Forschung am ivwKöln
Band 2/2022

Ein Portfolio von inhomogenen Markov-Ketten mit Abhängigkeitsstruktur

Ralf Knobloch

ivwKöln
Institut für Versicherungswesen

Fakultät für Wirtschafts-
und Rechtswissenschaften

Technology
Arts Sciences
TH Köln

Forschung am **ivw**Köln, Band 2/2022

Ralf Knobloch

Forschungsstelle FaRis

Ein Portfolio von inhomogenen Markov-Ketten mit Abhängigkeitsstruktur

---

Zusammenfassung

Markov-Ketten haben bei der Modellierung von ökonomischen Sachverhalten eine Vielzahl von Anwendungen. In den Wirtschaftswissenschaften steht oft ein Portfolio von Markov -Ketten im Mittelpunkt des Interesses, z.B. das Kreditportfolio einer Bank oder das Vertragsportfolio einer Versicherung. In den meisten Modellen wird dabei die stochastische Unabhängigkeit der unterschiedlichen Markov -Ketten vorausgesetzt. In der vorliegenden Arbeit wird ein Modell zur Berücksichtigung einer Abhängigkeitsstruktur in einem solchen Portfolio vorgestellt. Die Abhängigkeiten werden dabei mit einer Familie von Copulas modelliert und werden bei den Übergangsmatrizen berücksichtigt.

Abstract

Markov chains have a variety of applications in the modeling of economic facts. In economics, the focus is often on a portfolio of Markov chains, e.g. a bank's loan portfolio or an insurance contract portfolio. In most models, the stochastic independence of the different Markov chains is assumed. This paper presents a model for taking into account a dependency structure in such a portfolio. The dependencies are given with a family of copulas and are taken into account in the transition matrices.

Schlagwörter:

Markov-Kette, Bewertete Markov-Kette, Copula

Keywords:

Markov Chain, Priced Markov Chain, Copula

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung

In den Wirtschaftswissenschaften wird die zeitliche Entwicklung von ökonomischen Größen häufig als stochastischer Prozess modelliert. Eine wichtige Klasse von stochastischen Prozessen sind Markov-Ketten. Dabei handelt es sich um stochastische Prozesse mit einer diskreten Zeitachse und bei wirtschaftswissenschaftlichen Modellen i.d.R. mit einem endlichen Zustandsraum.

Bei ökonomischen Fragestellungen stehen häufig nicht nur einzelne Objekte, sondern ein Portfolio, d.h. eine Zusammenstellung von Objekten, im Mittelpunkt des Interesses. Beispiele hierfür sind der Personenbestand einer Lebensversicherung und das Kreditportfolio einer Bank. Wird für jedes Objekt die Entwicklung einer ökonomischen Größe mit einer eigenen Markov-Kette modelliert, so stellt sich die Frage, wie diese einzelnen stochastischen Prozesse zusammengefasst bzw. wie Abhängigkeiten berücksichtigt werden können.

Zur Modellierung der Abhängigkeit von Zufallsgrößen im Allgemeinen gibt es mehrere Konzepte. So können Abhängigkeiten mittels bedingter Wahrscheinlichkeiten bzw. mittels bedingter Verteilungen modelliert werden. Eine klassische Vorgehensweise ist die Modellierung der Abhängigkeiten mithilfe von Korrelationskoeffizienten. Dies funktioniert aber bei einem Portfolio von stochastischen Prozessen i.d.R. nur bei auf Normalverteilungen basierenden Modellen (z.B. Brownsche Bewegung und geometrische Brownsche Bewegung). Eine solche Verteilungsannahme ist bei einer Markov-Kette aber sehr häufig nicht gegeben.

Eine weitere Möglichkeit zur Modellierung von Abhängigkeiten von Zufallsgrößen ergibt sich aus der Anwendung einer Copula. Verwendet man dieses Abhängigkeitsmodell für eine Menge von Zufallsvariablen, so können der Einfluss der einzelnen Verteilungen und der Einfluss der Abhängigkeit im Modell formal getrennt werden.

In der vorliegenden Arbeit wird mithilfe einer Familie von Copulas aus einem Portfolio von inhomogenen Markov-Ketten eine neue inhomogene Markov-Kette konstruiert. Die Abhängigkeiten beziehen sich dabei auf die gegebene Anfangskonstellation und die Zustandsübergänge zu den einzelnen Zeitpunkten.

2. Copulas

Gegeben seien n auf dem Intervall $[0,1]$ gleichverteilte Zufallsvariablen $U_1, U_2, \dots, U_n$. Die gemeinsame Verteilungsfunktion

$$C: [0,1]^n \to [0,1]$$

heißt Copula, d.h. es gilt:

$$C(u_1, u_2, \dots, u_n) = P(U_1 \leq u_1, U_2 \leq u_2, \dots, U_n \leq u_n), \qquad u_1, u_2, \dots, u_n \in [0,1]$$

(vgl. [8] S.4f)

Da es sich bei einer Copula um eine mehrdimensionale Verteilungsfunktion handelt und die eindimensionalen Randverteilungen durch die Gleichverteilung auf dem Intervall $[0,1]$ gegeben sind, ergeben sich u.a. die folgenden Eigenschaften (vgl. [8] S.7f und [9] S.293ff):

1. $C(1, \dots, 1, u_k, 1, \dots, 1) = u_k$ für alle $k = 1,2, \dots, n$ und $u_k \in [0,1]$
2. $C(u_1, u_2, \dots, u_n) = 0$, falls es ein $k \in \{1,2, \dots, n\}$ gibt mit $u_k = 0$
3. C ist rechtecksmonoton, d.h.

$$\Delta C(u, v] = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \sum_{\substack{M \subset \{1,2,\dots,n\} \\ |M| = j}} C\left(w_{1,(u,v],M}, w_{2,(u,v],M}, \dots, w_{n,(u,v],M}\right) \geq 0$$

für alle $(u, v] = (u_1, v_1] \times (u_2, v_2] \times \dots \times (u_n, v_n] \subset [0,1]^n$, wobei

$$w_{k,(u,v],M} = \begin{cases} u_k, & k \in M \\ v_k, & k \notin M \end{cases}$$

Umkehrt kann man zeigen, dass jede Funktion

$$C: [0,1]^n \to [0,1]$$

mit diesen drei Eigenschaften eine Copula ist (vgl. [8] S.8f).

Ferner gilt

$$\Delta C(u, v] = P(u_1 < U_1 \leq v_1, u_2 < U_2 \leq v_2, \dots, u_n < U_n \leq v_n)$$

(vgl. [8] S.8). Da es sich bei $U_1, U_2, \dots, U_n$ um stetige Zufallsvariablen handelt kann hierbei " $<$ " durch " $\leq$ " ersetzt werden und umgekehrt.

Ein wichtiges Ergebnis ist der Satz von Sklar ([8] S.14ff). Er besagt einerseits, dass bei Vorgabe von n reell-wertigen Zufallsvariablen mit den Verteilungsfunktionen $F_1, F_2, \dots, F_n$ und einer Copula C durch

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) := C(F_1(x_1), F_2(x_2), \dots, F_n(x_n)), \quad x_1, x_2, \dots, x_n \in IR$$

eine mehrdimensionale Verteilungsfunktion definiert wird. Umgekehrt gibt es zu jeder mehrdimensionalen Verteilungsfunktion

$$F: IR^n \to [0,1]$$

eine Copula C, sodass gilt:

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = C(F_1(x_1), F_2(x_2), \dots, F_n(x_n)), \quad x_1, x_2, \dots, x_n \in IR$$

Dabei sind $F_1, F_2, \dots, F_n$ die Verteilungsfunktionen der eindimensionalen Randverteilungen. Ist F stetig, dann ist C eindeutig. Insbesondere ist die Eindeutigkeit bei diskreten Verteilungen nicht gegeben.

3. Das Modell

Gegeben sei ein Portfolio von n inhomogenen Markov-Ketten

$$\left(X_t^{(1)}\right)_{t\in IN_0}, \left(X_t^{(2)}\right)_{t\in IN_0}, \dots, \left(X_t^{(n)}\right)_{t\in IN_0}$$

jeweils mit dem Zustandsraum $S = \{0,1,2,\dots,N\}$. Dabei sind die Übergangsmatrizen gegeben durch:

$$Q^{(k)}(t) = \left(q_{ij}^{(k)}(t)\right)_{i,j\in S} \ , t \in IN, k = 1,2,\dots,n$$

D.h. es gilt

$$P\left(X_t^{(k)} = j \middle| X_{t-1}^{(k)} = i\right) = q_{ij}^{(k)}(t)$$

für alle $t \in IN$, $k = 1,2,\dots,n$ und $i,j \in S$.

Zu jeder Markov-Kette gehört ferner eine Anfangsverteilung, die durch den Zeilenvektor $P_0^{(k)} = \left(p_{0,j}^{(k)}\right)_{j\in S}$ gegeben ist, d.h.

$$P\left(X_0^{(k)} = j\right) = p_{0,j}^{(k)}$$

für $j \in S$ und $k = 1,2,\dots,n$.

Die Verteilung der Zufallsvariablen $X_t^{(k)}$ ergibt sich dann für $k = 1,2,\dots,n$ und $t \in IN$ durch den Zeilenvektor:

$$P_t^{(k)} = P_0^{(k)} \cdot \prod_{u=1}^{t} Q^{(k)}(u)$$

(vgl. [2], [3], [4], [5], [7])

Die Verteilungsfunktion, die sich zum Zeitpunkt $t \in IN$ für die k-te Markov-Kette aus den Übergangswahrscheinlichkeiten ausgehend vom Zustand $i \in S$ ergibt, sei gegeben durch:

$$F_{i,t,k}(x) := P\left(X_t^{(k)} \leq x \middle| X_{t-1}^{(k)} = i\right) = \sum_{j=1}^{[x]} q_{ij}^{(k)}(t) \ , x \in IR$$

Zur Konstruktion einer gemeinsamen Markov-Kette für das Portfolio benötigen wir zunächst den gemeinsamen Zustandsraum:

$$S^n = \underbrace{S \times S \times \dots \times S}_{n-mal}$$

Gegeben sei ferner eine Familie von Copulas $C_{r,t}$, $r \in S^n$, $t \in IN$ und eine einzelne Copula C_0. Damit wird zum einen eine abzählbare Menge von Übergangsmatrizen und zum anderen eine Anfangsverteilung für die inhomogene Markov-Kette mit Zustandsraum S^n konstruiert.

