Forschung am ivwKöln
Band 2/2024

Aggregation in einem Risikoportfolio mit Abhängigkeitsstruktur

Ralf Knobloch

ivwKöln
Institut für Versicherungswesen

Fakultät für Wirtschafts-
und Rechtswissenschaften

Technology
Arts Sciences
TH Köln

Forschung am **ivw**Köln, Band 2/2024

Ralf Knobloch

Forschungsstelle FaRis

Aggregation in einem Risikoportfolio mit Abhängigkeitsstruktur

Zusammenfassung

Unternehmen sehen sich üblicherweise den unterschiedlichsten operativen und strategischen Risiken ausgesetzt. Daher ist das Risikoportfolio eines Unternehmens aus Sicht des betriebswirtschaftlichen Risikomanagement i.d.R. sehr inhomogen bezüglich der verwendeten Verteilungsmodelle. Neben der Bewertung der Einzelrisiken ist es die Aufgabe des quantitativen Risikomanagements, alle Einzelrisiken in einer Risikokennzahl (z.B. Value at Risk oder Expected Shortfall) zu aggregieren. Dazu werden Szenarien (mit einer Monte-Carlo-Simulation) simuliert, so dass die Verteilung des Gesamtrisikos mit Risikokennzahlen aggregiert und analysiert werden kann. Dabei muss zusätzlich die Abhängigkeitsstruktur der Einzelrisiken modelliert werden. Ein möglicher Ansatz zur Modellierung der Abhängigkeitsstruktur ist die Vorgabe einer Korrelationsmatrix. Der vorliegende Artikel beschäftigt anhand von Beispielen zum einen mit Konzepten und Methoden einer solchen Modellierung und zum anderen mit den Schwierigkeiten, die damit verbunden sind. Es zeigt sich, dass man bei der Wahl einer Korrelationsmatrix verschiedene Einschränkungen zu beachten hat. Ferner kann es zu einer vorgegebenen Korrelationsmatrix mehrere passende gemeinsame Verteilungen der Einzelrisken geben. Dies hat zur Folge, dass die Aggregation der Einzelrisiken in einer Risikokennzahl aus mathematischer Sicht nicht eindeutig ist.

Abstract

Companies are usually exposed to a wide variety of operational and strategic risks. Therefore, from the perspective of business risk management, the risk portfolio of a company is usually very inhomogeneous with regard to the distribution models used. In addition to evaluating the individual risks, it is the task of quantitative risk management to aggregate all individual risks in a risk measure (e.g. value at risk or expected shortfall). To this end, scenarios are simulated (using a Monte Carlo simulation) so that the distribution of the overall risk can be aggregated and analyzed using risk measures. In addition, the dependency structure of the individual risks must be modeled. One possible approach to modeling the dependency structure is to specify a correlation matrix. Using examples, this article deals on the one hand with the concepts and methods of such modeling and on the other hand with the difficulties involved. It shows that various restrictions must be taken into account when choosing a correlation matrix. Furthermore, for a given correlation matrix there may be several matching joint distributions of the individual risks. As a consequence, the aggregation of the individual risks in a risk measure is not unique from a mathematical point of view.

Schlagwörter: Quantitatives Risikomanagement, Value at Risk, Korrelationsmatrix, Risikoaggregation, Fréchet-Hoeffding-Schranken

Keywords: Quantitative Risk Management, Value at Risk, Correlation Matrix, Risk Aggregation, Fréchet-Hoeffding-Bounds

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung

In der Betriebswirtschaftslehre gewinnt das Risikomanagement zunehmend an Bedeutung, bei Banken und Versicherungen nicht zuletzt aufgrund aufsichtsrechtlicher Vorgaben. Forciert wird diese Entwicklung bei allen Branchen durch die Neufassung des IDW (= Institut der Wirtschaftsprüfer) Prüfungsstandards „Die Prüfung des Risikofrüherkennungssystems nach § 317 Abs. 4 HGB (IDW PS 340 n.F.)“. Wichtige Teilaspekte des (quantitativen) Risikomanagements sind die Bewertung, die Analyse und die Aggregation von Risiken. Das im Rahmen der Aggregation ermittelte Gesamtrisiko gibt dabei an, welchen Finanzmittel zur Risikovorsorge zur Verfügung stehen sollten. Diese Berechnung wird i.d.R. sowohl brutto, d.h. ohne Berücksichtigung von Risikosteuerungsmaßnahmen, als auch netto, d.h. mit Berücksichtigung Risikosteuerungsmaßnahmen durchgeführt. Die Ergebnisse bilden eine wichtige Grundlage für die Unternehmessteuerung.

Die Bewertung, die Analyse und die Aggregation der Risiken basieren auf wahrscheinlichkeitstheoretischen Modellen. Als Kennzahlen zur Bewertung haben sich sogenannte downside-Maße etabliert. Die wichtigsten downside-Maße bzw. Risikomaße sind hierbei der Value at Risk (kurz VaR) und der Expected Shortfall (kurz ES). Der Value at Risk zum Niveau 5% gibt an, welcher Verlust mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95% nicht überschritten wird, der Expected Shortfall zum Niveau 5% wie hoch der durchschnittliche Verlust unter den 5% schlechtesten Szenarien ist.

Betrachtet man nun das Risikoportfolio eines Unternehmens, so stellt sich die Frage, wie aus den Kennzahlen oder Modellen der einzelnen Risiken das Gesamtrisiko ermittelt werden kann. Die naive Vorgehensweise – sprich die Addition der Kennzahlen der einzelnen Risiken – führt nicht zu einem korrekten Ergebnis, sie überschätzt das Gesamtrisiko. Vielmehr spielt die Abhängigkeit der Risiken untereinander eine entscheidende Rolle. Somit müssen nicht nur die Einzelrisiken wahrscheinlichkeitstheoretisch modelliert werden, sondern auch die Abhängigkeitsstruktur. Dafür gibt es in der Wahrscheinlichkeitstheorie verschiedene Ansätze. Zunächst besteht die Möglichkeit, die Abhängigkeiten über den Begriff der bedingten Wahrscheinlichkeit oder über den Begriff des Korrelationskoeffizienten bzw. der Korrelationsmatrix zu modellieren. Bei beiden Ansätze sind für alle Paare zweier Einzelrisiken die Abhängigkeiten festzulegen. Umfasst das Risikoportfolio z.B. sieben Einzelrisiken, so können 21 Paare gebildet werden, bei zehn Einzelrisiken sind es 45 Paare. Ein anderer Ansatz ist es, die Abhängigkeitsstruktur als Ganzes zu modellieren, dies führt zum Begriff einer Copula.

Als Methode zur Berechnung der Gesamtrisikos, sowohl brutto als auch netto, hat sich u.a. die Monte-Carlo-Simulation etabliert. Bei einer Monte-Carlo-Simulation wird das „Schicksal“ des Risikoportfolios N-mal mithilfe eines Zufallsgenerators ausgewürfelt und die damit entstehende fiktive Stichprobe ausgewertet. Übliche Größenordnungen für N sind dabei 5.000, 10.000, 100.000 oder $1.000.000$, je nach EDV-technischen Möglichkeiten bzw. je nach Konvergenz der betrachteten Zielgrößen.

In der vorliegenden Arbeit werden in mehreren Beispielen Risikoportfolios betrachtet, bei denen die Abhängigkeitsstruktur mithilfe der Korrelationskoeffizienten bzw. mithilfe einer Korrelationsmatrix modelliert werden. Ein Schwerpunkt liegt dabei auch auf den Problemen bzw. Fallstricken, die mit einer solchen Modellierung verbunden sind. Zum einen ist man bei der Vorgabe der Korrelationsmatrix nicht völlig frei. Nicht jede symmetrische quadratische Matrix, deren Elemente im Intervall $[-1{,}1]$ liegen und deren Diagonale nur mit Einsen besetzt ist, ist als Korrelationsmatrix geeignet. Ferner kann es je nach Wahl der Randverteilungen zu zusätzlichen Einschränkungen kommen. Zum anderen gibt es die Möglichkeit der Mehrdeutigkeit, d.h. zu einer vorgegebenen Korrelationsmatrix kann es mehrere mögliche gemeinsame Verteilungen der Verluste aus den Einzelrisiken geben. Diese Mehrdeutigkeit ist beim Erwartungswert und bei der Varianz bzw. bei der Standardabweichung des Gesamtrisikos aufgrund der Formeln

$$E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i)$$

$$Var\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \sqrt{Var(X_i)} \cdot \sqrt{Var(X_k)} \cdot \rho_{ik} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} Var(X_i) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=i+1}^{n} 2 \cdot \sqrt{Var(X_i)} \cdot \sqrt{Var(X_k)} \cdot \rho_{ik}$$

($X_1, X_2, \dots, X_n$ Zufallsvariablen, ρ_{ik} Korrelationskoeffizient X_i und X_k)

unproblematisch. Bei Risikomaßen hingegen sind bei unterschiedlichen gemeinsamen Verteilungen der Verluste aus den Einzelrisiken unterschiedliche Ergebnisse möglich. Somit ist durch die Modellierung der Randverteilungen und der Vorgabe einer Korrelationsmatrix das Gesamtrisiko eines Risikoportfolios, gemessen im Value at Risk oder Expected Shortfall, im Allgemeinen nicht eindeutig festgelegt.

Im Spezialfall, dass die Verluste aus den Einzelrisiken normalverteilt sind, kann dieser Effekt unter bestimmten Voraussetzungen ausgeschlossen werden. Lassen sich nämlich n Normalverteilungen zu einer gemeinsamen $n-$dimensionalen Normalverteilung zusammenfassen, so ist der Gesamtverlust ebenfalls normalverteilt. Die Annahme einer $n-$dimensionalen Normalverteilung findet man z.B. im Bereich von Versicherungen bei der Standardformel gemäß Solvency II.

Zur Konstruktion einer geeigneten gemeinsamen Verteilung der Verluste aus den Einzelrisiken wird in der vorliegenden Arbeit die Methode von Ene-Margit Tiit zunächst vorgestellt und anschließend in einem größeren Beispiel mit sieben Einzelrisken angewendet. Dabei zeigt sich, dass dieses Verfahren auch bei einer geeigneten

Korrelationsmatrix nicht immer zu einer gemeinsamen Verteilung führt bzw. dass es zu mehreren gemeinsamen Verteilungen führen kann.

2. Das Modell

Gegeben sei ein Risikoportfolio mit n Risiken. Der Verlust aus dem i-ten Risiko sei gegeben durch die Zufallsvariable

$$X_i, i = 1, \dots, n.$$

Es sei $\mu_i < \infty$ der Erwartungswert und $0 < \sigma_i < \infty$ die Standardabweichung des i-ten Verlustes.

Der Gesamtverlust des Risikoportfolios ergibt sich dann als Zufallsvariable durch die Addition der einzelnen Verluste:

$$G = X_1 + \cdots + X_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

Es sei μ_G der Erwartungswert und σ_G die Standardabweichung des Gesamtverlustes.

Die Abhängigkeitsstruktur sei gegeben durch die Korrelationsmatrix

$$\mathrm{P} = \left(\rho_{ij}\right)_{1 \le i,j \le n}.$$

Dabei ist P symmetrisch und ρ_{ij} der Korrelationskoeffizient der Zufallsvariablen X_i und X_j. Ferner gilt $\rho_{ii} = 1$ für alle $= 1, \dots, n$.

Das Gesamtrisiko ergibt sich dann aus dem Value at Risk bzw. dem Expected Shortfall des Gesamtverlustes G des Risikoportfolios.

Den ersten Anhaltspunkt, dass man in diesem Modell bei der Wahl der Korrelationskoeffizienten nicht komplett frei ist, liefert das folgende Beispiel mit perfekten Korrelationen.

Beispiel 1:

Gegeben seien drei Risiken und für die Verluste X_1, X_2, X_3 gelte: $\rho_{12} = 1, \rho_{23} = -1$. Aufgrund der Eigenschaften des Korrelationskoeffizienten gilt wegen $\rho_{12} = 1$

$$\frac{X_1 - \mu_1}{\sigma_1} = \frac{X_2 - \mu_2}{\sigma_2} \quad f.s.$$

Dabei steht $f.s.$ für „fast sicher“, d.h. die Gleichung gilt mit Wahrscheinlichkeit eins (vgl. [16] S.329f]). Analog erhält man wegen $\rho_{23} = -1$

$$\frac{X_2 - \mu_2}{\sigma_2} = -\frac{X_3 - \mu_3}{\sigma_3} \quad f.s.$$

Daraus folgt

$$\frac{X_1 - \mu_1}{\sigma_1} = -\frac{X_3 - \mu_3}{\sigma_3} \;\; f.s.$$

Es gilt also:

$$\rho_{12} = 1, \rho_{23} = -1 \Rightarrow \rho_{13} = -1$$

Analog kann man zeigen:

$$\rho_{12} = -1, \rho_{23} = 1 \Rightarrow \rho_{13} = -1,$$

$$\rho_{12} = 1, \rho_{23} = 1 \Rightarrow \rho_{13} = 1$$

und

$$\rho_{12} = -1, \rho_{23} = -1 \Rightarrow \rho_{13} = 1$$

Dies bedeutet insbesondere, dass es in diesem Beispiel mit $n = 3$ nur vier mögliche Korrelationsmatrizen mit perfekten Korrelationen gibt.

