basis deutscher und US-amerikanischer Kapitalmarktdaten 1957-2017](#)
- 4/2019 Heep-Altiner, Berg: [Mikroökonomisches Produktionsmodell für Versicherungen. Teil 2: Renditemaximierung und Vergleich mit klassischen Optimierungsansätzen.](#)
- 3/2019 Völler, Müller-Peters: [InsurTech Karte ivwKöln 2019 - Beiträge zu InsurTechs und Innovation am ivwKöln](#)
- 2/2019 Rohlfs, Pütz, Morawetz: [Risiken des automatisierten Fahrens. Herausforderungen und Lösungsansätze für die Kfz-Versicherung. Proceedings zum 14. FaRis & DAV-Symposium am 7.12.2018 in Köln.](#)
- 1/2019 Institut für Versicherungswesen: [Forschungsbericht für das Jahr 2018](#)

### 2018

- 7/2018 Goecke: [Resilience and Intergenerational Fairness in Collective Defined Contribution Pension Funds](#)
- 6/2018 Miebs: [Kapitalanlagestrategien für die bAV – Herausforderungen für das Asset Management durch das Betriebsrentenstärkungsgesetz. Proceedings zum 13. FaRis & DAV Symposium am 8. Dezember 2017 in Köln](#)
- 5/2018 Goecke, Heep-Altiner, Knobloch, Schiegl, Schmidt (Hrsg.): [FaRis at ICA 2018 – Contributions to the International Congress of Actuaries 2018 in Berlin. Beiträge von FaRis Mitgliedern zum Weltkongress der Aktuarer vom 4. bis zum 8. Juni 2018 in Berlin](#)
- 4/2018 Knobloch: [Die Pfade einer bewerteten inhomogenen Markov-Kette - Fallbeispiele aus der betrieblichen Altersversorgung](#)
- 3/2018 Völler, Müller-Peters: [InsurTech Karte ivwKöln 1/2018 - Beiträge zu InsurTechs und Innovation am ivwKöln](#)
- 2/2018 Schmidt, Schulz: [InsurTech. Proceedings zum 12. FaRis & DAV Symposium am 9. Juni 2017 in Köln](#)
- 1/2018 Institut für Versicherungswesen: [Forschungsbericht für das Jahr 2017](#)

## **2017**

- 8/2017 Materne, Pütz: Alternative Capital und Basisrisiko in der Standardformel (non-life) von Solvency II
- 7/2017 Knobloch: Konstruktion einer unterjährlichen Markov-Kette aus einer jährlichen Markov-Kette - Eine Verallgemeinerung des linearen Ansatzes
- 6/2017 Goecke, Oskar (Hrsg.): Risiko und Resilienz. Proceedings zum 11. FaRis & DAV Symposium am 9. Dezember 2016 in Köln
- 5/2017 Grundhöfer, Dreuw, Quint, Stegemann: Bewertungsportale - eine neue Qualität der Konsumenteninformation?
- 4/2017 Heep-Altiner, Mehring, Rohlf's: Bewertung des verfügbaren Kapitals am Beispiel des Datenmodells der „IVW Privat AG“
- 3/2017 Müller-Peters, Völler: InsurTech Karte ivwKöln 1/2017 - Beiträge zu InsurTechs und Innovation am ivwKöln
- 2/2017 Heep-Altiner, Müller-Peters, Schimikowski, Schnur (Hrsg.): Big Data für Versicherungen. Proceedings zum 21. Kölner Versicherungssymposium am 3. 11. 2016 in Köln
- 1/2017 Institut für Versicherungswesen: Forschungsbericht für das Jahr 2016