Zunächst wird dazu für jedes $t \in IN$ eine $(N+1)^n \times (N+1)^n$-Matrix

$$Q(t) = (q_{rs}(t))_{r,s \in S^n}$$

wie folgt definiert: Für $t \in IN$ und $r, s \in S^n$ mit $r = (r_1, r_2, \dots, r_n)$ und $s = (s_1, s_2, \dots, s_n)$ sei

$$q_{rs}(t) \coloneqq \Delta C_{r,t}\big(F_{r_1,t,1}(s_1 - 1), F_{r_1,t,1}(s_1)\big] \times \dots \times \big(F_{r_n,t,n}(s_n - 1), F_{r_n,t,n}(s_n)\big].$$

Dabei liegt den Matrizen eine geeignete Anordnung der $(N+1)^n$ Elemente des Zustandsraums S^n wie folgt zugrunde. Einem Element aus der Menge S^n wird eine natürliche Zahl j zwischen 0 und $(N+1)^n - 1$ zuzuordnet:

$$s = (s_1, s_2, \dots, s_n) \in S^n \to j = \sum_{k=0}^{n-1} s_{k+1} \cdot (N+1)^k$$

Diese Zuordnung $s \to j$ ist eineindeutig und die natürliche Zahl j korrespondiert dann mit Zeilen- bzw. Spaltennummer in der jeweiligen $(N+1)^n \times (N+1)^n$-Matrix. Zu beachten ist allerdings, dass analog zu der Nummerierung bei den Zuständen der einzelnen Markov-Ketten der erste Zustand der Zustand Nummer 0 ist.

Da eine Copula rechtecksmonoton ist, gilt $q_{rs}(t) \geq 0$.

Wegen der disjunkten Zerlegung

$$\bigcup_{(s_1, s_2, \dots, s_n) \in S^n} \big(F_{r_1,t,1}(s_1 - 1), F_{r_1,t,1}(s_1)\big] \times \dots \times \big(F_{r_n,t,n}(s_n - 1), F_{r_n,t,n}(s_n)\big] = (0,1]^n$$

ergibt sich für alle für $r = (r_1, r_2, \dots, r_n) \in S^n$

$$\sum_{(s_1, s_2, \dots, s_n) \in S^n} q_{rs}(t) =$$

$$= \sum_{(s_1, s_2, \dots, s_n) \in S^n} \Delta C_{r,t}\big(F_{r_1,t,1}(s_1 - 1), F_{r_1,t,1}(s_1)\big] \times \dots \times \big(F_{r_n,t,n}(s_n - 1), F_{r_n,t,n}(s_n)\big] =$$

$$= \sum_{(s_1, s_2, \dots, s_n) \in S^n} P\left(F_{r_1,t,1}(s_1 - 1) < U_1 \leq F_{r_1,t,1}(s_1), \dots, F_{r_n,t,n}(s_n - 1) < U_n \leq F_{r_n,t,n}(s_n)\right) =$$

$$= P(0 < U_1 \leq 1, \dots, 0 < U_n \leq 1) = P\big((U_1, U_2, \dots, U_n) \in (0,1]^n\big) =$$

$$= P\big((U_1, U_2, \dots, U_n) \in [0,1]^n\big) - P(U_k = 0 \text{ für mindestens ein } k \in \{1,2,\dots,n\}) =$$

$$= P\big((U_1, U_2, \dots, U_n) \in [0,1]^n\big) = 1,$$

dabei sind $U_1, U_2, \dots, U_n$ die gemäß Kapitel 2 zur Copula gehörenden auf dem Intervall $[0,1]$ gleichverteilten Zufallsvariablen.

Somit handelt es sich bei der Matrix

$$Q(t) = (q_{rs}(t))_{r,s \in S^n}$$

um eine stochastische Matrix.

Die Anfangsverteilung $P_0 = \left(p_{0,s}\right)_{s \in S^n}$ der gemeinsamen Markov-Kette auf dem Zustandsraum S^n ergibt sich mithilfe des Satzes von Sklar aus den Anfangsverteilungen der einzelnen Markov-Ketten und der gegebenen Copula C_0, d.h. für $s = (s_1, s_2, \dots, s_n) \in S^n$ gilt:

$$p_{0,s} \coloneqq \Delta C_0\big(F_{0,1}(s_1 - 1), F_{0,1}(s_1)\big] \times \dots \times \big(F_{0,n}(s_n - 1), F_{0,n}(s_n)\big]$$

Dabei sei anlog zu oben:

$$F_{0,k}(x) \coloneqq P\left(X_0^{(k)} \leq x\right) = \sum_{j=1}^{[x]} p_{0,j}^{(k)} \;, x \in IR$$

Aus der Anfangsverteilung P_0 und den Übergangsmatrizen $Q(t)$, $t \in IN$, lässt sich nun die entsprechende inhomogene Markov-Kette mit Zustandsraum S^n wie üblich konstruieren.

Im Folgenden wird diese inhomogene Markov-Kette mit

$$(X_t)_{t \in IN_0}$$

bezeichnet. Damit gilt für $r = (r_1, r_2, \dots, r_n), s = (s_1, s_2, \dots, s_n) \in S^n$ und $t \in IN$:

$$q_{rs}(t) = P(X_t = s | X_{t-1} = r) = P\left(X_t^{(1)} = s_1, \dots, X_t^{(n)} = s_n \middle| X_{t-1}^{(1)} = r_1, \dots, X_{t-1}^{(n)} = r_n\right)$$

und

$$p_{0,s} = P(X_0 = s) = P\left(X_0^{(1)} = s_1, \dots, X_0^{(n)} = s_n\right)$$

4. Der Fall der stochastischen Unabhängigkeit

Im einfachsten Fall gehen wir von der stochastischen Unabhängigkeit der n inhomogenen Markov-Ketten

$$\left(X_t^{(1)}\right)_{t\in IN_0}, \left(X_t^{(2)}\right)_{t\in IN_0}, \dots, \left(X_t^{(n)}\right)_{t\in IN_0}$$

aus. Dazu werden die zugehörigen Copulas wie folgt gewählt:

$$C_0(u_1, u_2, \dots, u_n) \coloneqq u_1 \cdot u_2 \cdot \dots \cdot u_n, \qquad u_1, u_2, \dots, u_n \in [0,1]$$

und für $r \in S^n$, $t \in IN$

$$C_{r,t}(u_1, u_2, \dots, u_n) \coloneqq u_1 \cdot u_2 \cdot \dots \cdot u_n, \qquad u_1, u_2, \dots, u_n \in [0,1]$$

(vgl. [8] S.5)

Für $r = (r_1, r_2, \dots, r_n), s = (s_1, s_2, \dots, s_n) \in S^n$ folgt:

$$P\left(X_0^{(1)} = s_1, \dots, X_0^{(n)} = s_n\right) = P(X_0 = s) = p_{0,s} =$$

$$= \Delta C_0\left(F_{0,1}(s_1 - 1), F_{0,1}(s_1)\right] \times \dots \times \left(F_{0,n}(s_n - 1), F_{0,n}(s_n)\right] =$$

$$= P\left(F_{0,1}(s_1 - 1) < U_1 \le F_{0,1}(s_1), \dots, F_{0,n}(s_n - 1) < U_n \le F_{0,n}(s_n)\right) =$$

$$= \prod_{k=1}^{n} P\left(F_{0,k}(s_k - 1) < U_k \le F_{0,k}(s_k)\right) = \prod_{k=1}^{n} p_{0,s_k}^{(k)} = \prod_{k=1}^{n} P\left(X_0^{(k)} = s_k\right)$$

bzw.

$$P\left(X_t^{(1)} = s_1, \dots, X_t^{(n)} = s_n \middle| X_{t-1}^{(1)} = r_1, \dots, X_{t-1}^{(n)} = r_n\right) = P(X_t = s | X_{t-1} = r) = q_{rs}(t) =$$

$$= \Delta C_{r,t}\left(F_{r_1,t,1}(s_1 - 1), F_{r_1,t,1}(s_1)\right] \times \dots \times \left(F_{r_n,t,n}(s_n - 1), F_{r_n,t,n}(s_n)\right] =$$

$$= P\left(F_{r_1,t,1}(s_1 - 1) < U_1 \le F_{r_1,t,1}(s_1), \dots, F_{r_n,t,n}(s_n - 1) < U_n \le F_{r_n,t,n}(s_n)\right) =$$

$$= \prod_{k=1}^{n} P\left(F_{r_k,t,k}(s_k - 1) < U_k \le F_{r_k,t,k}(s_k)\right) = \prod_{k=1}^{n} q_{r_k,s_k}^{(k)}(t) = \prod_{k=1}^{n} P\left(X_t^{(k)} = s_k \middle| X_{t-1}^{(k)} = r_k\right)$$

Dabei sind $U_1, U_2, \dots, U_n$ die gemäß Kapitel 2 zur Copula gehörenden auf dem Intervall $[0,1]$ gleichverteilten und hier stochastisch unabhängigen Zufallsvariablen (vgl. [8] S.5).

Somit berechnen sich alle relevanten Wahrscheinlichkeiten und Kennzahlen mit denen bei stochastischer Unabhängigkeit gegebenen Rechenregeln.