Betrachtet man allgemein die Varianz des Gesamtverlustes des Risikoportfolios, so gilt:

$$\sigma_G^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sigma_i \cdot \sigma_j \cdot \rho_{ij} = \sigma^T \mathrm{P} \sigma$$

Dabei bezeichnet σ den Spaltenvektor

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \vdots \\ \sigma_n \end{pmatrix}.$$

Setzt man voraus, dass die Korrelationsmatrix P positiv semidefinit ist, so ist sichergestellt, dass die Varianz des Gesamtverlustes des Risikoportfolios unabhängig von der Wahl der Verteilungen der einzelnen Verluste nicht negativ ist. Setzt man für die Korrelationsmatrix positive Definitheit voraus, so ist σ_G^2 immer positiv.

Ist eine Korrelationsmatrix hingegen nicht positiv semidefinit, so gibt es einen n –dimensionaler Spaltenvektor x mit

$$x^T \mathrm{P} x < 0.$$

Hat dieser Spaltenvektor x nur positive Einträge, so sind seine Einträge als Standardabweichungen im vorliegenden Modell geeignet. Die Varianz des Gesamtverlustes wäre dann negativ, was zu einem Widerspruch zur Definition der Varianz führen würde.

Eine Möglichkeit zu überprüfen, ob eine Matrix positiv semidefinit (positiv definit) ist, besteht darin, die Vorzeichen die Eigenwerte zu bestimmen: Eine Matrix ist genau dann positiv semidefinit (positiv definit), wenn alle Eigenwerte nichtnegativ (positiv) sind. Eine weitere Möglichkeit zur Überprüfung der Definitheit einer Matrix ergibt sich aus den Vorzeichen der Hauptunterdeterminanten, denn es gilt:

1. Eine Matrix ist genau dann positiv definit, wenn alle Hauptunterdeterminanten positiv sind.
2. Ist eine Matrix positiv semidefinit, so sind alle Hauptunterdeterminanten nichtnegativ.

(vgl. [13] S.281ff)

Damit wäre im Falle der strengeren Voraussetzung „P positiv definit" auch sichergestellt, dass die Korrelationsmatrix invertierbar ist, d.h. P^{-1} existiert.

Beispiel 2:

a) Gegeben seien $n = 2$ Risiken mit der Korrelationsmatrix

$$\mathrm{P} = \begin{pmatrix} 1 & \rho_{12} \\ \rho_{12} & 1 \end{pmatrix}.$$

Sei zunächst $-1 < \rho_{12} < 1$. In diesem Fall ist die Korrelationsmatrix positiv definit (also auch positiv semidefinit), da $|1| = 1$ und $\begin{vmatrix} 1 & \rho_{12} \\ \rho_{12} & 1 \end{vmatrix} = 1 - \rho_{12}^2 > 0$.

In den Fällen $\rho_{12} = 1$ und $\rho_{12} = -1$ müssen die Eigenwerte bestimmt werden. In beiden Fällen lautet das charakteristische Polynom

$$\det(y \cdot E - \mathrm{P}) = |y \cdot E - \mathrm{P}| = (y-1)^2 - 1 = y^2 - 2 \cdot y = y \cdot (y-2).$$

Somit ergeben sich in beiden Fällen als Eigenwerte $y = 0$ und $y = 2$. Die Korrelationsmatrix ist in diesen Fällen positiv semidefinit. D.h. bei zwei Risiken gibt es bezüglich der Wahl des Korrelationskoeffizienten zunächst keine Einschränkungen.

b) Gegeben seien $n = 3$ Risiken mit $\rho_{12} = 1, \rho_{23} = -1, \rho_{13} = -1$, d.h. für die Korrelationsmatrix gilt:

$$\mathrm{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Das charakteristische Polynom dieser Matrix lautet

$$\det(y \cdot E - \mathrm{P}) = |y \cdot E - \mathrm{P}| = \begin{vmatrix} y-1 & -1 & 1 \\ -1 & y-1 & 1 \\ 1 & 1 & y-1 \end{vmatrix} = y^2 \cdot (y-3)$$

Somit hat die Matrix die Eigenwerte $y = 0$ und $y = 3$, ist positiv semidefinit und in unserem Modell als Korrelationsmatrix geeignet.

c) Gegeben seien $n = 3$ Risiken mit $\rho_{12} = -1, \rho_{23} = -1, \rho_{13} = -1$, d.h. für die Korrelationsmatrix gilt:

$$\mathrm{P} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Diese Matrix ist nicht positiv semidefinit, da

$$|1| = 1, \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \text{ und } \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -4$$

und ist somit in unserem Modell als Korrelationsmatrix nicht geeignet. Wählt man insbesondere Verteilungen mit den Standardabweichungen $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 1$, so ergibt sich formal der Widerspruch

$$\sigma_G^2 = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \sigma_i \cdot \sigma_j \cdot \rho_{ij} = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \rho_{ij} = -3 < 0.$$

d) Gegeben seien $n = 4$ Risiken mit der Korrelationsmatrix

$$\mathrm{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}2 & -0{,}3 & -0{,}1 \\ 0{,}2 & 1 & -0{,}4 & -0{,}2 \\ -0{,}3 & -0{,}4 & 1 & 0{,}7 \\ -0{,}1 & -0{,}2 & 0{,}7 & 1 \end{pmatrix}.$$

Diese Korrelationsmatrix ist für unser Modell geeignet, da sie sogar positiv definit ist. Dies ergibt sich aus den Hauptunterdeterminanten:

$$|1| = 1 > 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0{,}2 \\ 0{,}2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 0{,}2^2 = 0{,}96 > 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0{,}2 & -0{,}3 \\ 0{,}2 & 1 & -0{,}4 \\ -0{,}3 & -0{,}4 & 1 \end{vmatrix} = 0{,}758 > 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0{,}2 & -0{,}3 & -0{,}1 \\ 0{,}2 & 1 & -0{,}4 & -0{,}2 \\ -0{,}3 & -0{,}4 & 1 & 0{,}7 \\ -0{,}1 & -0{,}2 & 0{,}7 & 1 \end{vmatrix} = 0{,}372 > 0$$

e) Gegeben seien $n = 4$ Risiken mit der Korrelationsmatrix

$$\mathrm{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}1 & -0{,}8 & -0{,}1 \\ 0{,}1 & 1 & -0{,}9 & 0{,}1 \\ -0{,}8 & -0{,}9 & 1 & -0{,}6 \\ -0{,}1 & 0{,}1 & -0{,}6 & 1 \end{pmatrix}.$$

Diese Korrelationsmatrix ist für unser Modell nicht geeignet, da sie nicht positiv semidefinit ist, denn es gilt:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0{,}1 & -0{,}8 & -0{,}1 \\ 0{,}1 & 1 & -0{,}9 & 0{,}1 \\ -0{,}8 & -0{,}9 & 1 & -0{,}6 \\ -0{,}1 & 0{,}1 & -0{,}6 & 1 \end{vmatrix} = -0{,}6523 < 0$$

Wählt man Verteilungen mit den Standardabweichungen

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_4 = a > 0,$$

so ergibt sich formal der Widerspruch

$$\sigma_G^2 = \sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{4} \sigma_i \cdot \sigma_j \cdot \rho_{ij} = a^2 \cdot \sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{4} \rho_{ij} = -0{,}4 \cdot a^2 < 0.$$

Im Folgenden wird für das vorliegende Modell die Korrelationsmatrix P als positiv semidefinit vorausgesetzt.

3. Zwei dichotome Risiken

Gegeben seien zwei dichotome Risiken, d.h. für die Verluste gelte:

$$X_1 = \begin{cases} A, & p \\ 0, & 1-p \end{cases}$$

und

$$X_2 = \begin{cases} B, & q \\ 0, & 1-q \end{cases}$$

mit $A, B > 0$ und $0 < p, q < 1$. Die Korrelationsmatrix ist in diesem Fall immer positiv semidefinit (vgl. Beispiel 2 a)).

Im Folgenden wird zunächst gezeigt, dass durch die Vorgabe des Korrelationskoeffizienten $-1 \leq \rho_{12} \leq 1$ die gemeinsame Verteilung von X_1 und X_2 eindeutig festgelegt ist.

Zunächst gilt für die Zufallsvariable X_1:

$$\mu_1 = A \cdot p + 0 \cdot (1-p) = A \cdot p$$

$$\sigma_1 = \sqrt{Var(X_1)} = \sqrt{E(X_1-\mu_1)^2} = \sqrt{E(X_1^2) - \mu_1^2} = \sqrt{A^2 \cdot p + 0^2 \cdot (1-p) - (A \cdot p)^2} =$$

$$= \sqrt{A^2 \cdot p - A^2 \cdot p^2} = A \cdot \sqrt{p \cdot (1-p)}$$

Analog ergibt sich für die Zufallsvariable X_2:

$$\mu_2 = B \cdot q$$

$$\sigma_2 = B \cdot \sqrt{q \cdot (1-q)}$$

Für die Kovarianz der Zufallsvariablen X_1 und X_2 erhält man:

$$Cov(X_1, X_2) = E\big((X_1-\mu_1) \cdot (X_2-\mu_2)\big) = E(X_1 \cdot X_2) - \mu_1 \cdot \mu_2 =$$

$$= A \cdot B \cdot P(X_1 = A, X_2 = B) + A \cdot 0 \cdot P(X_1 = A, X_2 = 0) + 0 \cdot B \cdot P(X_1 = 0, X_2 = B)$$

$$+0 \cdot 0 \cdot P(X_1 = 0, X_2 = 0) - A \cdot p \cdot B \cdot q = A \cdot B \cdot (P(X_1 = A, X_2 = B) - p \cdot q)$$

Es ergibt sich die Gleichung:

$$\rho_{12} = \frac{Cov(X_1, X_2)}{\sigma_1 \cdot \sigma_2} = \frac{A \cdot B \cdot (P(X_1 = A, X_2 = B) - p \cdot q)}{A \cdot \sqrt{p \cdot (1-p)} \cdot B \cdot \sqrt{q \cdot (1-q)}} = \frac{P(X_1 = A, X_2 = B) - p \cdot q}{\sqrt{p \cdot (1-p)} \cdot \sqrt{q \cdot (1-q)}}$$

bzw.

$$P(X_1 = A, X_2 = B) = p \cdot q + \rho_{12} \cdot \sqrt{p \cdot (1-p)} \cdot \sqrt{q \cdot (1-q)}$$

Damit können die restlichen drei Wahrscheinlichkeiten der gemeinsamen Verteilung von X_1 und X_2 berechnet werden. Es ergibt sich

$$P(X_1 = A, X_2 = 0) = P(X_1 = A) - P(X_1 = A, X_2 = B) =$$

$= p - \left(p \cdot q + \rho_{12} \cdot \sqrt{p \cdot (1-p)} \cdot \sqrt{q \cdot (1-q)}\right) =$

$= p \cdot (1-q) - \rho_{12} \cdot \sqrt{p \cdot (1-p)} \cdot \sqrt{q \cdot (1-q)}$

bzw. analog

$P(X_1 = 0, X_2 = B) = P(X_2 = B) - P(X_1 = A, X_2 = B) =$

$= q \cdot (1-p) - \rho_{12} \cdot \sqrt{p \cdot (1-p)} \cdot \sqrt{q \cdot (1-q)}$

und

$P(X_1 = 0, X_2 = 0) = 1 - P(X_1 = A, X_2 = B) - P(X_1 = A, X_2 = 0) - P(X_1 = 0, X_2 = B) =$

$= 1 - \left(p \cdot q + \rho_{12} \cdot \sqrt{p \cdot (1-p)} \cdot \sqrt{q \cdot (1-q)} + p \cdot q\right)$

$-\left(p \cdot (1-q) - \rho_{12} \cdot \sqrt{p \cdot (1-p)} \cdot \sqrt{q \cdot (1-q)}\right)$

$-\left(q \cdot (1-p) - \rho_{12} \cdot \sqrt{p \cdot (1-p)} \cdot \sqrt{q \cdot (1-q)}\right) =$

$= (1-p) \cdot (1-q) + \rho_{12} \cdot \sqrt{p \cdot (1-p)} \cdot \sqrt{q \cdot (1-q)}$

Sind X_1 und X_2 stochastisch unabhängig und damit $\rho_{12} = 0$, so erhält man in diesem Fall die üblichen Produkte der Einzelwahrscheinlichkeiten.

Betrachten wir nun $P(X_1 = A, X_2 = B)$ so kann diese Wahrscheinlichkeit wie folgt abgeschätzt werden:

Da $P(X_1 = A, X_2 = B) \leq P(X_1 = A) = p$ und $P(X_1 = A, X_2 = B) \leq P(X_2 = B) = q$ gilt

$$0 \leq P(X_1 = A, X_2 = B) \leq \min(p, q).$$

Analog erhält man:

- $0 \leq P(X_1 = A, X_2 = 0) \leq min(p, 1-q)$
- $0 \leq P(X_1 = 0, X_2 = B) \leq min(1-p, q)$
- $0 \leq P(X_1 = 0, X_2 = 0) \leq min(1-p, 1-q)$

Daraus ergeben sich für ρ_{12} die folgenden vier Einschränkungen:

1.

$0 \leq p \cdot q + \rho_{12} \cdot \sqrt{p \cdot (1-p)} \cdot \sqrt{q \cdot (1-q)} \leq \min(p, q)$

$\Leftrightarrow -p \cdot q \leq \rho_{12} \cdot \sqrt{p \cdot (1-p)} \cdot \sqrt{q \cdot (1-q)} \leq \min(p, q) - p \cdot q$

$$\Leftrightarrow -\frac{p \cdot q}{\sqrt{p \cdot (1-p)} \cdot \sqrt{q \cdot (1-q)}} \leq \rho_{12} \leq \frac{\min(p, q) - p \cdot q}{\sqrt{p \cdot (1-p)} \cdot \sqrt{q \cdot (1-q)}}$$

2.