## **2016**

- 13/2016 Völler: Erfolgsfaktoren eines Online-Portals für Akademiker
- 12/2016 Müller-Peters, Gatzert: Todsicher: Die Wahrnehmung und Fehl Wahrnehmung von Alltagsrisiken in der Öffentlichkeit (erscheint 2017)
- 11/2016 Heep-Altiner, Penzel, Rohlf's, Voßmann: Standardformel und weitere Anwendungen am Beispiel des durchgängigen Datenmodells der „IVW Leben AG“
- 10/2016 Heep-Altiner (Hrsg.): Big Data. Proceedings zum 10. FaRis & DAV Symposium am 10. Juni 2016 in Köln
- 9/2016 Materne, Pütz, Engling: Die Anforderungen an die Ereignisdefinition des Rückversicherungsvertrags: Eindeutigkeit und Konsistenz mit dem zugrundeliegenden Risiko
- 8/2016 Rohlf's (Hrsg.): Quantitatives Risikomanagement. Proceedings zum 9. FaRis & DAV Symposium am 4. Dezember 2015 in Köln
- 7/2016 Eremuk, Heep-Altiner: Internes Modell am Beispiel des durchgängigen Datenmodells der „IVW Privat AG“
- 6/2016 Heep-Altiner, Rohlf's, Dağoğlu, Pulido, Venter: Berichtspflichten und Prozessanforderungen nach Solvency II
- 5/2016 Goecke: Collective Defined Contribution Plans - Backtesting based on German capital market data 1955 - 2015
- 4/2016 Knobloch: Bewertete inhomogene Markov-Ketten - Spezielle unterjährliche und zeitstetige Modelle
- 3/2016 Völler (Hrsg.): Sozialisiert durch Google, Apple, Amazon, Facebook und Co. – Kundenerwartungen und –erfahrungen in der Assekuranz. Proceedings zum 20. Kölner Versicherungssymposium am 5. November 2015 in Köln
- 2/2016 Materne (Hrsg.): Jahresbericht 2015 des Forschungsschwerpunkts Rückversicherung
- 1/2016 Institut für Versicherungswesen: Forschungsbericht für das Jahr 2015

## **2015**

- 11/2015 Goecke (Hrsg.): Kapitalanlagerisiken: Economic Scenario Generator und Liquiditätsmanagement. Proceedings zum 8. FaRis & DAV Symposium am 12. Juni 2015 in Köln
- 10/2015 Heep-Altiner, Rohlf's: Standardformel und weitere Anwendungen am Beispiel des durchgängigen Datenmodells der „IVW Privat AG“ – Teil 2
- 9/2015 Goecke: Asset Liability Management in einem selbstfinanzierenden Pensionsfonds
- 8/2015 Strobel (Hrsg.): Management des Langlebigkeitsrisikos. Proceedings zum 7. FaRis & DAV Symposium am 5.12.2014 in Köln

- 7/2015 Völler, Wunder: Enterprise 2.0: Konzeption eines Wikis im Sinne des prozessorientierten Wissensmanagements
- 6/2015 Heep-Altiner, Rohlf: Standardformel und weitere Anwendungen am Beispiel des durchgängigen Datenmodells der „IVW Privat AG“
- 5/2015 Knobloch: Momente und charakteristische Funktion des Barwerts einer bewerteten inhomogenen Markov-Kette. Anwendung bei risikobehafteten Zahlungsströmen
- 4/2015 Heep-Altiner, Rohlf, Beier: Erneuerbare Energien und ALM eines Versicherungsunternehmens
- 3/2015 Dolgov: Calibration of Heston's stochastic volatility model to an empirical density using a genetic algorithm
- 2/2015 Heep-Altiner, Berg: Mikroökonomisches Produktionsmodell für Versicherungen
- 1/2015 Institut für Versicherungswesen: Forschungsbericht für das Jahr 2014

## **2014**

- 10/2014 Müller-Peters, Völler (beide Hrsg.): Innovation in der Versicherungswirtschaft
- 9/2014 Knobloch: Zahlungsströme mit zinsunabhängigem Barwert
- 8/2014 Heep-Altiner, Münchow, Scuzzarello: Ausgleichsrechnungen mit Gauß Markow Modellen am Beispiel eines fiktiven Stornobestandes
- 7/2014 Grundhöfer, Röttger, Scherer: Wozu noch Papier? Einstellungen von Studierenden zu E-Books
- 6/2014 Heep-Altiner, Berg (beide Hrsg.): Katastrophenmodellierung - Naturkatastrophen, Man Made Risiken, Epidemien und mehr. Proceedings zum 6. FaRis & DAV Symposium am 13.06.2014 in Köln
- 5/2014 Goecke (Hrsg.): Modell und Wirklichkeit. Proceedings zum 5. FaRis & DAV Symposium am 6. Dezember 2013 in Köln
- 4/2014 Heep-Altiner, Hoos, Krahorst: Fair Value Bewertung von zedierten Reserven
- 3/2014 Heep-Altiner, Hoos: Vereinfachter Nat Cat Modellierungsansatz zur Rückversicherungsoptimierung
- 2/2014 Zimmermann: Frauen im Versicherungsvertrieb. Was sagen die Privatkunden dazu?
- 1/2014 Institut für Versicherungswesen: Forschungsbericht für das Jahr 2013