5. Bewertete Markov-Ketten

Häufig werden Markov-Ketten zur Modellierung von risikobehafteten Zahlungsströmen verwendet. Dabei wird zu jedem Zeitpunkt in jedem Zustand eine geeignete Bewertung definiert, die für die jeweilige Zahlung steht. Die Anwendungen sind vielfältig: Finanz- und versicherungsmathematische Zahlungsströme, Lagerhaltungsmodelle (Bestell-, Lager- und Fehlmengenkosten), zustandsabhängige Gewinne, … ([2], [3], [4], [5], [6], [7], [10] S.45ff).

Zu jeder der n inhomogenen Markov-Ketten $\left(X_t^{(k)}\right)_{t\in IN_0}, k = 1,2,\dots,n,$ sei eine Bewertung durch Spaltenvektoren wie folgt gegeben:

$$L_t^{(k)} = \left(L_{t,j}^{(k)}\right)_{j=0,1,\dots,N}, t = 0,1,2,\dots, k = 1,2,\dots,n$$

Sei nun $s = (s_1, s_2, \dots, s_n) \in S^n$. Dann wird eine Bewertung für die Markov-Kette $(X_t)_{t\in IN_0}$ definiert durch:

$$L_{t,s} := \sum_{k=1}^{n} L_{t,s_k}^{(k)} \quad, t = 0,1,2,\dots$$

Legt man analog zu den Übergangsmatrizen die obige Anordnung der $(N+1)^n$ Elemente des Zustandsraums S^n zugrunde, so kann man die Bewertung der Markov-Kette $(X_t)_{t\in IN_0}$ wiederum als eine Familie von Spaltenvektoren auffassen. Diese werden im Folgenden mit $(L_t)_{t\in IN_0}$ bezeichnet.

Es sei ferner v der Abzinsungsfaktor zu einem vorgegeben Zinssatz und T eine natürliche Zahl. Es ergibt sich als Barwert für die Zahlungen zu den Zeitpunkten $0, 1, 2, \dots, T$:

$$B_T := \sum_{t=0}^{T} v^t \cdot \sum_{s\in S^n} 1_{\{X_t = s\}} \cdot L_{t,s}$$

Es sei

$$\varphi_T(x) = E(\exp(i \cdot x \cdot B_T)), x \in IR$$

die charakteristische Funktion der Zufallsvariablen B_T, dabei sei $i = \sqrt{-1}$ die imaginäre Einheit. Ferner sei

$$m_T(x) = E(\exp(x \cdot B_T)), x \in IR$$

deren momentenerzeugende Funktion der Zufallsvariablen B_T.

Durch die charakteristische Funktion ist die Verteilung der Zufallsvariablen B_T eindeutig festgelegt (vgl. [9] S.388). Da bis zum Zeitpunkt T endlich viele Zahlungen bzw. Bewertungen berücksichtigt werden, existiert $m_T(x)$ für alle $x \in IR$ und es gilt:

$$E(B_T) = m_T{}'(0)$$

und

$$Var(B_T) = E(B_T^2) - (E(B_T))^2 = m_T''(0) - \left(m_T{}'(0)\right)^2$$

(vgl. [9] S.379)

Da es sich bei $(X_t)_{t\in IN_0}$ um eine bewertete Markov-Kette mit der Bewertung $(L_t)_{t\in IN_0}$ handelt, gilt der folgende Satz:

Satz:

Es seien $T \in IN_0$ und $x \in IR$. Seien ferner die Matrizen

$$U(t,x) = (u_{rs}(t,x))_{r,s\in S^n},\ x \in IR,\ t = 0,1,\dots$$

gegeben durch:

$$u_{rs}(t,x) = \begin{cases} \exp\left(i \cdot x \cdot L_{t,s}\right) & r = s \\ 0 & r \neq s \end{cases}$$

Dann gilt

$$\varphi_T(x) = \sum_{s\in S^n} \left(P_0 \cdot U(0,x) \cdot \prod_{t=1}^{T} (Q(t) \cdot U(t,x)) \right)_s$$

bzw.

$$m_T(x) = \sum_{s\in S^n} \left(P_0 \cdot U(0,-i \cdot x) \cdot \prod_{t=1}^{T} (Q(t) \cdot U(t,-i \cdot x)) \right)_s .$$

Beweis:

Die Behauptung ergibt sich direkt als Anwendung des Hauptsatzes aus [5].

□

Berechnet man den Wert der momentenerzeugenden Funktion an den Stellen x und $-x$, wobei $x > 0$ und hinreichend klein, so können die Kennzahlen Erwartungswert und Varianz der Zufallsvariablen B_T mithilfe der numerischen Ableitungen näherungsweise bestimmt werden:

$$E(B_T) = m_T{}'(0) \approx \frac{m(x) - m(-x)}{2 \cdot x}$$

$$Var(B_T) = m_T''(0) - \left(m_T{}'(0)\right)^2 \approx \frac{m(x) + m(-x) - 2}{x^2} - \left(\frac{m(x) - m(-x)}{2 \cdot x}\right)^2$$

(vgl. [5])

6. Beispiel 1: Zwei homogene Markov-Ketten mit einem absorbierenden Zustand

Gegeben seien die beiden homogenen Markov-Ketten $\left(X_t^{(1)}\right)_{t\in IN_0}$ und $\left(X_t^{(2)}\right)_{t\in IN_0}$ jeweils mit dem Zustandsraum $S=\{0,1\}$, der Übergangsmatrix

$$Q^{(k)}(t)=Q=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1-q & q\end{pmatrix},\, t\in IN, k=1,2, q\in(0,1),$$

und der Anfangsverteilung

$$P_0^{(k)}=(0\quad 1)\,,\ k=1,2.$$

Für beide Markov-Ketten, d.h. für $k=1,2$, gilt dann zum Zeitpunkt $t\in IN$:

$$P_t^{(k)}=P_0^{(k)}\cdot\prod_{j=1}^{t}Q^{(k)}(j)=P_0^{(k)}\cdot Q^t=(0\quad 1)\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1-q^t & q^t\end{pmatrix}=(1-q^t\quad q^t)$$

Damit ist der Zustand „0“ absorbierend. Sind beide Markov-Ketten stochastisch unabhängig, so ergibt sich für die gemeinsame Markov-Kette mit dem Zustandsraum $S^2=\{0,1\}^2=\{(0,0),(1,0),(0,1),(1,1)\}$:

$$P\left(X_t^{(1)}=0,X_t^{(2)}=0\right)=(1-q^t)^2$$

$$P\left(X_t^{(1)}=1,X_t^{(2)}=0\right)=P\left(X_t^{(1)}=0,X_t^{(2)}=1\right)=q^t\cdot(1-q^t)$$

$$P\left(X_t^{(1)}=1,X_t^{(2)}=1\right)=q^{2t}$$

Wir gehen nun von einer gemeinsamen aber konstanten Abhängigkeitsstruktur wie folgt aus:

1. C_0 sei eine beliebige Copula.
2. $C_{r,t}=C$ für alle $r\in S^n$, $t\in IN$.

Für die Anfangsverteilung der gemeinsamen Markov-Kette gilt dann

$$P\left(X_0^{(1)}=1,X_0^{(2)}=1\right)=\Delta C_0\big(F_{0,1}(0),F_{0,1}(1)\big]\times\big(F_{0,2}(0),F_{0,2}(1)\big]=\Delta C_0(0,1]\times(0,1]=$$

$$=C_0(1,1)-C_0(1,0)-C_0(0,1)+C_0(0,0)=1-0-0+0=1$$

und damit

$$P\left(X_0^{(1)}=0,X_0^{(2)}=0\right)=P\left(X_0^{(1)}=1,X_0^{(2)}=0\right)=P\left(X_1^{(1)}=0,X_0^{(2)}=1\right)=0.$$

Für die Übergangsmatrizen der gemeinsamen Markov-Kette gilt

1. Ausgehend vom Zustand $(0,0)\in S^2$ im Zeitpunkt $t-1$ ($t\in IN$):

$$P\left(X_t^{(1)}=0,X_t^{(2)}=0\middle|X_{t-1}^{(1)}=0,X_{t-1}^{(2)}=0\right)=$$

$$=\Delta C\big(F_{0,t,1}(-1),F_{0,t,1}(0)\big]\times\big(F_{0,t,2}(-1),F_{0,t,2}(0)\big]=\Delta C(0,1]\times(0,1]=$$

$= C(1,1) - C(0,1) - C(1,0) + C(0,0) = 1 - 0 - 0 + 0 = 1$

und somit

$P\left(X_t^{(1)} = 1, X_t^{(2)} = 0 \middle| X_{t-1}^{(1)} = 0, X_{t-1}^{(2)} = 0\right) = 0$

$P\left(X_t^{(1)} = 0, X_t^{(2)} = 1 \middle| X_{t-1}^{(1)} = 0, X_{t-1}^{(2)} = 0\right) = 0$

$P\left(X_t^{(1)} = 1, X_t^{(2)} = 1 \middle| X_{t-1}^{(1)} = 0, X_{t-1}^{(2)} = 0\right) = 0$

2. Ausgehend vom Zustand $(1,0) \in S^2$ im Zeitpunkt $t-1$ $(t \in IN)$:

$P\left(X_t^{(1)} = 0, X_t^{(2)} = 0 \middle| X_{t-1}^{(1)} = 1, X_{t-1}^{(2)} = 0\right) =$

$= \Delta C\left(F_{1,t,1}(-1), F_{1,t,1}(0)\right] \times \left(F_{0,t,2}(-1), F_{0,t,2}(0)\right] = \Delta C(0,1-q] \times (0,1] =$

$= C(1-q,1) - C(0,1) - C(1-q,0) + C(0,0) = 1 - q - 0 - 0 + 0 = 1 - q$

$P\left(X_t^{(1)} = 1, X_t^{(2)} = 0 \middle| X_{t-1}^{(1)} = 1, X_{t-1}^{(2)} = 0\right) =$

$= \Delta C\left(F_{1,t,1}(0), F_{1,t,1}(1)\right] \times \left(F_{0,t,2}(-1), F_{0,t,2}(0)\right] = \Delta C(1-q,1] \times (0,1] =$