$0 \leq p \cdot (1-q) - \rho_{12} \cdot \sqrt{p \cdot (1-p)} \cdot \sqrt{q \cdot (1-q)} \leq min(p, 1-q)$

$$\Leftrightarrow -\frac{min(p,1-q)-p\cdot(1-q)}{\sqrt{p\cdot(1-p)}\cdot\sqrt{q\cdot(1-q)}}\leq\rho_{12}\leq\frac{p\cdot(1-q)}{\sqrt{p\cdot(1-p)}\cdot\sqrt{q\cdot(1-q)}}$$

3.

$$0\leq q\cdot(1-p)-\rho_{12}\cdot\sqrt{p\cdot(1-p)}\cdot\sqrt{q\cdot(1-q)}\leq min(1-p,q)$$

$$\Leftrightarrow -\frac{min(1-p,q)-q\cdot(1-p)}{\sqrt{p\cdot(1-p)}\cdot\sqrt{q\cdot(1-q)}}\leq\rho_{12}\leq\frac{q\cdot(1-p)}{\sqrt{p\cdot(1-p)}\cdot\sqrt{q\cdot(1-q)}}$$

4.

$$0\leq(1-p)\cdot(1-q)+\rho_{12}\cdot\sqrt{p\cdot(1-p)}\cdot\sqrt{q\cdot(1-q)}\leq min(1-p,1-q)$$

$$\Leftrightarrow -\frac{(1-p)\cdot(1-q)}{\sqrt{p\cdot(1-p)}\cdot\sqrt{q\cdot(1-q)}}\leq\rho_{12}\leq\frac{min(1-p,1-q)-(1-p)\cdot(1-q)}{\sqrt{p\cdot(1-p)}\cdot\sqrt{q\cdot(1-q)}}$$

Allerdings ist für Ziffer 1 und 4 lediglich die Beschränkung nach unten und für die Ziffern 2 und 3 lediglich die Beschränkungen nach oben relevant. Dies ergibt sich aus der folgenden Überlegung: Die nicht relevanten Beschränkungen (in den Ziffern 1 und 4 die Beschränkung nach oben sowie in den Ziffern 2 und 3 die Beschränkung nach unten) resultieren jeweils aus der Vorgabe, dass die Wahrscheinlichkeiten durch das Minimum der beiden zugehörigen Wahrscheinlichkeiten beschränkt ist. Wäre z.B. der Ausdruck $P(X_1=A,X_2=B)>\min(p,q)$, so folgt daraus formal $P(X_1=A,X_2=0)<0$ oder $P(X_1=0,X_2=B)<0$. Ansonsten wäre mindestens eine der beiden Bedingungen

$$P(X_1=A,X_2=B)+P(X_1=A,X_2=0)=P(X_1=A)=p$$

und

$$P(X_1=A,X_2=B)+P(X_1=0,X_2=B)=P(X_2=B)=q$$

rechnerisch nicht erfüllbar. Sind also umgekehrt die Beschränkungen für den Korrelationskoeffizienten, die sich aus der Bedingung „Die Wahrscheinlichkeiten sind nichtnegativ“ ergeben, erfüllt, so sind die vier Wahrscheinlichkeiten auch durch das Minimum der beiden zugehörigen Wahrscheinlichkeiten beschränkt. Somit sind nur die Beschränkungen für den Korrelationskoeffizienten relevant, die aus der Nichtnegativität der vier Wahrscheinlichkeiten folgen.

Beispiel 3:

a) Es sei $p = 0{,}01$ und $q = 0{,}05$. Dann gilt:

Beschränkung gemäß Ziffer	Obere Schranke (gerundet)	Untere Schranke (gerundet)
1	$--$	$-0{,}0231$
2	$0{,}4381$	$--$
3	$2{,}2827$	$--$
4	$--$	$-43{,}3705$
Gesamt	$0{,}4381$	$-0{,}0231$

Somit gilt $-0{,}0231 \leq \rho_{12} \leq 0{,}4381$.

Wählt man $\rho_{12} = 0{,}6$, so ist

$$P(X_1 = A, X_2 = 0) = 0{,}01 \cdot 0{,}95 - 0{,}6 \cdot \sqrt{0{,}01 \cdot 0{,}99} \cdot \sqrt{0{,}05 \cdot 0{,}95} = -0{,}003511 < 0$$

und somit negativ. Damit folgt

$P(X_1 = A, X_2 = B) > 0{,}01 = p$ und $P(X_1 = 0, X_2 = 0) \geq 0{,}95 = 1 - q$.

Wählt man für den Korrelationskoeffizienten $\rho_{12} = -0{,}4$, so sind $P(X_1 = A, X_2 = B)$ negativ, $P(X_1 = A, X_2 = 0) > 0{,}01 = p$ sowie $P(X_1 = 0, X_2 = B) > 0{,}05 = q$.

b) Es sei $p = 0{,}8$ und $q = 0{,}3$. Dann gilt:

Beschränkung gemäß Ziffer	Obere Schranke (gerundet)	Untere Schranke (gerundet)
1	$--$	$-1{,}3093$
2	$3{,}0551$	$--$
3	$0{,}3273$	$--$
4	$--$	$-0{,}7638$
Gesamt	$0{,}3273$	$-0{,}7638$

Somit gilt $-0{,}7638 \leq \rho_{12} \leq 0{,}3273$.

Wählt man für den Korrelationskoeffizienten $\rho_{12} = 0{,}4$, so sind $P(X_1 = 0, X_2 = B)$ negativ, $P(X_1 = A, X_2 = B) > 0{,}3 = q$ sowie $P(X_1 = 0, X_2 = 0) > 0{,}2 = 1 - p$.

c) Es sei $p = 0{,}5$ und $q = 0{,}9$. Dann gilt:

Beschränkung gemäß Ziffer	Obere Schranke (gerundet)	Untere Schranke (gerundet)
1	$--$	$-3{,}0000$
2	$0{,}3333$	$--$
3	$3{,}0000$	$--$
4	$--$	$-0{,}3333$
Gesamt	$0{,}3333$	$-0{,}3333$

Somit gilt $-0{,}3333 \leq \rho_{12} \leq 0{,}3333$.

d) Es sei $p = 0{,}5$ und $q = 0{,}5$. In diesem Fall sind für ρ_{12} alle Werte erlaubt, denn es gilt:

Beschränkung gemäß Ziffer	Obere Schranke (gerundet)	Untere Schranke (gerundet)
1	$--$	$-1{,}0000$
2	$1{,}0000$	$--$
3	$1{,}0000$	$--$
4	$--$	$-1{,}0000$
Gesamt	$1{,}0000$	$-1{,}0000$

Als Fazit kann festgehalten werden, dass man im Fall zweier dichotomen Risiken zwar bei der Wahl des Korrelationskoeffizienten Beschränkungen zu beachten hat, die gemeinsame Verteilung aber durch diese Wahl eindeutig festgelegt ist. Damit ist u.a. auch das Gesamtrisiko, gemessen im Value at Risk oder Expected Shortfall, eindeutig bestimmbar.

4. Zwei diskrete Risiken

Im vorherigen Abschnitt wurde gezeigt, dass man bei zwei dichotomen Risiken nicht frei in der Wahl des Korrelationskoeffizienten ist. Es kann Beschränkungen geben, die von der gewählten Modellierung bzw. der Belegung der zugehörigen Parameter abhängen. Im nun folgenden Fall wird gezeigt, dass es darüber hinaus bei einem vorgegebenen Korrelationskoeffizient verschiedene Möglichkeiten für die gemeinsame Verteilung gibt. Dies hat zur Folge, dass zwar bei allen möglichen gemeinsamen Verteilungen aufgrund der Rechengesetze der Erwartungswerte und die Standardabweichung des Gesamtverlustes G des Risikoportfolios gleich sind, die Risikomaße Value at Risk und Expected Shortfall aber teilweise erheblich voneinander abweichen können. Wie bei allen Fällen mit zwei Risiken ist die Korrelationsmatrix unabhängig von der Wahl des Korrelationskoeffizienten positiv semidefinit (vgl. Beispiel 2 a)).

Gegeben seien zwei diskrete Risiken, für die Verluste gelte:

$$X_1 = \begin{cases} A_1, & p_1 \\ A_2, & p_2 \\ 0, & 1 - p_1 - p_2 \end{cases}$$

und

$$X_2 = \begin{cases} B, & q \\ 0, & 1 - q \end{cases}$$

mit $A_1, A_2, B > 0$, $0 < p_1, p_2, q < 1$ und $p_1 + p_2 < 1$. Gegeben sei ferner der Korrelationskoeffizienten $-1 \leq \rho_{12} \leq 1$.

Der Erwartungswert und Standardabweichung der beiden Zufallsvariablen ergeben sich wie folgt:

$$\mu_1 = A_1 \cdot p_1 + A_2 \cdot p_2 + 0 \cdot (1 - p_1 - p_2) = A_1 \cdot p_1 + A_2 \cdot p_2$$

$$\sigma_1 = \sqrt{Var(X_1)} = \sqrt{E(X_1 - \mu_1)^2} = \sqrt{E(X_1^2) - \mu_1^2} =$$

$$= \sqrt{A_1^2 \cdot p_1 + A_2^2 \cdot p_2 + 0^2 \cdot (1 - p_1 - p_2) - (A_1 \cdot p_1 + A_2 \cdot p_2)^2} =$$

$$= \sqrt{A_1^2 \cdot p_1 + A_2^2 \cdot p_2 - A_1^2 \cdot p_1^2 - 2 \cdot A_1 \cdot A_2 \cdot p_1 \cdot p_2 - A_2^2 \cdot p_2^2} =$$

$$= \sqrt{A_1^2 \cdot p_1 \cdot (1 - p_1) + A_2^2 \cdot p_2 \cdot (1 - p_2) - 2 \cdot A_1 \cdot A_2 \cdot p_1 \cdot p_2}$$

Analog zum letzten Abschnitt gilt:

$$\mu_2 = B \cdot q$$

$$\sigma_2 = B \cdot \sqrt{q \cdot (1 - q)}$$

Für die Kovarianz der Zufallsvariablen X_1 und X_2 erhält man:

$$Cov(X_1, X_2) = E\big((X_1 - \mu_1) \cdot (X_2 - \mu_2)\big) = E(X_1 \cdot X_2) - \mu_1 \cdot \mu_2 =$$

$$= A_1 \cdot B \cdot P(X_1 = A_1, X_2 = B) + A_1 \cdot 0 \cdot P(X_1 = A_1, X_2 = 0)$$

$$+A_2 \cdot B \cdot P(X_1 = A_2, X_2 = B) + A_2 \cdot 0 \cdot P(X_1 = A_2, X_2 = 0)$$

$$+0 \cdot B \cdot P(X_1 = 0, X_2 = B) + 0 \cdot 0 \cdot P(X_1 = 0, X_2 = 0)$$

$$-(A_1 \cdot p_1 + A_2 \cdot p_2) \cdot B \cdot q =$$

$$= A_1 \cdot B \cdot P(X_1 = A_1, X_2 = B) + A_2 \cdot B \cdot P(X_1 = A_2, X_2 = B)$$

$$-A_1 \cdot B \cdot p_1 \cdot q - A_2 \cdot B \cdot p_2 \cdot q$$

Beispiel 4:

Es seien $p_1 = 0{,}10,\ p_2 = 0{,}20,\ A_1 = 3, A_2 = 2, q = 0{,}25$ und $B = 2$. Damit ergibt sich die folgende Gleichung:

$$\rho_{12} = \frac{Cov(X_1, X_2)}{\sigma_1 \cdot \sigma_2} = \frac{6 \cdot P(X_1 = 3, X_2 = 2) + 4 \cdot P(X_1 = 2, X_2 = 2) - 0{,}15 - 0{,}20}{1{,}1000 \cdot 0{,}8660}$$

Diese Gleichung ist äquivalent zu

$$0{,}9526 \cdot \rho_{12} + 0{,}35 = 6 \cdot P(X_1 = 3, X_2 = 2) + 4 \cdot P(X_1 = 2, X_2 = 2).$$

Dabei gelten aufgrund der gewählten Werte die Nebenbedingungen

$$0 \leq P(X_1 = 3, X_2 = 2) \leq \min(p_1, q) = 0{,}10$$

und

$$0 \leq P(X_1 = 2, X_2 = 2) \leq \min(p_2, q) = 0{,}20.$$

a) Zunächst betrachten wir den Fall der Unkorreliertheit, d.h. $\rho_{12} = 0$. Da aus der stochastischen Unabhängigkeit die Unkorreliertheit folgt, gibt es die folgende Möglichkeit für die gemeinsame Verteilung:

Wahrscheinlichkeit	$X_2 = 2$	$X_2 = 0$	Summe
$X_1 = 3$	0,0250	0,0750	0,1000
$X_1 = 2$	0,0500	0,1500	0,2000
$X_1 = 0$	0,1750	0,5250	0,7000
Summe	0,2500	0,7500	1,0000

Da stochastische Unabhängigkeit und Unkorreliertheit nicht äquivalent sind, gibt es im Fall der Unkorreliertheit noch weitere Möglichkeiten für die gemeinsame Verteilung. Wählt man in der obigen Gleichung $\rho_{12} = 0$ und setzt z.B.

$$P(X_1 = 2, X_2 = 2) = 0,$$

so erhält man:

$$P(X_1 = 3, X_2 = 2) = \frac{0{,}35}{6} = 0{,}0583$$

Daraus ergibt sich als gemeinsame Verteilung:

Wahrscheinlichkeit	$X_2 = 2$	$X_2 = 0$	Summe
$X_1 = 3$	0,0583	0,0417	0,1000
$X_1 = 2$	0,0000	0,2000	0,2000
$X_1 = 0$	0,1917	0,5083	0,7000
Summe	0,2500	0,7500	1,0000