## **2013**

- 11/2013 Heep-Altiner: Verlustabsorbierung durch latente Steuern nach Solvency II in der Schadenversicherung, Nr. 11/2013
- 10/2013 Müller-Peters: Kundenverhalten im Umbruch? Neue Informations- und Abschlusswege in der Kfz-Versicherung, Nr. 10/2013
- 9/2013 Knobloch: Risikomanagement in der betrieblichen Altersversorgung. Proceedings zum 4. FaRis & DAV-Symposium am 14. Juni 2013
- 8/2013 Strobel (Hrsg.): Rechnungsgrundlagen und Prämien in der Personen- und Schadenversicherung - Aktuelle Ansätze, Möglichkeiten und Grenzen. Proceedings zum 3. FaRis & DAV Symposium am 7. Dezember 2012
- 7/2013 Goecke: Sparprozesse mit kollektivem Risikoausgleich - Backtesting
- 6/2013 Knobloch: Konstruktion einer unterjährlichen Markov-Kette aus einer jährlichen Markov-Kette
- 5/2013 Heep-Altiner et al. (Hrsg.): Value-Based-Management in Non-Life Insurance
- 4/2013 Heep-Altiner: Vereinfachtes Formelwerk für den MCEV ohne Renewals in der Schadenversicherung
- 3/2013 Müller-Peters: Der vernetzte Autofahrer – Akzeptanz und Akzeptanzgrenzen von eCall, Werkstattvernetzung und Mehrwertdiensten im Automobilbereich
- 2/2013 Maier, Schimikowski (beide Hrsg.): Proceedings zum 6. Diskussionsforum Versicherungsrecht am 25. September 2012 an der FH Köln
- 1/2013 Institut für Versicherungswesen (Hrsg.): Forschungsbericht für das Jahr 2012

## **2012**

- 11/2012 Goecke (Hrsg.): Alternative Zinsgarantien in der Lebensversicherung. Proceedings zum 2. FaRis & DAV-Symposiums am 1. Juni 2012
- 10/2012 Klatt, Schiegl: Quantitative Risikoanalyse und -bewertung technischer Systeme am Beispiel eines medizinischen Gerätes
- 9/2012 Müller-Peters: Vergleichsportale und Verbraucherwünsche
- 8/2012 Füllgraf, Völler: Social Media Reifegradmodell für die deutsche Versicherungswirtschaft
- 7/2012 Völler: Die Social Media Matrix - Orientierung für die Versicherungsbranche
- 6/2012 Knobloch: Bewertung von risikobehafteten Zahlungsströmen mithilfe von Markov-Ketten bei unterjährlicher Zahlweise
- 5/2012 Goecke: Sparprozesse mit kollektivem Risikoausgleich - Simulationsrechnungen
- 4/2012 Günther (Hrsg.): Privat versus Staat - Schussfahrt zur Zwangsversicherung? Tagungsband zum 16. Kölner Versicherungssymposium am 16. Oktober 2011
- 3/2012 Heep-Altiner/Krause: Der Embedded Value im Vergleich zum ökonomischen Kapital in der Schadenversicherung
- 2/2012 Heep-Altiner (Hrsg.): Der MCEV in der Lebens- und Schadenversicherung - geeignet für die Unternehmenssteuerung oder nicht? Proceedings zum 1. FaRis & DAV-Symposium am 02.12.2011 in Köln
- 1/2012 Institut für Versicherungswesen (Hrsg.): Forschungsbericht für das Jahr 2011

## **2011**

- 5/2011 Reimers-Rawcliffe: Eine Darstellung von Rückversicherungsprogrammen mit Anwendung auf den Kompressionseffekt
- 4/2011 Knobloch: Ein Konzept zur Berechnung von einfachen Barwerten in der betrieblichen Altersversorgung mithilfe einer Markov-Kette
- 3/2011 Knobloch: Bewertung von risikobehafteten Zahlungsströmen mithilfe von Markov-Ketten
- 2/2011 Heep-Altiner: Performanceoptimierung des (Brutto) Neugeschäfts in der Schadenversicherung
- 1/2011 Goecke: Sparprozesse mit kollektivem Risikoausgleich