$= C(1,1) - C(1-q,1) - C(1,0) + C(1-q,0) = 1 - (1-q) - 0 + 0 = q$

und somit

$P\left(X_t^{(1)} = 0, X_t^{(2)} = 1 \middle| X_{t-1}^{(1)} = 1, X_{t-1}^{(2)} = 0\right) = 0$

$P\left(X_t^{(1)} = 1, X_t^{(2)} = 1 \middle| X_{t-1}^{(1)} = 1, X_{t-1}^{(2)} = 0\right) = 0$

3. Analog zu Ziffer 2 ausgehend vom Zustand $(0,1) \in S^2$ im Zeitpunkt $t-1$ $(t \in IN)$:

$P\left(X_t^{(1)} = 0, X_t^{(2)} = 0 \middle| X_{t-1}^{(1)} = 0, X_{t-1}^{(2)} = 1\right) = 1 - q$

$P\left(X_t^{(1)} = 1, X_t^{(2)} = 0 \middle| X_{t-1}^{(1)} = 0, X_{t-1}^{(2)} = 1\right) = 0$

$P\left(X_t^{(1)} = 0, X_t^{(2)} = 1 \middle| X_{t-1}^{(1)} = 0, X_{t-1}^{(2)} = 1\right) = q$

$P\left(X_t^{(1)} = 1, X_t^{(2)} = 1 \middle| X_{t-1}^{(1)} = 0, X_{t-1}^{(2)} = 1\right) = 0$

4. Ausgehend vom Zustand $(1,1) \in S^2$ im Zeitpunkt $t-1$ $(t \in IN)$:

$P\left(X_t^{(1)} = 0, X_t^{(2)} = 0 \middle| X_{t-1}^{(1)} = 1, X_{t-1}^{(2)} = 1\right) =$

$= \Delta C\left(F_{1,t,1}(-1), F_{1,t,1}(0)\right] \times \left(F_{1,t,2}(-1), F_{1,t,2}(0)\right] = \Delta C(0,1-q] \times (0,1-q] =$

$= C(1-q,1-q) - C(0,1-q) - C(1-q,0) + C(0,0) = C(1-q,1-q) - 0 - 0 + 0 =$

$= C(1-q,1-q)$

$P\left(X_t^{(1)} = 1, X_t^{(2)} = 0 \middle| X_{t-1}^{(1)} = 1, X_{t-1}^{(2)} = 1\right) =$

$= \Delta C\left(F_{1,t,1}(0), F_{1,t,1}(1)\right] \times \left(F_{1,t,2}(-1), F_{1,t,2}(0)\right] = \Delta C(1-q,1] \times (0,1-q] =$

$= C(1,1-q) - C(1-q,1-q) - C(1,0) + C(1-q,0) =$

$= 1 - q - C(1-q,1-q) - 0 + 0 = 1 - q - C(1-q,1-q)$

$P\left(X_t^{(1)} = 0, X_t^{(2)} = 1 \middle| X_{t-1}^{(1)} = 1, X_{t-1}^{(2)} = 1\right) = 1 - q - C(1-q,1-q)$ (analog)

$P\left(X_t^{(1)} = 1, X_t^{(2)} = 1 \middle| X_{t-1}^{(1)} = 1, X_{t-1}^{(2)} = 1\right) =$

$= \Delta C\big(F_{1,t,1}(0), F_{1,t,1}(1)\big] \times \big(F_{1,t,2}(0), F_{1,t,2}(1)\big] = \Delta C(1-q,1] \times (1-q,1] =$

$= C(1,1) - C(1-q,1) - C(1,1-q) + C(1-q,1-q) =$

$= 1 - (1-q) - (1-q) + C(1-q,1-q) = 2q - 1 + C(1-q,1-q)$

Insgesamt ergibt sich die Übergangsmatrix:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1-q & q & 0 & 0 \\ 1-q & 0 & q & 0 \\ C(1-q,1-q) & 1-q-C(1-q,1-q) & 1-q-C(1-q,1-q) & 2q-1+C(1-q,1-q) \end{pmatrix}$$

Dabei ist der Zustandsraum der gemeinsamen Markov-Kette gemäß der in Abschnitt 3 gewählten Anordnung des S^2 wie folgt sortiert:

$(0,0) \Rightarrow j = 0 \cdot 2^0 + 0 \cdot 2^1 = 0$, d.h. erste Zeile bzw. erste Spalte

$(1,0) \Rightarrow j = 1 \cdot 2^0 + 0 \cdot 2^1 = 1$, d.h. zweite Zeile bzw. zweite Spalte

$(0,1) \Rightarrow j = 0 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^1 = 2$, d.h. dritte Zeile bzw. dritte Spalte

$(1,1) \Rightarrow j = 1 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^1 = 3$, d.h. vierte Zeile bzw. vierte Spalte

Mit der Notation

$$a \coloneqq 1 - q - C(1-q,1-q)$$

lautet die Übergangsmatrix:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1-q & q & 0 & 0 \\ 1-q & 0 & q & 0 \\ 1-q-a & a & a & q-a \end{pmatrix}$$

Dass es sich hierbei im Allgemeinen um eine stochastische Matrix handelt, ergibt sich aus den Ausführungen in Abschnitt 3. Verwendet man die obere und die untere Fréchet-Hoeffding Schranke (vgl. [8] S.11f), so kann man im vorliegenden Beispiel auch elementar zeigen, dass die Einträge in der vierten Zeile nichtnegativ sind und somit eine stochastische Matrix vorliegt.

Als t-te Potenz dieser stochastischen Matrix ergibt sich nun

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1-q^t & q^t & 0 & 0 \\ 1-q^t & 0 & q^t & 0 \\ 1-2q^t+(q-a)^t & q^t-(q-a)^t & q^t-(q-a)^t & (q-a)^t \end{pmatrix}$$

Beweis mit vollständiger Induktion:

$t = 1$: trivial

$t \to t+1$:

Zu zeigen ist, dass sich die t+1-te Potenz mit

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1-q^{t+1} & q^{t+1} & 0 & 0 \\ 1-q^{t+1} & 0 & q^{t+1} & 0 \\ 1-2q^{t+1}+(q-a)^{t+1} & q^{t+1}-(q-a)^{t+1} & q^{t+1}-(q-a)^{t+1} & (q-a)^{t+1} \end{pmatrix}$$

ergibt. Die ersten drei Zeilen folgen aus einfachen Berechnungen, die vierte Zeile wie folgt.

Erste Spalte:

$(1-q-a) \cdot 1 + a \cdot (1-q^t) + a \cdot (1-q^t) + (q-a) \cdot (1-2q^t+(q-a)^t) =$

$= 1-q-a+2a-2aq^t+q-2q^{t+1}-a+2aq^t+(q-a)^{t+1} =$

$= 1-2q^{t+1}+(q-a)^{t+1}$

Zweite und dritte Spalte:

$a \cdot q^t + (q-a) \cdot (q^t-(q-a)^t) = a \cdot q^t + q^{t+1} - a \cdot q^t - (q-a)^{t+1} =$

$= q^{t+1}-(q-a)^{t+1}$

Vierte Spalte:

$(q-a) \cdot (q-a)^t = (q-a)^{t+1}$

□

Damit ergibt sich die Verteilung der gemeinsamen Markov-Kette zum Zeitpunkt $t \in IN$ durch Multiplikation der Anfangsverteilung

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

mit der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1-q^t & q^t & 0 & 0 \\ 1-q^t & 0 & q^t & 0 \\ 1-2q^t+(q-a)^t & q^t-(q-a)^t & q^t-(q-a)^t & (q-a)^t \end{pmatrix}$$

wie folgt:

$P\left(X_t^{(1)} = 0, X_t^{(2)} = 0\right) = 1 - 2q^t + (q-a)^t$

$P\left(X_t^{(1)} = 1, X_t^{(2)} = 0\right) = P\left(X_t^{(1)} = 0, X_t^{(2)} = 1\right) = q^t - (q-a)^t$

$P\left(X_t^{(1)} = 1, X_t^{(2)} = 1\right) = (q-a)^t$

Wir betrachten nun die Zufallsvariable

$$X_t^{(1)} + X_t^{(2)}$$

und ihre Momente. Für den Erwartungswert gilt

$$E\left(X_t^{(1)} + X_t^{(2)}\right) = 1 \cdot (q^t - (q-a)^t) + 1 \cdot (q^t - (q-a)^t) + 2 \cdot (q-a)^t = 2q^t$$

und für die Varianz

$$Var\left(X_t^{(1)} + X_t^{(2)}\right) = 1^2 \cdot (q^t - (q-a)^t) + 1^2 \cdot (q^t - (q-a)^t) + 2^2 \cdot (q-a)^t - (2q^t)^2 =$$

$$= 2q^t + 2(q-a)^t - 4q^{2t}.$$

Somit ist der Erwartungswert der Summe der beiden Markov-Ketten unabhängig von a und daher auch unabhängig von der gewählten Abhängigkeitsstruktur bzw. von den gewählten Copulas. Dies ist wegen der Linearität der Kennzahl Erwartungswert auch nicht anders zu erwarten. Bei der Varianz hingegen ist eine Abhängigkeit von a vorhanden, dies gilt dann auch für den Korrelationskoeffizienten von $X_t^{(1)}$ und $X_t^{(2)}$ im Folgenden mit ρ_t bezeichnet. Dieser lässt sich mithilfe der Formel

$$Var\left(X_t^{(1)} + X_t^{(2)}\right) = Var\left(X_t^{(1)}\right) + Var\left(X_t^{(2)}\right) + 2 \cdot \sqrt{Var\left(X_t^{(1)}\right)} \cdot \sqrt{Var\left(X_t^{(2)}\right)} \cdot \rho_t$$

in Verbindung mit

$$E\left(X_t^{(1)}\right) = E\left(X_t^{(2)}\right) = 0 \cdot (1 - q^t) + 1 \cdot q^t = q^t$$

und

$$Var\left(X_t^{(1)}\right) = Var\left(X_t^{(2)}\right) = 0^2 \cdot (1 - q^t) + 1^2 \cdot q^t - q^{2t} = q^t - q^{2t}$$

berechnen:

$$\rho_t = \frac{Var\left(X_t^{(1)} + X_t^{(2)}\right) - Var\left(X_t^{(1)}\right) - Var\left(X_t^{(2)}\right)}{2 \cdot \sqrt{Var\left(X_t^{(1)}\right)} \cdot \sqrt{Var\left(X_t^{(2)}\right)}} =$$

$$= \frac{2q^t + 2(q-a)^t - 4q^{2t} - 2 \cdot (q^t - q^{2t})}{2(q^t - q^{2t})} =$$

$$= \frac{2(q-a)^t - 2q^{2t}}{2(q^t - q^{2t})} = \frac{(q-a)^t - q^{2t}}{q^t - q^{2t}}$$

Somit hängt auch der Korrelationskoeffizient (wie zu erwarten) von a bzw. den gewählten Copulas ab.