Egal ob stochastische Unabhängigkeit oder nur Unkorreliertheit vorliegt, für den Erwartungswert und die Standardabweichung des Gesamtverlustes G gilt:

$$\mu_G = \mu_1 + \mu_2 = 0{,}7 + 0{,}5 = 1{,}2$$

$$\sigma_G = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2 \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \rho_{12}} = \sqrt{1{,}1000^2 + 0{,}8660^2 + 2 \cdot 1{,}1000 \cdot 0{,}8633 \cdot 0} =$$

$$= 1{,}4000$$

Für die Risikomaße Value at Risk zum Niveau 5% ($VaR_{5\%}$) und den Expected Shortfall zum Niveau 5% ($ES_{5\%}$) des Gesamtverlustes G erhält man im Fall der stochastischen Unabhängigkeit

$$VaR_{5\%}(G) = 4, ES_{5\%}(G) = \frac{5 \cdot 0{,}025 + 4 \cdot 0{,}025}{0{,}05} = 4{,}5$$

und im anderen lediglich unkorrelierten Fall

$$VaR_{5\%}(G) = 5, ES_{5\%}(G) = 5.$$

Somit erhöht sich das Gesamtrisiko im Vergleich zum Fall der stochastischen Unabhängigkeit um 25% bzw. um ca. 11%, je nachdem, welche Kennzahl man zur Risikobewertung wählt.

b) Der Effekt, dass zu einem vorgegebenen Korrelationskoeffizienten mehrere gemeinsame Verteilungen gibt, tritt auch auf, wenn die beiden Verluste aus den Einzelrisiken nicht unkorreliert sind. Wählt man z.B. als Korrelationskoeffizient $\rho_{12} = 0{,}4$, so lautet die obige Gleichung

$$0{,}9526 \cdot 0{,}4 + 0{,}35 = 6 \cdot P(X_1 = 3, X_2 = 2) + 4 \cdot P(X_1 = 2, X_2 = 2)$$

bzw.

$$0{,}7310 = 6 \cdot P(X_1 = 3, X_2 = 2) + 4 \cdot P(X_1 = 2, X_2 = 2).$$

Daraus lassen sich verschiedene gemeinsame Verteilungen ableiten. Hier zwei ausgewählte Möglichkeiten. Bei der ersten Möglichkeit ist der Ausgangspunkt

$$P(X_1 = 3, X_2 = 2) = 0$$

bei der zweiten Möglichkeit

$$P(X_1 = 3, X_2 = 2) = 0{,}1.$$

Möglichkeit 1 Wahrscheinlichkeit	$X_2 = 2$	$X_2 = 0$	Summe
$X_1 = 3$	0,0000	0,1000	0,1000
$X_1 = 2$	0,1828	0,0172	0,2000
$X_1 = 0$	0,0672	0,6328	0,7000
Summe	0,2500	0,7500	1,0000

Möglichkeit 2 Wahrscheinlichkeit	$X_2 = 2$	$X_2 = 0$	Summe
$X_1 = 3$	0,1000	0,0000	0,1000
$X_1 = 2$	0,0328	0,1672	0,2000
$X_1 = 0$	0,1172	0,5828	0,7000
Summe	0,2500	0,7500	1,0000

Für die beiden gemeinsamen Verteilungen gilt wieder, dass die Erwartungswerte und die Standardabweichungen des Gesamtverlustes G identisch sind:

$\mu_G = \mu_1 + \mu_2 = 0{,}7 + 0{,}5 = 1{,}2$

$\sigma_G = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2 \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \rho_{12}} = \sqrt{1{,}1000^2 + 0{,}8660^2 + 2 \cdot 1{,}1000 \cdot 0{,}8633 \cdot 0{,}4} =$

$= 1{,}6499$

Die Risikomaße hingegen nehmen unterschiedliche Werte an. Bei der ersten Möglichkeit gilt

$$VaR_{5\%}(G) = 4, ES_{5\%}(G) = 4$$

und bei der zweiten Möglichkeit

$$VaR_{5\%}(G) = 5, ES_{5\%}(G) = 5.$$

Das Gesamtrisiko erhöht sich bei der zweiten Möglichkeit im Vergleich zur ersten Möglichkeit bei beiden Kennzahlen um 25%.

c) Neben Fällen, in denen der vorgegebene Korrelationskoeffizient zu mehreren gemeinsamen Verteilungen passt, gibt es auch hier Fälle, in denen zu einem vorgegebenen Korrelationskoeffizienten keine gemeinsame Verteilung existiert.

   Wählt man in der Gleichung

$$0{,}9526 \cdot \rho_{12} + 0{,}35 = 6 \cdot P(X_1 = 3, X_2 = 2) + 4 \cdot P(X_1 = 2, X_2 = 2)$$

   einen Wert für den Korrelationskoeffizienten ρ_{12}, sodass die linke Seite der Gleichung negativ wird, so führt dies direkt zum Widerspruch. Denn in diesem Fall müsste auch mindestens eine der beiden Wahrscheinlichkeiten auf der rechten Seite negativ sein. Die Ungleichung

$$0{,}9526 \cdot \rho_{12} + 0{,}35 < 0$$

   ist äquivalent zu

$$\rho_{12} < -\frac{0{,}35}{0{,}9526}$$

   bzw.

$$\rho_{12} < -0{,}3674.$$

   Somit gibt es z.B. für $\rho_{12} = -0{,}4$ im vorliegenden Modell keine gemeinsame Verteilung für die Verluste aus den beiden Risiken.

Diese Beispiele zeigen, dass selbst bei einfachen Modellierungen der Risiken und einer positiv semidefiniten Korrelationsmatrix, die Frage nach der gemeinsamen Verteilung der Verluste nicht oder nur mehrdeutig lösbar seien kann. Die Mehrdeutigkeit hat zur Folge, dass das Gesamtrisiko gemessen im Value at Risk oder Expected Shortfall ebenfalls nicht eindeutig bestimmt werden kann.

5. Normalverteilte Risiken: Varianz-Kovarianz-Methode

Ein wichtiger Spezialfall liegt vor, wenn die Verluste aller Einzelrisiken normalverteilt sind. Allerdings ist dies nicht hinreichend dafür, dass auch der Gesamtverlust des Risikoportfolios normalverteilt ist, wie folgendes Beispiel zeigt.

Beispiel 5:

Sei U normalverteilt mit Erwartungswert $\mu \in IR$ und Standardabweichung $0 < \sigma < \infty$. Es sei W eine zweiwertige Zufallsvariable mit:

$$W = \begin{cases} 1, & p \\ 0, & 1-p \end{cases}$$

Dabei sei $0 \leq p < 1$. Ferner gelte, dass U und W stochastisch unabhängig sind. Wir definieren eine weitere Zufallsvariable V durch:

$$V = \begin{cases} U, & W = 1 \\ 2 \cdot \mu - U, & W = 0 \end{cases}$$

Dann ist V ebenfalls normalverteilt mit Erwartungswert $\mu \in IR$ und Standardabweichung $0 < \sigma < \infty$, denn es gilt mit dem Satz der totalen Wahrscheinlichkeit und wegen der Symmetrie der Normalverteilung für alle $x \in IR$:

$$P(V \leq x) = P(V \leq x|W = 1) \cdot P(W = 1) + P(V \leq x|W = 0) \cdot P(W = 0) =$$

$$= P(U \leq x|W = 1) \cdot p + P(2 \cdot \mu - U \leq x|W = 0) \cdot (1 - p) =$$

$$= P(U \leq x) \cdot p + P(U \geq \mu + (\mu - x)) \cdot (1 - p) =$$

$$= P(U \leq x) \cdot p + P\big(U \leq \mu - (\mu - x)\big) \cdot (1 - p) = P(U \leq x) \cdot p + P(U \leq x) \cdot (1 - p) =$$

$$= P(U \leq x)$$

Des Weiteren gilt:

$$E(U \cdot V) = E(U \cdot V|W = 1) \cdot P(W = 1) + E(U \cdot V|W = 0) \cdot P(W = 0) =$$

$$= E(U^2|W = 1) \cdot p + E(2 \cdot \mu \cdot U - U^2|W = 0) \cdot (1 - p) =$$

$$= E(U^2) \cdot p + \big(2 \cdot \mu \cdot E(U) - E(U^2)\big) \cdot (1 - p) = E(U^2) \cdot (2 \cdot p - 1) + 2 \cdot \mu^2 \cdot (1 - p) =$$

$$= (\sigma^2 + \mu^2) \cdot (2 \cdot p - 1) + 2 \cdot \mu^2 \cdot (1 - p) = \sigma^2 \cdot (2 \cdot p - 1) + \mu^2$$

Damit erhält man:

$$\rho_{UV} = \frac{E(U \cdot V) - E(U) \cdot E(V)}{\sqrt{Var(U) \cdot Var(V)}} = \frac{\sigma^2 \cdot (2 \cdot p - 1) + \mu^2 - \mu^2}{\sigma^2} = 2 \cdot p - 1$$

Damit sind die beiden Zufallsvariablen U und V normalverteilt jeweils mit Erwartungswert $\mu \in IR$, Standardabweichung $0 < \sigma < \infty$ und für den Korrelationskoeffizient gilt $\rho_{UV} = 2 \cdot p - 1$. Aber die Summe von beiden Zufallsvariablen ist nicht normalverteilt, denn man erhält:

$$P(U + V = 2 \cdot \mu) =$$

$$= P(U + V = 2 \cdot \mu | W = 1) \cdot P(W = 1) + P(U + V = 2 \cdot \mu | W = 0) \cdot P(W = 0) =$$

$$= P(2 \cdot U = 2 \cdot \mu | W = 1) \cdot p + P(U + 2 \cdot \mu - U = 2 \cdot \mu | W = 0) \cdot (1 - p) =$$

$$= 0 \cdot p + 1 \cdot (1 - p) = 1 - p > 0$$

Aufgrund dieses Beispiels kann die Summe von normalverteilten Zufallsvariablen im Allgemeinen nicht als normalverteilt angenommen werden kann. Es wird daher in diesem Abschnitt die folgende zusätzliche Annahme getroffen.

Annahme: Der Zufallsvektor der Verluste der Einzelrisken, gegeben durch

$$X^T = (X_1 \quad X_2 \quad \dots \quad X_n),$$

sei n −dimensional normalverteilt (vgl. [11] S.148ff, [8] S.271ff) mit dem Erwartungswertvektor μ, gegeben durch

$$\mu^T = (\mu_1 \quad \mu_2 \quad \dots \quad \mu_n),$$

und der Kovarianzmatrix

$$\Sigma = \left(Cov(X_i, X_j)\right)_{1 \leq i,j \leq n}.$$

Bei dieser Annahme handelt es sich um eine zusätzliche Einschränkung des Modells. Denn sind die Randverteilungen eines n −dimensional Zufallsvektors alle als Normalverteilungen gegeben, so ist dies nicht hinreichend dafür, dass die n −dimensionale Zufallsvariable n −dimensional normalverteilt ist (vgl. [14] S.269 und [15] S.504).

Für die Korrelationsmatrix P und die Kovarianzmatrix Σ gilt die Beziehung

$$\Sigma = \mathrm{S} \cdot \mathrm{P} \cdot \mathrm{S},$$

wobei S die folgende Diagonalmatrix ist:

$$\mathrm{S} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_n \end{pmatrix}.$$

Damit gilt:

1. Σ ist positiv semidefinit
2. P positiv definit $\Rightarrow$ Σ ist positiv definit
3. P positiv definit $\Rightarrow$ Σ ist invertierbar

Da

$$x^T \Sigma x = x^T \mathrm{SPS} x = (S^T x)^T \mathrm{P}(\mathrm{S}x) = (Sx)^T \mathrm{P}(\mathrm{S}x)$$

für alle (Spaltenvektoren) $x \in IR^n$, folgen Ziffer 1 und 2. Da im Fall positiv definit $\det(\mathrm{P}) > 0$, folgt die Behauptung in Ziffer 3 aus

$$\det(\Sigma) = \det(\mathrm{S}) \cdot \det(\mathrm{P}) \cdot \det(\mathrm{S})$$

und $\det(S) > 0$.

Ist der Erwartungswertvektor der Nullvektor, d.h. $\mu = 0$, so spricht man von einer zentrierten n –dimensionalen Normalverteilung. In diesem Fall gilt für die charakteristische Funktion

$$\varphi(u) = E\left(e^{i\cdot u^T\cdot X}\right) = e^{-\frac{1}{2}\cdot u^T\cdot\Sigma\cdot u} \;, \; u \in IR^n,$$

dabei sei u ein Spaltenvektor und $i = \sqrt{-1}$ (vgl. [7] S.106f). Für den allgemeinen (nicht zentrierten) Fall ergibt sich die charakteristische Funktion wie folgt:

$$\varphi(u) = E\left(e^{i\cdot u^T\cdot X}\right) = E\left(e^{i\cdot u^T\cdot(X-\mu)+i\cdot u^T\cdot\mu}\right) = e^{i\cdot u^T\cdot\mu}\cdot E\left(e^{i\cdot u^T\cdot(X-\mu)}\right) =$$

$$= e^{i\cdot u^T\cdot\mu}\cdot e^{-\frac{1}{2}u^T\cdot\Sigma\cdot u} = e^{i\cdot u^T\cdot\mu-\frac{1}{2}u^T\cdot\Sigma\cdot u}, \; u \in IR^n$$

Wählt man als u den j –ten Einheitsvektor mal $z \in IR$, so erhält man als charakteristische Funktion von X_j die charakteristische Funktion der Normalverteilung mit Erwartungswert μ_j und Standardabweichung σ_j:

$$\varphi_j(z) = E\left(e^{i\cdot z\cdot X_j}\right) = E\left(e^{i\cdot u^T\cdot X}\right) = e^{i\cdot u^T\cdot\mu-\frac{1}{2}u^T\cdot\Sigma\cdot u} = e^{i\cdot z\cdot\mu_j-\frac{1}{2}z^2\cdot\sigma_j^2}$$

(vgl. [7] S.104). Da damit aufgrund des Eindeutigkeitssatzes (vgl. [7] S.354) die Verteilung von X_j eindeutig festgelegt ist, widerspricht die obige zusätzliche Annahme nicht der Modellannahme, dass X_j normalverteilt ist.

Die charakteristische Funktion des Gesamtverlustes G des Risikoportfolios bestimmt man ähnlich, in dem man $u^T = (z \quad z \quad \dots \quad z)\,, z \in IR$, in die charakteristische Funktion der n –dimensionalen Normalverteilung einsetzt:

$$\varphi_G(z) = E\left(e^{i\cdot z\cdot G}\right) = E\left(e^{i\cdot u^T\cdot X}\right) = e^{i\cdot u^T\cdot\mu-\frac{1}{2}u^T\cdot\Sigma\cdot u} = e^{i\cdot z\cdot\sum_{j=1}^n\mu_j-\frac{1}{2}z^2\cdot\sum_{j=1}^n\sum_{k=1}^n\sigma_j\cdot\sigma_k\cdot\rho_{jk}}\;, z \in IR$$

Wiederum der Eindeutigkeitssatz liefert, dass G normalverteilt ist mit Erwartungswert

$$\mu_G = \sum_{j=1}^n \mu_j$$

und Standardabweichung

$$\sigma_G = \sqrt{\sum_{j=1}^n\sum_{k=1}^n \sigma_j\cdot\sigma_k\cdot\rho_{jk}}.$$

Für das Gesamtrisiko bzw. die Risikomaße von G (zum Niveau 5%) gilt dann

$$VaR_{5\%}(G) = \mu_G + 1{,}6449\cdot\sigma_G$$

und

$$ES_{5\%}(G) = \mu_G + 2{,}0626\cdot\sigma_G$$

(vgl. [2] S.127f).

Diese Modellierung mithilfe einer n –dimensionalen Normalverteilung wird auch als Varianz-Kovarianz-Methode bezeichnet wird (vgl. [9] S.23f).

Beispiel 6:

Es seien vier Risiken mit normalverteilten Verlusten wie folgt gegeben:

Risiko Nr. i	Erwartungswert μ_i	Standardabweichung σ_i
1	240.000	120.000
2	60.000	20.000
3	30.000	10.000
4	20.000	5.000

Ferner ist die Korrelationsmatrix gegeben durch:

$$\rho_{12} = 0{,}2, \rho_{13} = -0{,}3, \rho_{14} = -0{,}1, \rho_{23} = -0{,}4, \rho_{24} = -0{,}2, \rho_{34} = 0{,}7$$

Dies entspricht der Korrelationsmatrix in Beispiel 2d). Wir gehen gemäß der zusätzlichen Annahme in diesem Abschnitt von einer gemeinsamen 4 –dimensionalen Normalverteilung aus.

Bezüglich der Überprüfung, dass die Korrelationsmatrix

$$\mathrm{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}2 & -0{,}3 & -0{,}1 \\ 0{,}2 & 1 & -0{,}4 & -0{,}2 \\ -0{,}3 & -0{,}4 & 1 & 0{,}7 \\ -0{,}1 & -0{,}2 & 0{,}7 & 1 \end{pmatrix}$$

positiv definit (und somit auch positiv semidefinit) ist, wird auf Beispiel 2d) verwiesen.

Wendet man nun die Varianz-Kovarianz-Methode an.so erhält man zunächst:

$$\mu_G = \sum_{i=1}^{4} \mu_i = 350.000$$

$$\sigma_G^2 = \sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{4} \sigma_i \cdot \sigma_j \cdot \rho_{ij} = 14.915.000.000$$

$$\sigma_G = \sqrt{14.915.000.000} = 122.126{,}98$$

Als Risikomaße bzw. als Gesamtrisiko ergeben sich:

$$VaR_{5\%}(G) = 350.000 + 1{,}6449 \cdot 122.126{,}98 = 550.886{,}67$$

und

$$ES_{5\%}(G) = 350.000 + 2{,}0626 \cdot 122.126{,}98 = 601.899{,}12.$$

D.h. mit einer Wahrscheinlichkeit von (mindestens) 95% ist der Gesamtverlust geringer als $550.886{,}67$ und der durchschnittliche Gesamtverlust unter den 5% schlechtesten Szenarien beträgt $601.899{,}12$. Reserviert man für das Gesamtrisiko zur Absicherung einen Betrag in Höhe von $550.886{,}67$, so ist dieser mit einer Wahrscheinlichkeit von 95% ausreichend bemessen.

Beispiel 7:

Gegeben sei die Situation aus Beispiel 6 mit den folgenden geänderten Korrelationskoeffizienten:

$$\rho_{12} = 0{,}1, \rho_{13} = -0{,}8, \rho_{14} = -0{,}1, \rho_{23} = -0{,}9, \rho_{24} = 0{,}1, \rho_{34} = -0{,}6$$

Ferner seien die vier Standardabweichungen gleich:

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_4 = a$$

Dies entspricht den Vorgaben aus Beispiel 2e). Nimmt man nun an, dass es zu diesen Modellannahmen eine $4-$dimensionale Normalverteilung mit den passenden Randverteilungen gibt, so ergibt sich gemäß der Berechnung in Beispiel 2e) als Varianz des Gesamtverlustes

$$\sigma_G^2 = \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4} \sigma_i \cdot \sigma_j \cdot \rho_{ij} = a^2 \cdot \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4} \rho_{ij} = -0{,}4 \cdot a^2 < 0.$$

Dies ergibt einen Widerspruch. Daraus ist zu folgern, dass die Korrelationsmatrix nicht positiv semidefinit sein kann und es daher zu dieser Korrelationsmatrix keine $4-$dimensionale Normalverteilung gibt. Dies bestätigt sich, wenn man die dritte und die vierte Hauptunterdeterminante berechnet:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0{,}1 & -0{,}8 \\ 0{,}1 & 1 & -0{,}9 \\ -0{,}8 & -0{,}9 & 1 \end{vmatrix} = -0{,}316 < 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0{,}1 & -0{,}8 & -0{,}1 \\ 0{,}1 & 1 & -0{,}9 & 0{,}1 \\ -0{,}8 & -0{,}9 & 1 & -0{,}6 \\ -0{,}1 & 0{,}1 & -0{,}6 & 1 \end{vmatrix} = -0{,}6523 < 0$$

Beispiel 7 zeigt, dass es unter der Annahme, dass die Verluste aller Einzelrisiken normalverteilt sind, nicht bei jeder Wahl der Korrelationsmatrix P von einer $n-$dimensionalen Normalverteilung ausgegangen bzw. die Varianz-Kovarianz-Methode angewendet werden kann.

Unproblematisch ist die Anwendung der Varianz-Kovarianz-Methode aber, wenn die Korrelationsmatrix P und somit auch die Kovarianzmatrix Σ positiv semidefinit ist. Dabei ist allerdings zu beachten, dass die Standard-Definition einer $n-$dimensionalen

Normalverteilung für den Fall einer positiv semidefiniten, aber nicht positiv definiten, Kovarianzmatrix allgemeiner formuliert werden muss (vgl. [8] S.274). Gegebenenfalls kann dabei der Gesamtverlust des Risikoportfolios konstant sein, wie das folgende einfache Beispiel zeigt:

Beispiel 8:

Wir betrachten ein Risikoportfolio mit zwei Risiken, deren Einzelverluste jeweils standardnormalverteilt sind. Die gemeinsame Verteilung sei eine $2-$dimensionale Normalverteilung mit der positiv semidefiniten, aber nicht positiv definiten Matrix

$$\mathrm{P} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dann gilt für den Gesamtverlust G: $\mu_G = 0$ und $\sigma_G = \sqrt{\rho_{11} + \rho_{12} + \rho_{21} + \rho_{22}} = 0$. D.h. die Zufallsvariabel G nimmt fast sicher den Wert 0 an.

6. Copulas und die Fréchet-Hoeffding-Schranken

Zum Verständnis des später vorgestellten Verfahrens von Ene-Margit Tiit benötigt man den Begriff der Copula und einige dazugehörige Ergebnisse.

Gegeben seien n auf dem Intervall $[0,1]$ gleichverteilte Zufallsvariablen $U_1, U_2, \dots, U_n$. Die gemeinsame Verteilungsfunktion

$$C: [0,1]^n \to [0,1]$$

heißt Copula, d.h. es gilt:

$$C(u_1, u_2, \dots, u_n) = P(U_1 \leq u_1, U_2 \leq u_2, \dots, U_n \leq u_n), \qquad u_1, u_2, \dots, u_n \in [0,1]$$

(vgl. [12] S.4f)

Da es sich bei einer Copula um eine mehrdimensionale Verteilungsfunktion handelt und die eindimensionalen Randverteilungen durch die Gleichverteilung auf dem Intervall $[0,1]$ gegeben sind, ergeben sich u.a. die folgenden Eigenschaften (vgl. [12] S.7f, [16] S.293ff):

1. $C(1, \dots, 1, u_k, 1, \dots, 1) = u_k$ für alle $k = 1,2, \dots, n$ und $u_k \in [0,1]$
2. $C(u_1, u_2, \dots, u_n) = 0$, falls es ein $k \in \{1,2, \dots, n\}$ gibt mit $u_k = 0$
3. C ist rechtecksmonoton, d.h.

$$\Delta C(u, v] = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \sum_{\substack{M \subset \{1,2,\dots,n\} \\ |M| = j}} C\big(w_{1,(u,v],M}, w_{2,(u,v],M}, \dots, w_{n,(u,v],M}\big) \geq 0$$

für alle $(u, v] = (u_1, v_1] \times (u_2, v_2] \times \dots \times (u_n, v_n] \subset [0,1]^n$, wobei

$$w_{k,(u,v],M} = \begin{cases} u_k, & k \in M \\ v_k, & k \notin M \end{cases}$$

Umkehrt kann man zeigen, dass jede Funktion

$$C: [0,1]^n \to [0,1]$$

mit diesen drei Eigenschaften eine Copula ist (vgl. [12] S.8f).

Ferner gilt

$$\Delta C(u, v] = P(u_1 < U_1 \leq v_1, u_2 < U_2 \leq v_2, \dots, u_n < U_n \leq v_n)$$

(vgl. [12] S.8).

Ein zentrales Ergebnis aus der Theorie der Copulas ist der Satz von Sklar ([12] S.14ff). Er besagt einerseits, dass bei Vorgabe von n reell-wertigen Zufallsvariablen mit den Verteilungsfunktionen $F_1, F_2, \dots, F_n$ und einer Copula C durch

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) := C\big(F_1(x_1), F_2(x_2), \dots, F_n(x_n)\big), \qquad x_1, x_2, \dots, x_n \in IR$$

eine mehrdimensionale Verteilungsfunktion definiert wird. Umgekehrt gibt es zu jeder mehrdimensionalen Verteilungsfunktion

$$F: IR^n \to [0,1]$$

eine Copula C, sodass gilt:

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = C\big(F_1(x_1), F_2(x_2), \dots, F_n(x_n)\big), \qquad x_1, x_2, \dots, x_n \in IR$$

Dabei sind $F_1, F_2, \dots, F_n$ die Verteilungsfunktionen der eindimensionalen Randverteilungen. Ist F stetig, dann ist C eindeutig. Insbesondere ist die Eindeutigkeit bei diskreten Verteilungen nicht gegeben.

Ein weiteres wichtiges Ergebnis betrifft die obere und untere Fréchet-Hoeffding-Schranke. Es gilt der folgende Satz:

Satz:

Sei $C: [0,1]^n \to [0,1]$ eine Copula. Dann gilt für alle $(u_1, u_2, \dots, u_n) \in [0,1]^n$:

$$max\left(\left(\sum_{i=1}^{n} u_i - n + 1\right), 0\right) \leq C(u_1, u_2, \dots, u_n) \leq min(u_1, u_2, \dots, u_n)$$

Die obere Fréchet-Hoeffding-Schranke

$$M(u_1, u_2, \dots, u_n) \coloneqq min(u_1, u_2, \dots, u_n)$$

ist immer (d.h. für alle $n \in IN$) die untere Fréchet-Hoeffding-Schranke

$$W(u_1, u_2, \dots, u_n) \coloneqq max\left(\left(\sum_{i=1}^{n} u_i - n + 1\right), 0\right)$$

lediglich für $n \leq 2$ eine Copula. (vgl. [12] S.11f)

Ein für den weiteren Verlauf dieses Artikels wichtiges Ergebnis ergibt sich aus den Fréchet-Hoeffding-Schranken wie folgt:

Wir betrachten den Fall für $n = 2$, d.h. zwei reell-wertige Zufallsvariablen X_1 und X_2 mit endlichen Varianzen, einer beliebigen Abhängigkeitsstruktur und dem daraus resultierenden Korrelationskoeffizienten ρ. Gemäß dem Satz von Sklar existiert eine Copula C, sodass für die gemeinsame Verteilungsfunktion von X_1 und X_2

$$F(x_1, x_2) = C\big(F_1(x_1), F_2(x_2)\big), \qquad x_1, x_2 \in IR,$$

gilt, wobei F_1, F_2 die Verteilungsfunktionen der beiden Randverteilungen sind. Geht man nun umgekehrt vor und ersetzt bei der Abhängigkeitsstruktur der beiden Zufallsvariablen die Copula C durch die obere Fréchet-Hoeffding-Schranke M bzw. durch die untere Fréchet-Hoeffding-Schranke W, so gilt für die zugehörigen Korrelationskoeffizienten ρ_M und ρ_W die Ungleichung

$$\rho_W \leq \rho \leq \rho_M.$$

Das Ergebnis geht auf den französischen Mathematikers Maurice René Fréchet zurück (vgl. z.B. [6]). Für den Beweis benötigt man die Gleichung

$$Cov(X_1, X_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(x_1, x_2) - F_1(x_1) \cdot F_2(x_2) \; dx_1 dx_2.$$

Bewiesen wird diese Gleichung z.B. in [4] für nichtnegative Zufallsvariablen, eine Verallgemeinerung lässt sich analog beweisen. Der Beweis dazu befindet sich im mathematischen Anhang dieses Artikels. Mithilfe der Fréchet-Hoeffding-Schranken und dem Zusammenhang

$$\rho = \frac{Cov(X_1, X_2)}{\sqrt{Var(X_1)} \cdot \sqrt{Var(X_2)}}$$

folgt daraus die Ungleichung $\rho_W \leq \rho \leq \rho_M$.