Wir betrachten nun drei Fälle mit speziellen Copulas. Dabei wird als Copula in Ziffer 2 die obere Fréchet-Hoeffding Schranke und als Copula in Ziffer 3 die untere Fréchet-Hoeffding Schranke verwendet. (vgl. [8] S11f).

1. $C(u_1, u_2) = u_1 \cdot u_2$ (Unabhängigkeits-Copula [vgl. [8] S.5)

Es gilt

$$C(1-q, 1-q)) = (1-q)^2$$

bzw.

$$a = 1 - q - (1-q)^2 = q \cdot (1-q)$$

und

$$q - a = q - q \cdot (1-q) = q^2$$

Als Korrelationskoeffizient ergibt sich:

$$\rho_t = \frac{(q-a)^t - q^{2t}}{q^t - q^{2t}} = \frac{(q^2)^t - q^{2t}}{q^t - q^{2t}} = 0$$

Dies passt zur stochastischen Unabhängigkeit der beiden Markov-Ketten.

2. $C(u_1, u_2) = min(u_1, u_2)$ (Comonotonicity-Copula. vgl. [8] S.5f)

Hier gilt

$$C(1-q, 1-q)) = 1 - q$$

bzw.

$$a = 1 - q - (1-q) = 0$$

und

$$q - a = q$$

Als Korrelationskoeffizient ergibt sich:

$$\rho_t = \frac{(q-a)^t - q^{2t}}{q^t - q^{2t}} = \frac{q^t - q^{2t}}{q^t - q^{2t}} = 1$$

Somit sind in diesem Fall die beiden Markov-Ketten perfekt korreliert.

3. $C(u_1, u_2) = max(u_1 + u_2 - 1{,}0)$ (Countermonotonicity-Copula, vgl. [8] S.6)

In diesem Fall gilt

$$C(1-q, 1-q) = max(1-2q, 0) = \begin{cases} 1-2q\,, & q \leq 0{,}5 \\ 0 \quad\quad\;, & q > 0{,}5 \end{cases}$$

bzw.

$$a = \begin{cases} q & , \quad q \leq 0{,}5 \\ 1 - q \, , & q > 0{,}5 \end{cases}$$

und

$$q - a = \begin{cases} 0 & , \quad q \leq 0{,}5 \\ 2q - 1 \, , & q > 0{,}5 \end{cases}$$

Als Korrelationskoeffizient ergibt sich im Fall $q \leq 0{,}5$

$$\rho_t = \frac{(q-a)^t - q^{2t}}{q^t - q^{2t}} = -\frac{q^{2t}}{q^t - q^{2t}}$$

und im Fall $q > 0{,}5$

$$\rho_t = \frac{(q-a)^t - q^{2t}}{q^t - q^{2t}} = \frac{(2q-1)^t - q^{2t}}{q^t - q^{2t}}$$

Dieses einfache Beispiel von zwei identischen Markov-Ketten mit jeweils zwei Zuständen – davon einer absorbierend – zeigt wie eine gewählte Copula, die Streuungen und Korrelationskoeffizienten beeinflusst. Somit ist es bei einem Portfolio von Markov-Ketten, bei dem Diversifikation von Relevanz ist, wichtig bei der Modellierung eine entsprechende Copula zu wählen. Interessiert man sich lediglich für Erwartungswerte, d.h. Durchschnitte, so spielt diese Abhängigkeitsstruktur keine Rolle.

7. Beispiel 2: Betriebliche Altersversorgung

In einem zweiten Beispiel betrachten wir einen Kleinstbestand von vier Personen aus dem Bereich der betrieblichen Altersversorgung. Dieser Kleinstbestand sei wie folgt gegeben:

Person Nr.	Geschlecht	Jahrgang (Geburtsdatum jeweils 01.01.)	Alter am 01.01.2022	Status am 01.01.2022
1	Männlich	1981	41	Aktiver Arbeitnehmer
2	Männlich	1982	40	Aktiver Arbeitnehmer
3	Weiblich	1984	38	Aktive Arbeitnehmerin
4	Weiblich	1985	37	Aktive Arbeitnehmerin

Für jede Person wird eine Modellierung als inhomogene Markov-Kette mit drei Zuständen zugrunde gelegt:

Zustand $\mathbf{0}$: aktiver Arbeitnehmer/aktive Arbeitnehmerin

Zustand $\mathbf{1}$: Invalidenrentner/-in

Zustand $\mathbf{2}$: Tod

Der Zustandsraum der vier einzelnen inhomogenen Markov-Ketten ist somit jeweils durch $S = \{0,1,2\}$ und der Zustandsraum der gemeinsamen inhomogenen Markov-Kette durch S^4 gegeben.

Die Übergangswahrscheinlichkeiten sind den Heubeck-Richttafeln 2018 G (siehe [1]) entnommen, sie werden dabei als jährliche Wahrscheinlichkeiten angesetzt. Der betrachtete Zeitraum beginnt am 01.01.2022 ($t = 0$). Im Fall der Invalidität erfolgt eine jährlich vorschüssige Zahlung von 100 Geldeinheiten. Eine Todesfallleistung ist nicht vorgesehen.

Da alle vier Personen als aktiver Arbeitnehmer bzw. als aktive Arbeitnehmerin starten, gilt unabhängig von der Wahl der Copula C_0 für die Anfangsverteilung:

$$P\left(X_0^{(1)} = 0, X_0^{(2)} = 0, X_0^{(3)} = 0, X_0^{(4)} = 0\right) = P\left(X_0^{(1)} \leq 0, X_0^{(2)} \leq 0, X_0^{(3)} \leq 0, X_0^{(4)} \leq 0\right) =$$

$$= C_0\left(P\left(X_0^{(1)} \le 0\right), P\left(X_0^{(2)} \le 0\right), P\left(X_0^{(3)} \le 0\right), P\left(X_0^{(4)} \le 0\right)\right) = C_0(1,1,1,1) = 1$$

Zur Modellierung der Abhängigkeitsstruktur bei der Konstruktion der Übergangsmatrizen wird für alle Zeitpunkte $t = 1,2, \ldots$ und Zustände $r \in S^4$ die gleiche Copula C_ϑ aus der Gumbel-Familie (vgl. [8] S.73) gewählt, d.h.

$$C_{r,t}(u_1, u_2, u_3, u_4) = C_\vartheta(u_1, u_2, u_3, u_4) = \exp\left(-\left(\sum_{k=1}^{4} (-\ln(u_k))^\vartheta\right)^{1/\vartheta}\right)$$

mit $\vartheta \geq 1$. Im Fall $\vartheta = 1$ entspricht dies der stochastischen Unabhängigkeit der vier Markov-Ketten.

Wir betrachten zunächst die Anzahl der Personen in den einzelnen Zuständen und definieren dazu für $t = 0,1,2, \ldots$ die folgenden Zufallsvariablen bzw. Zählvariablen:

$A_t :=$ “Anzahl der aktiven Arbeiternehmer/-innen zum Zeitpunkt t“

$I_t :=$ “Anzahl der Invalidenrentner/-innen zum Zeitpunkt t“

$T_t :=$ “Anzahl der bis zum Zeitpunkt t Verstorbenen“

Selbstverständlich gilt zu jedem Zeitpunkt $A_t + I_t + T_t = 4$. Zu den Zeitpunkten

$t = 1$ (01.01.2023), $t = 2$ (01.01.2024), $t = 5$ (01.01.2027) und $t = 10$ (01.01.2032)

werden der Erwartungswert und die Standardabweichung der drei Zufallsvariablen A_t, I_t und T_t berechnet und dabei der Parameter ϑ alternativ mit folgenden Werten angesetzt:

$$\vartheta = 1, \vartheta = 1{,}2, \vartheta = 1{,}5, \vartheta = 2, \vartheta = 5, \vartheta = 10, \vartheta = 50.$$

Dabei steht $\vartheta = 1$ für den Fall der stochastischen Unabhängigkeit, je höher der Wert des Parameters desto größer ist die positive Abhängigkeit der vier Markov-Ketten untereinander.

Die Ergebnisse der Berechnungen sind im Anhang beigefügt. Die Werte des Erwartungswertes hängen dabei nicht von der Wahl des Parameters ϑ ab. Dies begründet sich mit der Linearität der Kennzahl Erwartungswert. Die Standardabweichung hingegen steigt bei allen drei Variablen mit zunehmendem Wert des Parameters ϑ. D.h. je größer die positive Abhängigkeit der vier Markov-Ketten untereinander desto höher die Volatilität der Anzahl der Personen in den drei betrachteten Zuständen. Mit anderen Worten, die Planbarkeit dieser betrieblichen Altersversorgung nimmt mit zunehmender positiver Abhängigkeit bzw. mit steigendem ϑ ab.