Beispiel 9:

Wir betrachten zunächst die Situation aus Abschnitt 3, d.h. gegeben seien zwei dichotome Risiken, d.h. für die Verluste gelte:

$$X_1 = \begin{cases} A, & p \\ 0, & 1-p \end{cases}$$

und

$$X_2 = \begin{cases} B, & q \\ 0, & 1-q \end{cases}$$

mit $A, B > 0$ und $0 < p, q < 1$.

Ist die Abhängigkeitsstruktur von X_1 und X_2 gegeben durch die obere Fréchet-Hoeffding-Schranke M, so gilt

$$P(X_1 = 0, X_2 = 0) = F(0{,}0) = M(F_1(0), F_2(0)) = \min(1-p, 1-q).$$

Daraus ergibt sich

$$P(X_1 = A, X_2 = 0) = P(X_2 = 0) - P(X_1 = 0, X_2 = 0) = 1 - q - \min(1-p, 1-q),$$

$$P(X_1 = 0, X_2 = B) = P(X_1 = 0) - P(X_1 = 0, X_2 = 0) = 1 - p - \min(1-p, 1-q)$$

sowie

$$P(X_1 = A, X_2 = B) = p + q - 1 + \min(1-p, 1-q).$$

Damit folgt

$$E(X_1 \cdot X_2) = A \cdot B \cdot P(X_1 = A, X_2 = B) = A \cdot B \cdot (p + q - 1 + \min(1-p, 1-q))$$

bzw.

$$\rho_M = \frac{A \cdot B \cdot (p + q - 1 + \min(1-p, 1-q)) - A \cdot p \cdot B \cdot q}{A \cdot \sqrt{p \cdot (1-p)} \cdot B \cdot \sqrt{q \cdot (1-q)}} =$$

$$= \frac{p + q - 1 + \min(1 - p, 1 - q) - p \cdot q}{\sqrt{p \cdot (1 - p)} \cdot \sqrt{q \cdot (1 - q)}} =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{q \cdot (1 - p)}{\sqrt{p \cdot (1 - p)} \cdot \sqrt{q \cdot (1 - q)}} & , \quad p \geq q \\[2ex] \dfrac{p \cdot (1 - q)}{\sqrt{p \cdot (1 - p)} \cdot \sqrt{q \cdot (1 - q)}} & , \quad p < q \end{cases}$$

Ist die Abhängigkeitsstruktur von X_1 und X_2 gegeben durch die untere Fréchet-Hoeffding-Schranke W, so erhält man

$$P(X_1 = 0, X_2 = 0) = F(0{,}0) = W(F_1(0), F_2(0)) = \max(1 - p - q, 0).$$

Analog zur oberen Fréchet-Hoeffding-Schranke ergibt sich

$P(X_1 = A, X_2 = 0) = P(X_2 = 0) - P(X_1 = 0, X_2 = 0) = 1 - q - \max(1 - p - q, 0),$

$P(X_1 = 0, X_2 = B) = P(X_1 = 0) - P(X_1 = 0, X_2 = 0) = 1 - p - \max(1 - p - q, 0),$

$P(X_1 = A, X_2 = B) = p + q - 1 + \max(1 - p - q, 0)$

sowie

$E(X_1 \cdot X_2) = A \cdot B \cdot P(X_1 = A, X_2 = B) = A \cdot B \cdot (p + q - 1 + \max(1 - p - q, 0))$

und

$$\rho_W = \frac{A \cdot B \cdot (p + q - 1 + \max(1 - p - q, 0)) - A \cdot p \cdot B \cdot q}{A \cdot \sqrt{p \cdot (1 - p)} \cdot B \cdot \sqrt{q \cdot (1 - q)}} =$$

$$= \frac{p + q - 1 + \max(1 - p - q, 0) - p \cdot q}{\sqrt{p \cdot (1 - p)} \cdot \sqrt{q \cdot (1 - q)}} =$$

$$= \begin{cases} -\dfrac{(1 - p) \cdot (1 - q)}{\sqrt{p \cdot (1 - p)} \cdot \sqrt{q \cdot (1 - q)}} & , \quad p + q \geq 1 \\[2ex] -\dfrac{p \cdot q}{\sqrt{p \cdot (1 - p)} \cdot \sqrt{q \cdot (1 - q)}} & , \quad p + q < 1 \end{cases}$$

Somit entspricht die Ungleichung

$$\rho_W \leq \rho_{12} \leq \rho_M$$

den in Abschnitt 3 elementar hergeleiteten Beschränkungen für den Korrelationskoeffizienten im Fall zweier dichotomen Risiken.

Beispiel 10:

Wir betrachten nun zwei Risiken, deren Verluste durch unterschiedliche stetige Verteilungen gegeben sind. X_1 sei der Verlust des ersten Risikos, dieser sei zunächst gleichverteilt auf dem Intervall $[0,1]$. Damit erhält man Erwartungswert $\mu_1 = 0{,}5$ und die Standardabweichung $\sigma_1 = \sqrt{\frac{1}{12}}$. Der Verlust des zweiten Risikos sei X_2. Dessen Verteilung sei gegeben durch eine Dreiecksverteilung zunächst ebenfalls auf dem Intervall $[0,1]$ mit dem best case $a = 0$, dem normal case $b \in (0,1)$ und dem worst case $c = 1$. Als Erwartungswert für den Verlust des zweiten Risikos erhält man $\mu_2 = \frac{b+1}{3}$ und als Standardabweichung $\sigma_2 = \sqrt{\frac{1+b^2+(1-b)^2}{36}}$.

Ist die Abhängigkeit durch die obere Fréchet-Hoeffding-Schranke

$$M(u_1, u_2) = min(u_1, u_2)$$

gegeben, so erhält man für die Kovarianz:

$$Cov(X_1, X_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(x_1, x_2) - F_1(x_1) \cdot F_2(x_2)\ dx_1\, dx_2 =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} min\big(F_1(x_1), F_2(x_2)\big) - F_1(x_1) \cdot F_2(x_2)\ dx_1\, dx_2 =$$

$$= \int_0^1 \int_0^{F_2(x_2)} x_1 - x_1 \cdot F_2(x_2)\ dx_1\, dx_2 + \int_0^1 \int_{F_2(x_2)}^1 F_2(x_2) - x_1 \cdot F_2(x_2)\ dx_1\, dx_2 =$$

$$= \int_0^1 \left(\big(1 - F_2(x_2)\big) \cdot \int_0^{F_2(x_2)} x_1\ dx_1 \right) dx_2 + \int_0^1 \left(F_2(x_2) \cdot \int_{F_2(x_2)}^1 1 - x_1\ dx_1 \right) dx_2 =$$

$$= \int_0^1 \big(1 - F_2(x_2)\big) \cdot \frac{1}{2} \cdot \big(F_2(x_2)\big)^2 dx_2 + \int_0^1 F_2(x_2) \cdot \left(\frac{1}{2} - F_2(x_2) + \frac{1}{2} \cdot \big(F_2(x_2)\big)^2\right) dx_2 =$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{2} \cdot F_2(x_2) - \frac{1}{2} \cdot \big(F_2(x_2)\big)^2 dx_2$$

Wegen

$$F_2(x_2) = \begin{cases} 0 & , \quad x_2 < 0 \\ \dfrac{x_2^2}{b} & , \quad 0 \le x_2 \le b \\ 1 - \dfrac{(1-x_2)^2}{1-b} & , \quad b \le x_2 < 1 \\ 1 & , \quad x_2 \ge 1 \end{cases}$$

ergibt sich:

$Cov(X_1, X_2) =$

$$= \int_0^b \frac{1}{2} \cdot \frac{x_2^2}{b} - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x_2^2}{b}\right)^2 dx_2 + \int_b^1 \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{(1-x_2)^2}{1-b}\right) - \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{(1-x_2)^2}{1-b}\right)^2 dx_2 =$$

$$= \int_0^b \frac{1}{2} \cdot \frac{x_2^2}{b} - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x_2^2}{b}\right)^2 dx_2 + \int_0^{1-b} \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{z^2}{1-b}\right) - \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{z^2}{1-b}\right)^2 dz =$$

$$= \int_0^b \frac{1}{2} \cdot \frac{x_2^2}{b} - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x_2^2}{b}\right)^2 dx_2 + \int_0^{1-b} \frac{1}{2 \cdot (1-b)} \cdot \left(1 - b - z^2 - \frac{(1-b-z^2)^2}{1-b}\right) dz =$$

$$= \frac{1}{2 \cdot b} \cdot \int_0^b x_2^2 - \frac{x_2^4}{b}\, dx_2 + \frac{1}{2 \cdot (1-b)} \cdot \int_0^{1-b} z^2 - \frac{z^4}{1-b}\, dz$$

Dabei ergibt sich die erste Umformung beim zweiten Integral durch die Anwendung der Substitutionsregel mit $z = 1 - x_2$. Dies liefert:

$$Cov(X_1, X_2) = \frac{1}{2 \cdot b} \cdot \left[\frac{1}{3} \cdot x_2^3 - \frac{1}{5b} \cdot x_2^5\right]_0^b + \frac{1}{2 \cdot (1-b)} \cdot \left[\frac{1}{3} \cdot z^3 - \frac{1}{5 \cdot (1-b)} \cdot z^5\right]_0^{1-b} =$$

$$= \frac{b^2}{6} - \frac{b^3}{10} + \frac{(1-b)^2}{6} - \frac{(1-b)^3}{10}$$

Für den zugehörigen Korrelationskoeffizienten ergibt sich damit:

$$\rho_M = \frac{Cov(X_1, X_2)}{\sqrt{Var(X_1)} \cdot \sqrt{Var(X_2)}} = \frac{\frac{b^2}{6} - \frac{b^3}{10} + \frac{(1-b)^2}{6} - \frac{(1-b)^3}{10}}{\sqrt{\frac{1}{12}} \cdot \sqrt{\frac{1 + b^2 + (1-b)^2}{36}}}$$

Analog erhält man für die untere Fréchet-Hoeffding-Schranke

$$W(u_1, u_2) \coloneqq max(u_1 + u_2 - 1, 0):$$

$$Cov(X_1, X_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(x_1, x_2) - F_1(x_1) \cdot F_2(x_2)\ dx_1\, dx_2 =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} max(F_1(x_1) + F_2(x_2) - 1{,}0) - F_1(x_1) \cdot F_2(x_2)\ dx_1\, dx_2 =$$

$$= \int_0^1 \int_0^{1-F_2(x_2)} -x_1 \cdot F_2(x_2)\ dx_1\, dx_2 + \int_0^1 \int_{1-F_2(x_2)}^1 x_1 + F_2(x_2) - 1 - x_1 \cdot F_2(x_2)\ dx_1\, dx_2 =$$

$$= -\int_0^1 F_2(x_2) \cdot \left(\int_0^{1-F_2(x_2)} x_1 \, dx_1 \right) dx_2 - \int_0^1 \big(1 - F_2(x_2)\big) \left(\int_{1-F_2(x_2)}^1 1 - x_1 \ dx_1 \right) dx_2 =$$

$$= -\int_0^1 \frac{1}{2} \cdot F_2(x_2) \cdot \big(1 - F_2(x_2)\big)^2 dx_2$$

$$-\int_0^1 \big(1 - F_2(x_2)\big) \cdot \left(\frac{1}{2} - \big(1 - F_2(x_2)\big) + \frac{1}{2} \cdot \big(1 - F_2(x_2)\big)^2\right) dx_2 =$$

$$= -\int_0^1 \frac{1}{2} \cdot F_2(x_2) \cdot \big(1 - F_2(x_2)\big)^2 dx_2 - \int_0^1 \frac{1}{2} \cdot \big(1 - F_2(x_2)\big) \cdot \big(F_2(x_2)\big)^2 dx_2 =$$

$$= -\int_0^1 \frac{1}{2} \cdot F_2(x_2) - \frac{1}{2} \cdot \big(F_2(x_2)\big)^2 dx_2$$

$$\Rightarrow Cov(X_1, X_2) = -\left(\frac{b^2}{6} - \frac{b^3}{10} + \frac{(1-b)^2}{6} - \frac{(1-b)^3}{10}\right)$$

$$\Rightarrow \rho_W = \frac{Cov(X_1, X_2)}{\sqrt{Var(X_1)} \cdot \sqrt{Var(X_2)}} = -\frac{\frac{b^2}{6} - \frac{b^3}{10} + \frac{(1-b)^2}{6} - \frac{(1-b)^3}{10}}{\sqrt{\frac{1}{12}} \cdot \sqrt{\frac{1 + b^2 + (1-b)^2}{36}}}$$

Somit unterscheiden sich die beiden Korrelationskoeffizienten ρ_M und ρ_W lediglich durch das Vorzeichen, ferner stimmen sie jeweils für b und $1 - b$ überein. Hier eine kleine Tabelle mit ausgewählten Werten:

b	ρ_M	ρ_W
0,01 bzw. 0,99	0,97981	−0,97981
0,1 bzw. 0,9	0,98089	−0,98089
0,25 bzw. 0,75	0,98508	−0,98508
0,4 bzw. 0,6	0,98903	−0,98903
0,5	0,98995	−0,98995

Insbesondere sind alle Korrelationskoeffizienten kleiner 1.