Mithilfe der Varianz der Summe von jeweils zwei der drei Zufallsvariablen A_t, I_t und T_t können die paarweisen Korrelationskoeffizienten berechnet werden. Dazu wird die allgemeine Formel für die Varianz der Summe zweier Zufallsvariablen X und Y nach dem Korrelationskoeffizienten aufgelöst:

$$Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y) + 2 \cdot \sqrt{Var(X)} \cdot \sqrt{Var(Y)} \cdot \rho_{XY}$$

$$\Rightarrow \rho_{XY} = \frac{Var(X+Y) - Var(X) - Var(Y)}{2 \cdot \sqrt{Var(X)} \cdot \sqrt{Var(Y)}}$$

Die Ergebnisse befinden sich ebenfalls im Anhang. Hier gibt es für die oben angeführten Konstellationen bezüglich Zeitpunkt t und Parameter ϑ kein einheitliches Bild:

Die negativen Korrelationskoeffizienten zwischen A_t und I_t erhöhen sich betragsmäßig leicht bei steigendem ϑ. Ein ähnliches Bild ergibt sich für die negativen Korrelationskoeffizienten zwischen A_t und T_t. Allerdings erhöhen sich diese nur am Anfang und fallen ab $\vartheta = 2$ wieder. Die im Fall $\vartheta = 1$ leicht negativen Korrelationskoeffizienten zwischen I_t und T_t drehen mit steigendem ϑ ins Positive, steigen zunächst und fallen anschließend wieder, bleiben aber positiv.

Nun werden die Zahlungsverpflichtungen bei Eintritt der Invalidität mit dem Barwert zum Zeitpunkt 01.01.2022 ($t = 0$) bewertet. Berücksichtigt werden dabei Zahlungen vom 01.01.2022 bis 01.01.2033 ($t = 11$). Da jedoch alle vier Personen am 01.01.2022 aktive Arbeitnehmer/-innen sind, kommen erst Zahlungen ab 01.01.2023 zum Tragen. Mit der in Abschnitt 5 eingeführten Notation ist die relevante Zufallsvariable Barwert gegeben durch

$$B_{11} = \sum_{t=0}^{11} v^t \cdot \sum_{s \in S^n} 1_{\{X_t = s\}} \cdot L_{t,s}.$$

Als jährlicher Zinssatz wird dabei 2% angesetzt.

In Abhängigkeit des Parameters ϑ ergeben sich für den Erwartungswert und die Standardabweichung der Zufallsvariablen B_{11} folgende Ergebnisse. Dabei erfolgen die Berechnungen näherungsweise mit dem in Abschnitt 5 dargestellten Verfahren, d.h. mithilfe der numerischen Ableitung ($x = 10^{-6}$) der momentenerzeugenden Funktion:

ϑ	Erwartungswert	Standardabweichung
1	84,901196	226,452128
1,2	84,901196	269,228445
1,5	84,901196	308,648579
2	84,901196	346,214015
5	84,901196	407,535323
10	84,901196	423,929414
50	84,901196	432,842865

Auch hier zeigt sich, dass der Erwartungswert des Barwerts unabhängig ist von der gewählten Abhängigkeitsstruktur bzw. Copula. Wohingegen der Streuung gemessen in der Standardabweichung mit zunehmendem ϑ, d.h. mit zunehmender positiver Abhängigkeit der vier Markov-Ketten untereinander, steigt und somit die Planbarkeit abnimmt.

Wir betrachten nun die Korrelationskoeffizienten der Barwerte $B_{11}^{(1)}, B_{11}^{(2)}, B_{11}^{(3)}$ und $B_{11}^{(4)}$ der vier Markov-Ketten untereinander. Selbstverständlich gilt:

$$B_{11} = B_{11}^{(1)} + B_{11}^{(2)} + B_{11}^{(3)} + B_{11}^{(4)}.$$

Berechnet werden diese Korrelationskoeffizienten mit der gleichen Methode wie die Korrelationskoeffizienten bei den obigen Zählvariablen (Auflösen der Varianzformel). Bei einem jährlichen Zinssatz von 2% ergeben sich folgende Werte:

	Korrelationskoeffizient zwischen					
ϑ	$B_{11}^{(1)}$ und $B_{11}^{(2)}$	$B_{11}^{(1)}$ und $B_{11}^{(3)}$	$B_{11}^{(1)}$ und $B_{11}^{(4)}$	$B_{11}^{(2)}$ und $B_{11}^{(3)}$	$B_{11}^{(2)}$ und $B_{11}^{(4)}$	$B_{11}^{(3)}$ und $B_{11}^{(4)}$
1	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
1,2	0,1165	0,1346	0,1334	0,1374	0,1364	0,1671
1,5	0,2511	0,2789	0,2754	0,2851	0,2820	0,3405
2	0,4117	0,4342	0,4267	0,4443	0,4379	0,5178
5	0,7648	0,7238	0,7047	0,7405	0,7252	0,8198
10	0,8802	0,8090	0,7799	0,8293	0,8068	0,9067
50	0,9514	0,8572	0,8093	0,8874	0,8492	0,9562

Man erkennt, wie die Korrelationskoeffizienten ausgehend von dem Wert 0 bei $\vartheta = 1$ (stochastische Unabhängigkeit) gemeinsam steigen und bei $\vartheta = 50$ relativ nahe bei 1 (perfekte positive Korrelation) liegen. Da es sich bei den Zufallsvariablen um Barwerte handelt, erhält man bei einer Änderung des jährlichen Zinssatzes andere Werte für die Korrelationskoeffizienten. Bei einem jährlichen Zinssatz von z.B. 3% statt 2% ändern sich diese im vorliegenden Beispiel in der vierten Nachkommastelle.

8. Beispiel 3: Eine Verallgemeinerung der Binomialverteilung

Gegeben seien n homogene Markov-Ketten mit dem Zustandsraum $S = \{0,1\}$, den Übergangsmatrizen

$$Q^{(k)}(t) = Q = \begin{pmatrix} 1-p & p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, t \in IN, k = 1,2, \dots, n, p \in (0,1),$$

den Anfangsverteilungen

$$P_0^{(k)} = (1 \quad 0), \ k = 1,2, \dots, n,$$

und den Bewertungen

$$L_0^{(k)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, L_1^{(k)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, k = 1,2, \dots, n.$$

Ferner sei C_0 eine beliebige Copula für die Anfangsverteilung und

$$C_{r,1}(u_1, u_2, \dots, u_n) = u_1 \cdot u_2 \cdot \dots \cdot u_n, \quad u_1, u_2, \dots, u_n \in [0,1]$$

für $r = (0 \quad 0 \quad \dots \quad 0) \in S^n$. Diese Copula entspricht der stochastischen Unabhängigkeit (vgl. Abschnitt 4). Alle nicht explizit erwähnten Modellannahmen seien beliebig. Wählt man als Zinssatz 0%, so ist die Zufallsvariable

$$B_1 = \sum_{t=0}^{1} v^t \cdot \sum_{s \in S^n} 1_{\{X_t = s\}} \cdot L_{t,s} = \sum_{s \in S^n} 1_{\{X_t = s\}} \cdot L_{1,s}$$

binomialverteilt mit den Parametern $n \in IN$ und $p \in (0,1)$.

Beweis:

Zum Beweis berechnen wir die charakteristische Funktion von B_1. Es sei $x \in IR$.

$$\varphi_1(x) = E(\exp(i \cdot x \cdot B_1)) = \sum_{s \in S^n} \left(P_0 \cdot U(0,x) \cdot \prod_{t=1}^{1} \big(Q(t) \cdot U(t,x) \big) \right)_s$$

Wegen $L_0^{(k)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, k = 1,2, \dots, n$, gilt $U(0,x) = E$. Damit ergibt sich:

$$\varphi_1(x) = \sum_{s \in S^n} (P_0 \cdot Q(1) \cdot U(1,x))_s$$

Ferner hat man

$$P\left(X_0^{(1)} = 0, X_0^{(2)} = 0, \dots, X_0^{(n)} = 0\right) = P\left(X_0^{(1)} \le 0, X_0^{(2)} \le 0, \dots, X_0^{(n)} \le 0\right) =$$

$$= C_0\left(P\left(X_0^{(1)} \le 0\right), P\left(X_0^{(2)} \le 0\right), \dots, P\left(X_0^{(n)} \le 0\right)\right) = C_0(1,1, \dots, 1) = 1,$$

d.h.

$$P_0 = (1 \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0).$$

Somit ist von dem Produkt $Q(1) \cdot U(1,x)$ nur die erste Zeile relevant.

Es seien $r = (0 \quad 0 \quad \dots \quad 0) \in S^n$ und $s = (s_1, s_2, \dots, s_n) \in S^n$. Der zugehörige Eintrag in der ersten Zeile der Matrix $Q(1)$ berechnet sich mit den Überlegungen aus Abschnitt 4 wie folgt:

$$q_{rs}(1) = P\left(X_1^{(1)} = s_1, \dots, X_1^{(n)} = s_n \middle| X_0^{(1)} = 0, \dots, X_0^{(n)} = 0\right) =$$

$$= \prod_{k=1}^{n} P\left(X_1^{(k)} = s_k \middle| X_0^{(k)} = 0\right) = p^{\sum_{k=1}^{n} s_k} \cdot (1-p)^{n-\sum_{k=1}^{n} s_k}$$

Bei der Matrix $U(1,x)$ handelt es sich um eine Diagonalmatrix mit den Einträgen

$$u_{ss}(1,x) = \exp\left(i \cdot x \cdot L_{1,s}\right) = \exp\left(i \cdot x \cdot \sum_{k=1}^{n} s_k\right).$$

Es sei $r = (0 \quad 0 \quad \dots \quad 0) \in S^n$. Man erhält mit klassischen kombinatorischen Überlegungen und dem binomischen Lehrsatz:

$$\varphi_1(x) = \sum_{s \in S^n} \left(q_{rs}(1) \cdot u_{ss}(1,x)\right)_s =$$

$$= \sum_{s \in S^n} \left(p^{\sum_{k=1}^{n} s_k} \cdot (1-p)^{n-\sum_{k=1}^{n} s_k} \cdot \exp\left(i \cdot x \cdot \sum_{k=1}^{n} s_k\right)\right)_s =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} \cdot \exp(i \cdot x \cdot k) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot \left(p \cdot \exp(i \cdot x)\right)^k \cdot (1-p)^{n-k} = \left(p \cdot \exp(i \cdot x) + (1-p)\right)^n$$

Dies ist die charakteristische Funktion der Binomialverteilung mit den Parametern n und p. Die Behauptung folgt dann aus dem Eindeutigkeitssatz (vgl. [9] S.388).

□

Möchte man nun eine Zufallsvariable als Summe von n dichotomen Zufallsvariablen, jeweils mit der Verteilungsfunktion

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1-p & 0 \le x < 1 \\ 1 & x \ge 1 \end{cases}$$

(wobei $p \in (0,1)$), die nicht stochastisch unabhängig sind, sondern einer anderen Abhängigkeitsstruktur genügen, definieren, so bietet sich für diese Verallgemeinerung der Binomialverteilung die folgende Vorgehensweise an:

1. Man verwendet im obigem Modell für $C_{r,1}$, mit $r = (0 \quad 0 \quad \dots \quad 0) \in S^n$, die zur gewünschten Abhängigkeitsstruktur gehörende Copula C. Alle anderen Modellannahmen bleiben unverändert.
2. Die Zufallsvariable B_1 entspricht dieser Summe der n dichotomen Zufallsvariablen bzw. ihre Verteilung entspricht dieser Verallgemeinerung der Binomialverteilung
3. Die charakteristische Funktion φ dieser Verallgemeinerung der Binomialverteilung ist dann gegeben durch:

   $$\varphi(x) = \varphi_1(x) = \sum_{s \in S^n} \left(q_{rs}(1) \cdot u_{ss}(1,x)\right)_s =$$

   $$= \sum_{s \in S^n} \left(\Delta C(F(s_1 - 1), F(s_1)] \times \dots \times (F(s_n - 1), F(s_n)] \cdot \exp\left(i \cdot x \cdot \sum_{k=1}^{n} s_k\right)\right)_s \quad , x \in IR$$

   Damit ist die Verteilung wiederum wegen des Eindeutigkeitssatzes eindeutig festgelegt (vgl. [9] S.388).

9. Fazit und Ausblick

In dem vorliegenden Artikel wird ein Konzept vorgestellt, wie man bei einem Portfolio von inhomogenen Markov-Ketten mit endlichem Zustandsraum eine Abhängigkeitsstruktur berücksichtigen kann. Dabei wird die Abhängigkeitsstruktur mithilfe einer Familie von Copulas modelliert.

In den ersten beiden Beispielen zeigt sich, dass die dabei berechneten Erwartungswerte unabhängig sind von den zugrundeliegenden Abhängigkeiten. Die berechneten Volatilitäten hingegen werden i.d.R. bei steigender positiver Abhängigkeit größer. D.h. je höher die positive Abhängigkeit, desto größer werden die Volatilitäten in dem Modell und damit auch die Risiken bzw. desto mehr nimmt die Planbarkeit ab.

Beispiel 2 der vorliegenden Arbeit beschäftigt sich mit einer Anwendung aus dem Bereich der Pensionsversicherungsmathematik. In diesem Beispiel werden ausgehend von der hier vorgestellten Modellierung Kennzahlen wichtiger Zufallsvariablen, z.B. Anzahl der Invalidenrentner/-innen oder Barwert der zukünftigen Zahlungen, berechnet. Offen bleibt dabei die Frage, ob die dabei verwendete Familie von Copulas für diese Anwendung geeignet ist. Ein Indiz für die Wahl einer Copula könnten die in diesem Beispiel berechneten Korrelationskoeffizienten für ausgewählte Zufallsvariablen sein. Allerdings müssten dazu umfangreiche Analysen an Realdaten vorgenommen werden. Dies gilt auch für andere Anwendungen, z.B. bei einem Kreditprotfolio. Offen ist auch die Frage der EDV-technischen Umsetzung, z.B. bei größeren Beständen in der betrieblichen Altersversorgung oder bei Lebensversicherungen. Der dann benötigte Zustandsraum wächst exponentiell mit zunehmender Bestandsgröße und damit auch die Ordnung der benötigten Matrizen.

In Beispiel 3 ergibt sich aus der hier vorgestellten Modellierung eine Verallgemeinerung der Binomialverteilung. Damit stellt sich direkt die Frage, für welche Copulas es eine Normalverteilungs-Approximation analog zum Satz von de Moivre-Laplace gibt.

Anhang

Berechnungsergebnisse zu Beispiel 2 (Abschnitt 7)

Erwartungswert

Datum Zeitpunkt t	Theta	Anzahl aktive Arbeitnehmer/-innen zum Zeitpunkt t	Anzahl Invalidenrenter/-innen zum Zeitpunkt t	Anzahl der bis zum Zeitpunkt t Verstorbenen	Summe
01.01.2023 t=1	1	3,985061	0,012948	0,001991	4
	1,2	3,985061	0,012948	0,001991	4
	1,5	3,985061	0,012948	0,001991	4
	2	3,985061	0,012948	0,001991	4
	5	3,985061	0,012948	0,001991	4
	10	3,985061	0,012948	0,001991	4
	50	3,985061	0,012948	0,001991	4
01.01.2024 t=2	1	3,969206	0,026593	0,004201	4
	1,2	3,969206	0,026593	0,004201	4
	1,5	3,969206	0,026593	0,004201	4
	2	3,969206	0,026593	0,004201	4
	5	3,969206	0,026593	0,004201	4
	10	3,969206	0,026593	0,004201	4
	50	3,969206	0,026593	0,004201	4
01.01.2027 t=5	1	3,917050	0,070522	0,012428	4
	1,2	3,917050	0,070522	0,012428	4
	1,5	3,917050	0,070522	0,012428	4
	2	3,917050	0,070522	0,012428	4
	5	3,917050	0,070522	0,012428	4
	10	3,917050	0,070522	0,012428	4
	50	3,917050	0,070522	0,012428	4
01.01.2032 t=10	1	3,808202	0,157945	0,033853	4
	1,2	3,808202	0,157945	0,033853	4
	1,5	3,808202	0,157945	0,033853	4
	2	3,808202	0,157945	0,033853	4
	5	3,808202	0,157945	0,033853	4
	10	3,808202	0,157945	0,033853	4
	50	3,808202	0,157945	0,033853	4

Standardabweichung				
Datum Zeitpunkt t	Theta	Anzahl aktive Arbeitnehmer/-innen zum Zeitpunkt t	Anzahl Invalidenrenter/-innen zum Zeitpunkt t	Anzahl der bis zum Zeitpunkt t Verstorbenen
01.01.2023 t=1	1	0,121995	0,113606	0,044602
	1,2	0,156734	0,136387	0,055634
	1,5	0,182162	0,156637	0,063463
	2	0,202081	0,175426	0,069106
	5	0,228720	0,205053	0,074801
	10	0,235026	0,212410	0,075801
	50	0,237692	0,215547	0,076341
01.01.2024 t=2	1	0,174803	0,162531	0,064772
	1,2	0,224577	0,194893	0,080623
	1,5	0,261059	0,223844	0,091926
	2	0,289685	0,250839	0,100135
	5	0,328254	0,293788	0,108657
	10	0,337751	0,304854	0,110221
	50	0,342354	0,310214	0,111043
01.01.2027 t=5	1	0,285003	0,263201	0,111264
	1,2	0,365905	0,313787	0,137827
	1,5	0,425414	0,360033	0,156952
	2	0,472273	0,403858	0,171083
	5	0,536050	0,475136	0,186716
	10	0,552519	0,494438	0,189850
	50	0,562175	0,505608	0,191447
01.01.2032 t=10	1	0,427267	0,389483	0,183031
	1,2	0,547135	0,458319	0,226051
	1,5	0,635864	0,523933	0,257158
	2	0,705971	0,587936	0,280466
	5	0,800979	0,694597	0,307689
	10	0,824401	0,722736	0,313459
	50	0,836318	0,736901	0,316334

Korrelation				
Datum Zeitpunkt t	Theta	Anzahl aktive Arbeitnehmer/-innen zum Zeitpunkt t Anzahl Invalidenrenter/-innen zum Zeitpunkt t	Anzahl aktive Arbeitnehmer/-innen zum Zeitpunkt t Anzahl der bis zum Zeitpunkt t Verstorbenen	Anzahl Invalidenrenter/-innen zum Zeitpunkt t Anzahl der bis zum Zeitpunkt t Verstorbenen
01.01.2023 t=1	1 1,2 1,5 2 5 10 50	-0,930771 -0,937288 -0,940841 -0,942664 -0,946321 -0,947575 -0,947911	-0,364408 -0,519466 -0,548229 -0,531266 -0,463553 -0,445265 -0,437161	-0,001283 0,189050 0,232407 0,218056 0,152268 0,135812 0,127904
01.01.2024 t=2	1 1,2 1,5 2 5 10 50	-0,928816 -0,935810 -0,939546 -0,941388 -0,944947 -0,946261 -0,946811	-0,368084 -0,523344 -0,552041 -0,534762 -0,466056 -0,447093 -0,438020	-0,002645 0,189373 0,233149 0,218378 0,150884 0,133786 0,125444
01.01.2027 t=5	1 1,2 1,5 2 5 10 50	-0,920652 -0,929104 -0,933538 -0,935540 -0,938844 -0,940206 -0,941155	-0,383649 -0,539546 -0,569027 -0,552054 -0,481863 -0,461654 -0,450880	-0,007305 0,189923 0,236424 0,221951 0,150665 0,131912 0,122676
01.01.2032 t=10	1 1,2 1,5 2 5 10 50	-0,903636 -0,913842 -0,919553 -0,922026 -0,925088 -0,926219 -0,926833	-0,411497 -0,567589 -0,599164 -0,584311 -0,514855 -0,494448 -0,484722	-0,018516 0,184364 0,236345 0,224585 0,150733 0,130289 0,120840