Es seien $A_1, A_2 > 0$. Der Verlust des ersten Risikos sei nun gegeben durch $A_1 \cdot X_1$, d.h. der Verlust ist gleichverteilt auf dem Intervall $[0, A_1]$. Der Verlust des zweiten Risikos sei gegeben durch $A_2 \cdot X_2$, d.h. er genügt einer Dreiecksverteilung, diesmal auf dem Intervall $[0, A_2]$ mit dem best case 0, dem normal case $b \cdot A_2$ und dem worst case A_2. Wegen

$$\frac{Cov(A_1 \cdot X_1, A_2 \cdot X_2)}{\sqrt{Var(A_1 \cdot X_1)} \cdot \sqrt{Var(A_2 \cdot X_2)}} = \frac{A_1 \cdot A_2 \cdot Cov(X_1, X_2)}{A_1 \cdot \sqrt{Var(X_1)} \cdot A_2 \cdot \sqrt{Var(X_2)}} = \frac{Cov(X_1, X_2)}{\sqrt{Var(X_1)} \cdot \sqrt{Var(X_2)}}$$

gelten für den Korrelationskoeffizienten von $A_1 \cdot X_1$ und $A_2 \cdot X_2$ die gleichen oberen und unteren Schranken wie für den Korrelationskoeffizienten von X_1 und X_2.

Beispiel 11:

Im diesem Beispiel betrachten wir zwei Risiken, deren Verluste durch die gleiche stetige Verteilung gegeben sind. X_1 sei der Verlust des ersten Risikos, X_2 sei der Verlust des zweiten Risikos und

$$F = F_1 = F_2$$

die zur stetigen Verteilung gehörende Verteilungsfunktion. Die Dichtefunktion f der stetigen Verteilungsfunktion F sei um 0 symmetrisch, d.h. insbesondere gilt:

$$E(X_1) = E(X_2) = 0$$

Ferner wird $E(X_1^2) = E(X_2^2) < \infty$ vorausgesetzt. Im Folgenden wird gezeigt, dass unter diesen Voraussetzungen für den Korrelationskoeffizienten jeder Wert im Intervall $[-1,1]$ möglich ist. (vgl. [17] S.340ff, [5] S.24)

Da für die Verteilung mit der Verteilungsfunktion F das zweite Moment existieren, gilt

$$\lim_{x \to \infty} \big(1 - F(x)\big) \cdot x = 0$$

und

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) \cdot x = 0$$

Dies ergibt sich jeweils durch Anwendung der Ungleichung von Markov (vgl. [16] S.281] wie folgt:

$$x > 0: 0 \leq P(X_1 > x) \cdot x \leq P(|X_1| \geq x) \cdot x \leq \frac{E(X_1^2)}{x^2} \cdot x = \frac{E(X_1^2)}{x}$$

Bildet man nun den Grenzwert $x \to \infty$, so erhält man die erste der beiden Gleichungen.

$$x < 0: 0 \leq -P(X_1 \leq x) \cdot x \leq -P(|X_1| \geq -x) \cdot x \leq -\frac{E(X_1^2)}{(-x)^2} \cdot x = -\frac{E(X_1^2)}{x}$$

Der Grenzwert $x \to -\infty$ liefert die zweite Gleichung.

Im Folgenden wird zur Herleitung des zu der oberen Fréchet-Hoeffding-Schranke gehörenden Korrelationskoeffizienten der Satz von Fubini (vgl. [16] S.178f) angewendet. Die Überprüfung der Integrierbarkeit für die Anwendbarkeit des Satzes von Fubini befindet sich zur besseren Lesbarkeit der Herleitung im mathematischen Anhang.

Geht man für die Abhängigkeitsstruktur zunächst von der oberen Fréchet-Hoeffding-Schranke aus, so berechnet sich der zugehörige Korrelationskoeffizient wie folgt:

$$Cov(X_1, X_2) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} min(F(x_1), F(x_2)) - F(x_1)\cdot F(x_2)\, dx_1\, dx_2 =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{x_2} F(x_1) - F(x_1)\cdot F(x_2)\, dx_1 + \int_{x_2}^{\infty} F(x_2) - F(x_1)\cdot F(x_2)\, dx_1\right) dx_2$$

Der Integral-Term in der Klammer lässt sich mithilfe partieller Integration wie folgt umformen:

$$\int_{-\infty}^{x_2} F(x_1) - F(x_1)\cdot F(x_2)\, dx_1 + \int_{x_2}^{\infty} F(x_2) - F(x_1)\cdot F(x_2)\, dx_1 =$$

$$= \left(1 - F(x_2)\right)\cdot \int_{-\infty}^{x_2} F(x_1)\, dx_1 + F(x_2)\cdot \int_{x_2}^{\infty} 1 - F(x_1)\, dx_1 =$$

$$= \left(1 - F(x_2)\right)\cdot \left([F(x_1)\cdot x_1]_{-\infty}^{x_2} - \int_{-\infty}^{x_2} x_1\cdot f(x_1)\, dx_1\right) +$$

$$+ F(x_2)\cdot \left(\left[\left(1 - F(x_1)\right)\cdot x_1\right]_{x_2}^{\infty} + \int_{x_2}^{\infty} x_1\cdot f(x_1)\, dx_1\right) =$$

$$= \left(1 - F(x_2)\right)\cdot \left(F(x_2)\cdot x_2 - \int_{-\infty}^{x_2} x_1\cdot f(x_1)\, dx_1\right)$$

$$- F(x_2)\cdot \left(\left(1 - F(x_2)\right)\cdot x_2 - \int_{x_2}^{\infty} x_1\cdot f(x_1)\, dx_1\right) =$$

$$= -\left(1 - F(x_2)\right)\cdot \int_{-\infty}^{x_2} x_1\cdot f(x_1)\, dx_1 + F(x_2)\cdot \int_{x_2}^{\infty} x_1\cdot f(x_1)\, dx_1$$

Damit ergibt sich mit dem Satz von Fubini:

$$Cov(X_1, X_2) = \int_{-\infty}^{\infty}\left(-\left(1 - F(x_2)\right)\cdot \int_{-\infty}^{x_2} x_1\cdot f(x_1)\, dx_1 + F(x_2)\cdot \int_{x_2}^{\infty} x_1\cdot f(x_1)\, dx_1\right) dx_2 =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{x_2} -\left(1 - F(x_2)\right)\cdot x_1\cdot f(x_1)\, dx_1 + \int_{x_2}^{\infty} F(x_2)\cdot x_1\cdot f(x_1)\, dx_1\right) dx_2 =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{x_1}^{\infty} x_1\cdot f(x_1)\cdot (F(x_2) - 1)\, dx_2 + \int_{-\infty}^{x_1} x_1\cdot f(x_1)\cdot F(x_2)\, dx_2\right) dx_1 =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x_1\cdot f(x_1)\cdot \left(\int_{x_1}^{\infty} F(x_2) - 1\, dx_2 + \int_{-\infty}^{x_1} F(x_2)\, dx_2\right) dx_1$$

Für den Integral-Term in der Klammer erhält man wiederum durch partielle Integration:

$$\int_{x_1}^{\infty} F(x_2) - 1\, dx_2 + \int_{-\infty}^{x_1} F(x_2)\, dx_2 =$$

$$= [(F(x_2) - 1) \cdot x_2]_{x_1}^{\infty} - \int_{x_1}^{\infty} x_2 \cdot f(x_2)\, dx_2 + [F(x_2) \cdot x_2]_{-\infty}^{x_1} - \int_{-\infty}^{x_1} x_2 \cdot f(x_2)\, dx_2 =$$

$$= \big(1 - F(x_1)\big) \cdot x_1 + F(x_1) \cdot x_1 - \int_{-\infty}^{\infty} x_2 \cdot f(x_2)\, dx_2 = x_1 - \int_{-\infty}^{\infty} x_2 \cdot f(x_2)\, dx_2 = x_1$$

Das letzte Gleichheitszeichen folgt wegen $E(X_2) = \int_{-\infty}^{\infty} x_2 \cdot f(x_2)\, dx_2 = 0.$ Zusammengefasst bedeutet dies für die Kovarianz der beiden Verluste

$$Cov(X_1, X_2) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1^2 \cdot f(x_1)\, dx_1 = Var(X_1)$$

und für deren Korrelationskoeffizient

$$\rho_M = \frac{Cov(X_1, X_2)}{\sqrt{Var(X_1)} \cdot \sqrt{Var(X_2)}} = \frac{Var(X_1)}{\sqrt{Var(X_1)} \cdot \sqrt{Var(X_1)}} = 1.$$

Jetzt sei die Abhängigkeitsstruktur durch die untere Fréchet-Hoeffding-Schranke gegeben. Wir betrachten zunächst die beiden folgenden Wahrscheinlichkeiten:

1.

$$P(-X_2 \le x_2) = P(X_2 \ge -x_2) \underbrace{=}_{F\ symmetrisch\ um\ 0} P(X_2 \le x_2) = F(x_2)$$

2.

$$P(X_1 \le x_1, -X_2 \le x_2) = P(X_1 \le x_1, X_2 \ge -x_2) = P(X_1 \le x_1) - P(X_1 \le x_1, X_2 < -x_2) =$$

$$\underbrace{=}_{F\ stetig} F(x_1) - \max\big((F(x_1) + F(-x_2) - 1), 0\big) =$$

$$\underbrace{=}_{F\ symmetrisch\ um\ 0} F(x_1) - \max\Big(\big(F(x_1) - F(x_2)\big), 0\Big) = \min\big(F(x_1), F(x_2)\big)$$

Damit haben X_1 und $-X_2$ die gleiche stetige Verteilungsfunktion F und die Abhängigkeitsstruktur ist durch die obere Fréchet-Hoeffding-Schranke gegeben. Daraus erhält man für die Kovarianz

$$Cov(X_1, X_2) = -Cov(X_1, -X_2) = -Var(X_1)$$

bzw. für den Korrelationskoeffizienten

$$\rho_W = \frac{Cov(X_1, X_2)}{\sqrt{Var(X_1)} \cdot \sqrt{Var(X_2)}} = \frac{-Var(X_1)}{\sqrt{Var(X_1)} \cdot \sqrt{Var(X_1)}} = -1.$$

Zusammenfassend kann festgehalten werden, dass für den Korrelationskoeffizienten ρ_{12} der beiden Verluste X_1 und X_2 wegen $\rho_M = 1$ und $\rho_W = -1$ im Intervall $[-1,1]$ jeder Wert möglich.

Diese Eigenschaft überträgt sich, wenn man die beiden Verluste linear transformiert, da:

$$\frac{Cov(A_1 \cdot X_1 + b_1, A_2 \cdot X_2 + b_2)}{\sqrt{Var(A_1 \cdot X_1 + b_1)} \cdot \sqrt{Var(A_2 \cdot X_2 + b_2)}} = \frac{A_1 \cdot A_2 \cdot Cov(X_1, X_2)}{A_1 \cdot A_2 \cdot \sqrt{Var(X_1)} \cdot \sqrt{Var(X_2)}} =$$

$$= \frac{Cov(X_1, X_2)}{\sqrt{Var(X_1)} \cdot \sqrt{Var(X_2)}}$$

Beispiel 12:

Die Verluste X_1 und X_2 zweier Risiken seien beide normalverteilt. Handelt es sich jeweils um eine Standardnormalverteilung, so ist für den Korrelationskoeffizienten wegen Beispiel 11 jeder Wert im Intervall $[-1,1]$ möglich. Handelt es sich um beliebige Normalverteilungen mit den Erwartungswerten μ_1 bzw. μ_2 und den Standardabweichungen $\sigma_1 > 0$ bzw. $\sigma_2 > 0$, so gilt dies wegen

$$\frac{Cov(X_1, X_2)}{\sqrt{Var(X_1)} \cdot \sqrt{Var(X_2)}} = \frac{Cov\left(\mu_1 + \frac{X_1 - \mu_1}{\sigma_1} \cdot \sigma_1, \mu_2 + \frac{X_2 - \mu_2}{\sigma_2} \cdot \sigma_2\right)}{\sqrt{Var\left(\mu_1 + \frac{X_1 - \mu_1}{\sigma_1} \cdot \sigma_1\right)} \cdot \sqrt{Var\left(\mu_2 + \frac{X_2 - \mu_2}{\sigma_2} \cdot \sigma_2\right)}} =$$

$$= \frac{\sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot Cov\left(\frac{X_1 - \mu_1}{\sigma_1}, \frac{X_2 - \mu_2}{\sigma_2}\right)}{\sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \sqrt{Var\left(\frac{X_1 - \mu_1}{\sigma_1}\right)} \cdot \sqrt{Var\left(\frac{X_2 - \mu_2}{\sigma_2}\right)}} = \frac{Cov\left(\frac{X_1 - \mu_1}{\sigma_1}, \frac{X_2 - \mu_2}{\sigma_2}\right)}{\sqrt{Var\left(\frac{X_1 - \mu_1}{\sigma_1}\right)} \cdot \sqrt{Var\left(\frac{X_2 - \mu_2}{\sigma_2}\right)}}$$

ebenfalls, da $\frac{X_1 - \mu_1}{\sigma_1}$ und $\frac{X_2 - \mu_2}{\sigma_2}$ standardnormalverteilt sind.