Literaturverzeichnis

[1]	*Herrmann, Richard; Heubeck, Klaus*	Heubeck-Richttafeln 2018 G,Textband und Programm Heurika 4,Verlag: Heubeck-Richttafeln-GmbH, Köln 2018.
[2]	*Knobloch, Ralf*	Bewertung von risikobehafteten Zahlungsströmen mithilfe von Markov-Ketten, In: Forschung am ivwKöln, Band 3/2011, Köln 2012, http://nbn-resolving.de/urn:nbn:de:hbz:832-cos-98 (Stand 28. Dezember 2021).
[3]	*Knobloch, Ralf*	Bewertung von risikobehafteten Zahlungsströmen mithilfe von Markov-Kette bei unterjährlicher Zahlweise, In: Forschung am ivwKöln, Band 6/2012, Köln 2012, http://nbn-resolving.de/urn:nbn:de:hbz:832-cos-204 (Stand 28. Dezember 2021).
[4]	*Knobloch, Ralf*	Konstruktion einer unterjährlichen Markov-Kette aus einer jährlichen Markov-Kette, In: Forschung am ivwKöln, Band 6/2013, Köln 2013, http://nbn-resolving.de/urn:nbn:de:hbz:832-cos-402 (Stand 28. Dezember 2021).
[5]	*Knobloch, Ralf*	Momente und charakteristische Funktion des Barwerts einer bewerteten inhomogenen Markov-Kette-Anwendung bei risikobehafteten Zahlungsströmen, In: Forschung am ivwKöln, Band 5/2015, Köln 2015, http://nbn-resolving.de/urn:nbn:de:hbz:832-cos-816 (Stand 28. Dezember 2021).
[6]	*Knobloch, Ralf*	Der Barwert der Rentenzahlungen aus einer betrieblichen Versorgungszusage, Der Aktuar 2016, Heft 4, S. 210 – 213.
[7]	*Knobloch, Ralf*	Die Pfade einer bewerteten inhomogenen Markov-Kette - Fallbeispiele aus der betrieblichen Altersversorgung, In: Forschung am ivwKöln, Band 4/2018, http://nbn-resolving.de/urn:nbn:de:hbz:832-cos4-6459 (Stand 28. Dezember 2021).
[8]	*Mai, Jan-Frederik; Scherer, Matthias*	Simulating Copulas, Imperial College Press, London 2012.

[9]	*Schmidt, Klaus D.*	Maß und Wahrscheinlichkeit, Springer Verlag, Heidelberg 2009.
[10]	*Waldmann, Karl-Heinz; Stocker, Ulrike M.*	Stochastische Modelle, 2. Auflage, Springer Verlag, Heidelberg 2013.

Impressum

Diese Veröffentlichung erscheint im Rahmen der Online-Publikationsreihe „Forschung am **ivw**Köln“. Eine vollständige Übersicht aller bisher erschienenen Publikationen findet sich am Ende dieser Publikation und kann hier abgerufen werden.

Forschung am ivwKöln, 2/2022
ISSN (online) 2192-8479

Ralf Knobloch: Ein Portfolio von inhomogenen Markov-Ketten mit Abhängigkeitsstruktur

Köln, Februar 2022

Schriftleitung / editor's office:

Prof. Dr. Ralf Knobloch

Schmalenbach Institut für Wirtschaftswissenschaften /
Schmalenbach Institute of Business Administration

Fakultät für Wirtschafts- und Rechtswissenschaften /
Faculty of Business, Economics and Law

Technische Hochschule Köln /
University of Applied Sciences

Gustav Heinemann-Ufer 54
50968 Köln

Mail ralf.knobloch@th-koeln.de

Herausgeber der Schriftenreihe / Series Editorship:

Kontakt Autor / Contact author:

Prof. Dr. Ralf Knobloch

Schmalenbach Institut für Wirtschaftswissenschaften /
Schmalenbach Institute of Business Administration

Fakultät für Wirtschafts- und Rechtswissenschaften /
Faculty of Business, Economics and Law

Technische Hochschule Köln /
University of Applied Sciences

Gustav Heinemann-Ufer 54
50968 Köln

Mail ralf.knobloch@th-koeln.de

Publikationsreihe „Forschung am ivwKöln“

Die Veröffentlichungen der Online-Publikationsreihe "Forschung am ivwKöln" (ISSN: 2192-8479) werden üblicherweise über Cologne Open Science (Publikationsserver der TH Köln) veröffentlicht. Die Publikationen werden hierdurch über nationale und internationale Bibliothekskataloge, Suchmaschinen sowie andere Nachweisinstrumente erschlossen.

Alle Publikationen sind auch kostenlos abrufbar unter www.ivw-koeln.de.

2022

1/2022 Institut für Versicherungswesen: Forschungsbericht für das Jahr 2021

2021

4/2021 Institut für Versicherungswesen: Risiko im Wandel als Herausforderung für die Versicherungswirtschaft

3/2021 Völler, Müller-Peters: InsurTech Karte ivwKöln 2021 - Beiträge zu InsurTechs und Innovation am ivwKöln

2/2021 Knobloch: Die quantitative Risikobewertung bei einem Portfolio von dichotomen Risiken mithilfe des zentralen Grenzwertsatzes

1/2021 Institut für Versicherungswesen: Forschungsbericht für das Jahr 2020

2020

7/2020 Müller-Peters, Schmidt, Völler: Revolutionieren Big Data und KI die Versicherungswirtschaft? 24. Kölner Versicherungssymposium am 14. November 2019

6/2020 Schmidt: Künstliche Intelligenz im Risikomanagement. Proceedings zum 15. FaRis & DAV Symposium am 6. Dezember 2019 in Köln

5/2020 Müller-Peters: Die Wahrnehmung von Risiken im Rahmen der Corona-Krise

4/2020 Knobloch: Modellierung einer Cantelli-Zusage mithilfe einer bewerteten inhomogenen Markov-Kette

3/2020 Müller-Peters, Gatzert: Todsicher: Die Wahrnehmung und Fehlwahrnehmung von Alltagsrisiken in der Öffentlichkeit

2/2020 Völler, Müller-Peters: InsurTech Karte ivwKöln 2020 - Beiträge zu InsurTechs und Innovation am ivwKöln

1/2020 Institut für Versicherungswesen: Forschungsbericht für das Jahr 2019

2019

5/2019 Muders: Risiko und Resilienz kollektiver Sparprozesse – Backtesting auf Basis deutscher und US-amerikanischer Kapitalmarktdaten 1957-2017

4/2019 Heep-Altiner, Berg: Mikroökonomisches Produktionsmodell für Versicherungen. Teil 2: Renditemaximierung und Vergleich mit klassischen Optimierungsansätzen.

3/2019 Völler, Müller-Peters: InsurTech Karte ivwKöln 2019 - Beiträge zu InsurTechs und Innovation am ivwKöln

2/2019 Rohlfs, Pütz, Morawetz: Risiken des automatisierten Fahrens. Herausforderungen und Lösungsansätze für die Kfz-Versicherung. Proceedings zum 14. FaRis & DAV-Symposium am 7.12.2018 in Köln.

1/2019 Institut für Versicherungswesen: Forschungsbericht für das Jahr 2018

2018

7/2018 Goecke: Resilience and Intergenerational Fairness in Collective Defined Contribution Pension Funds

6/2018 Miebs: Kapitalanlagestrategien für die bAV – Herausforderungen für das Asset Management durch das Betriebsrentenstärkungsgesetz. Proceedings zum 13. FaRis & DAV Symposium am 8. Dezember 2017 in Köln

5/2018 Goecke, Heep-Altiner, Knobloch, Schiegl, Schmidt (Hrsg.): FaRis at ICA 2018 – Contributions to the International Congress of Actuaries 2018 in Berlin. Beiträge von FaRis Mitgliedern zum Weltkongress der Aktuare vom 4. bis zum 8. Juni 2018 in Berlin

4/2018 Knobloch: Die Pfade einer bewerteten inhomogenen Markov-Kette - Fallbeispiele aus der betrieblichen Altersversorgung

3/2018 Völler, Müller-Peters: InsurTech Karte ivwKöln 1/2018 - Beiträge zu InsurTechs und Innovation am ivwKöln

2/2018 Schmidt, Schulz: InsurTech. Proceedings zum 12. FaRis & DAV Symposium am 9. Juni 2017 in Köln

1/2018 Institut für Versicherungswesen: Forschungsbericht für das Jahr 2017

2017

8/2017 Materne, Pütz: Alternative Capital und Basisrisiko in der Standardformel (non-life) von Solvency II

7/2017 Knobloch: Konstruktion einer unterjährlichen Markov-Kette aus einer jährlichen Markov-Kette - Eine Verallgemeinerung des linearen Ansatzes

6/2017 Goecke, Oskar (Hrsg.): Risiko und Resilienz. Proceedings zum 11. FaRis & DAV Symposium am 9. Dezember 2016 in Köln

5/2017 Grundhöfer, Dreuw, Quint, Stegemann: Bewertungsportale - eine neue Qualität der Konsumenten-information?

4/2017 Heep-Altiner, Mehring, Rohlfs: Bewertung des verfügbaren Kapitals am Beispiel des Datenmodells der „IVW Privat AG“

3/2017 Müller-Peters, Völler: InsurTech Karte ivwKöln 1/2017 - Beiträge zu InsurTechs und Innovation am ivwKöln

2/2017 Heep-Altiner, Müller-Peters, Schimikowski, Schnur (Hrsg.): Big Data für Versicherungen. Proceedings zum 21. Kölner Versicherungssymposium am 3. 11. 2016 in Köln

1/2017 Institut für Versicherungswesen: Forschungsbericht für das Jahr 2016