7. Beliebig verteilte Risiken

Die estnische Mathematikerin Ene-Margit Tiit hat in ihrem 1996 erschienen Artikel „Mixtures of Multivariate Quasi-Extremal Distributions having given Martingals“ ein Verfahren dargestellt, wie man für eine endliche Menge von Zufallsvariablen bei vorgegebenen Randverteilungen und einer vorgegebenen Korrelationsmatrix eine passende gemeinsame Verteilung für die Zufallsvariablen bestimmen kann. Dieses Verfahren wird in diesem Kapital vorgestellt und in den folgenden Abschnitten auf das hier behandelte Modell, d.h. auf die Verluste aus den Einzelrisiken und auf den Gesamtverlust, in Fallbeispielen angewendet. Von entscheidender Bedeutung sind dabei die sogenannten Extremal-Verteilungen.

Eine Extremal-Verteilung als gemeinsame Verteilung von endlich vielen Zufallsvariablen hat die Eigenschaft, dass alle Korrelationskoeffizienten zwischen zwei Zufallsvariablen entweder dem jeweiligen Korrelationskoeffizienten entsprechen, der sich aus der oberen Fréchet-Hoeffding-Schranke ergibt, oder dem jeweiligen Korrelationskoeffizienten entsprechen, der sich aus der unteren Fréchet-Hoeffding-Schranke ergibt. D.h. in unserem Modell von n Risiken gibt es für jeden der $\frac{n\cdot(n-1)}{2}$ Korrelationskoeffizienten genau zwei Möglichkeiten. Hätte man alle Freiheiten, so würden daraus $2^{\frac{n\cdot(n-1)}{2}}$ mögliche Korrelationsmatrizen bzw. passende Extremal-Verteilungen resultieren. Aufgrund des Ausschlusses bestimmter Konstellationen sind es allerdings nur 2^{n-1} mögliche Korrelationsmatrizen bzw. passende Extremal-Verteilungen. Hier zusammengefasst die Definition und wichtige Eigenschaften.

Gegeben seien n Zufallsvariablen mit den Verteilungsfunktionen $F_i, i = 1,2,\dots,n,$ und jeweils endlicher Varianz sowie die Korrelationsmatrix

$$\mathrm{P} = \left(\rho_{ij}\right)_{1\le i,j\le n}.$$

$\rho_{M,ij}$ sei der Korrelationskoeffizient, der sich für die i-te und j-te Zufallsvariable aus der oberen Fréchet-Hoeffding-Schranke ergibt, und $\rho_{W,ij}$ sei der Korrelationskoeffizient, der sich für die i-te und j-te Zufallsvariable aus der unteren Fréchet-Hoeffding-Schranke ergibt. Eine Extremal-Verteilung als gemeinsame Verteilung der n Zufallsvariablen liegt vor, wenn die Randverteilungen dieser gemeinsamen Verteilung mit den entsprechenden Verteilungen der Zufallsvariablen übereinstimmen und es eine Partition der Indexmenge $\{1,2,\dots,n\}$ (d.h. zwei disjunkte Teilmenge I und I^c mit $I \cup I^c = \{1,2,\dots,n\}$) mit der Zusatzeigenschaft $1 \in I$ gibt, so dass:

- $\rho_{ij} \in \left\{\rho_{M,ij}, \rho_{W,ij}\right\}$ für alle $i,j = 1,2,\dots,n$
- $\rho_{ij} = \rho_{M,ij}$, falls $i,j \in I$ oder $i,j \in I^c$
- $\rho_{ij} = \rho_{W,ij}$, falls $i \in I,\ j \in I^c$ oder $j \in I,\ i \in I^c$

Die gemeinsame Verteilungsfunktion einer Extremal-Verteilung ist dann gegeben durch

$$G_I(x_1, x_2, \dots, x_n) = \max\left(0, \left(\min_{i \in I} F_i(x_i) + \min_{j \in I^c} F_j(x_j) - 1\right)\right).$$

Damit berechnet sich die Anzahl der möglichen passenden Extremal-Verteilungen als Anzahl der Teilmengen der Menge $\{2,3,\dots,n\}$ mit 2^{n-1} (vgl. [17] S.341ff). Daraus folgt für $n \geq 3$ mit elementaren Überlegungen:

- Aus $\rho_{ik} = \rho_{M,ik}$ und $\rho_{kj} = \rho_{M,kj}$ folgt $\rho_{ij} = \rho_{M,ij}$
- Aus $\rho_{ik} = \rho_{M,ik}$ und $\rho_{kj} = \rho_{W,kj}$ folgt $\rho_{ij} = \rho_{W,ij}$
- Aus $\rho_{ik} = \rho_{W,ik}$ und $\rho_{kj} = \rho_{W,kj}$ folgt $\rho_{ij} = \rho_{M,ij}$

(vgl. [17] S.342, [5] S.31f)

Diese Eigenschaft passt zu den Ausführungen in Abschnitt 2. Dort wird erläutert, wieso bei drei Zufallsvariablen für die drei Korrelationskoeffizienten nur bestimmte Konstellationen für die Werte -1 und 1 möglich sind.

Die Methode von Tiit besteht nun darin, zu gegebenen Randverteilungen und einer gegebenen Korrelationsmatrix eine passende gemeinsame Verteilung aus den möglichen Extremal-Verteilungen zu konstruieren. Die Grundlage dafür stellt der folgende Satz dar.

Satz:

Gegeben seien n Zufallsvariablen mit jeweils endlicher Varianz. Ferner sei

$$\mathrm{P} = \left(\rho_{ij}\right)_{1 \leq i,j \leq n}$$

eine vorgegebene Korrelationsmatrix. Es sei $\{G_k | k = 1,2,\dots,2^{n-1}\}$ die Menge der möglichen Extremal-Verteilungen (also insbesondere gemeinsame Verteilungen mit passenden Randverteilungen) und $\{R_k | k = 1,2,\dots,2^{n-1}\}$ die Menge der zugehörigen Korrelationsmatrizen. Sei ferner $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{2^{n-1}})$ ein Vektor mit nichtnegativen Einträgen und der Eigenschaften

$$\sum_{k=1}^{2^{n-1}} \lambda_k = 1.$$

Gilt

$$\sum_{k=1}^{2^{n-1}} \lambda_k \cdot R_k = \mathrm{P},$$

so besitzt die Mischung der Extremal-Verteilungen

$$\sum_{k=1}^{2^{n-1}} \lambda_k \cdot G_k$$

als gemeinsame Verteilung der n Zufallsvariablen die passenden Randverteilungen und die zugehörige Korrelationsmatrix ist P.

Für den Beweis wird auf [17] S.346f verwiesen. Als Ergänzung befindet sich im mathematischen Anhang zusätzlich eine Verallgemeinerung des Satzes mit einem auf der Maßtheorie basierenden Beweis.

Damit sind in einem konkreten Beispiel zur Bestimmung einer passenden gemeinsamen Verteilung bei vorgegebenen Randverteilungen und vorgegebener Korrelationsmatrix P, die folgenden Arbeitsschritte umzusetzen:

1. Bestimmung aller Extremal-Verteilungen $\{G_k | k = 1,2, \dots, 2^{n-1}\}$ und der zugehörigen Korrelationsmatrizen $\{R_k | k = 1,2, \dots, 2^{n-1}\}$.
2. Bestimmung mindestens einer Lösung $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{2^{n-1}})$ des linearen Gleichungssystems
$$\sum_{k=1}^{2^{n-1}} \lambda_k \cdot R_k = \mathrm{P}$$
mit nichtnegativen Einträgen und
$$\sum_{k=1}^{2^{n-1}} \lambda_k = 1.$$
3. Eine passende gemeinsame Verteilung ergibt sich dann durch
$$\sum_{k=1}^{2^{n-1}} \lambda_k \cdot G_k.$$

Diese Methode wird in den folgenden Abschnitten in unterschiedlichen Beispielen angewendet.

Da Korrelationsmatrizen immer positiv semidefinit sind, gilt das auch für die zu den Extremal-Verteilungen gehörenden Korrelationsmatrizen $R_k,\ k = 1,2, \dots, 2^{n-1}$. Daraus folgt aus den Rechenregeln der Matrizenrechnung, dass die Matrix

$$\sum_{k=1}^{2^{n-1}} \lambda_k \cdot R_k$$

ebenfalls positiv semidefinit ist, sofern alle Einträge des Vektors $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{2^{n-1}})$ nichtnegativ sind:

$$x^T \left(\sum_{k=1}^{2^{n-1}} \lambda_k \cdot R_k \right) x = \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \lambda_k \cdot (x^T R_k x) \geq 0$$

Wenn es also in Ziffer 2 eine Lösung gibt, so ist die sich daraus ergebende Matrix positiv semidefinit. Umgekehrt gibt es nicht zu jeder positiv semidefiniten Korrelationsmatrix eine Lösung gemäß Ziffer 2. Dies wird im folgenden Abschnitt zusammen mit der Möglichkeit der Mehrdeutigkeit anhand von Beispielen thematisiert.

8. Lösbarkeit und Mehrdeutigkeit

In diesem Abschnitt stehen die Frage der Lösbarkeit und der Mehrdeutigkeit des linearen Gleichungssystems aus der Methode von Ene-Margit Tiit (Ziffer 2) im Mittelpunkt des Interesses.

Beispiel 13:

Gegeben seien drei Risiken mit den zugehörigen Verlusten X_1, X_2 und X_3. Die Varianzen der drei Verluste seinen endlich und die Korrelationsmatrix sei gegeben durch

$$\mathrm{P} = \left(\rho_{ij}\right)_{1\le i,j\le 3} = \begin{pmatrix} 1 & \rho_{12} & \rho_{13} \\ \rho_{12} & 1 & \rho_{23} \\ \rho_{13} & \rho_{23} & 1 \end{pmatrix}.$$

Für die oberen und unteren Schranken der möglichen Korrelationskoeffizienten gelte

$$\rho_{M,12} = \rho_{M,13} = \rho_{M,23} = 1$$

und

$$\rho_{W,12} = \rho_{W,13} = \rho_{W,23} = -1.$$

Dies ist z.B. der Fall, wenn man für die gemeinsame Verteilung der drei Zufallsvariablen X_1, X_2 und X_3 eine 3 –dimensionale Normalverteilung annimmt.

Es gibt $2^{3-1} = 4$ Extremal-Verteilungen mit den folgenden zugehörigen Korrelationsmatrizen:

$$R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$R_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, R_4 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Diese basieren auf den folgenden Teilmengen der Indexmenge $\{1,2,3\}$ mit der $\{1\}$ als Element: $\{1,2,3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{1\}$.

Gesucht sind nun die Gewichtungsfaktoren $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$ mit nichtnegativen Einträgen,

$$\sum_{k=1}^{4} \lambda_k = 1$$

und

$$\sum_{k=1}^{4} \lambda_k \cdot R_k = \mathrm{P}.$$

D.h. zu lösen ist das lineare Gleichungssystem:

$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 1$

$\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4 = \rho_{12}$

$\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 - \lambda_4 = \rho_{13}$

$\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 + \lambda_4 = \rho_{23}$

Die Determinante der Koeffizientenmatrix hat den Wert -16, d.h. insbesondere ungleich 0. Mithilfe des Gauß-Algorithmus ergibt sich als eindeutige Lösung des linearen Gleichungssystems:

$\lambda_1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot (\rho_{12} + \rho_{13} + \rho_{23}), \lambda_2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot (\rho_{12} - \rho_{13} - \rho_{23})$

$\lambda_3 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot (-\rho_{12} + \rho_{13} - \rho_{23}), \lambda_4 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot (-\rho_{12} - \rho_{13} + \rho_{23})$

Die vier Matrizen $R_k, k = 1{,}2{,}3{,}4,$ haben das charakteristische Polynom

$$det(y \cdot E - R_k) = y^3 - 3 \cdot y^2 = y^2 \cdot (y - 3)$$

und somit die Eigenwerte $y = 0$ und $y = 3$. D.h. alle vier Matrizen sind positiv semidefinit. Damit kann, wie im letzten Abschnitt erläutert, nur unter Verwendung der Matrizenrechnung geschlossen werden, dass auch

$$\sum_{k=1}^{4} \lambda_k \cdot R_k$$

positiv semidefinit ist, sofern es sich bei $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$ um eine nichtnegative Lösung handelt. Die folgenden Zahlenbeispiele zeigen u.a., dass die Umkehrung i.A. nicht gilt:

Lösung nichtnegativ und $\mathrm{P} = \sum_{k=1}^{4} \lambda_k \cdot R_k$ *positiv definit und somit auch positiv semidefinit:*

$\rho_{12} = 0{,}3, \rho_{13} = 0{,}4, \rho_{23} = 0{,}5 \Longrightarrow \lambda_1 = 0{,}55, \lambda_2 = 0{,}10, \lambda_3 = 0{,}15, \lambda_4 = 0{,}20$

(Eigenwerte von P auf vier Stellen gerundet: $0{,}4820; 0{,}7124; 1{,}8056$)

Lösung mit mindestens einem negativen Eintrag und $\mathrm{P} = \sum_{k=1}^{4} \lambda_k \cdot R_k$ *positiv definit und somit auch positiv semidefinit:*

$\rho_{12} = 0{,}3, \rho_{13} = 0{,}4, \rho_{23} = -0{,}5 \Longrightarrow \lambda_1 = 0{,}30, \lambda_2 = 0{,}35, \lambda_3 = 0{,}40, \lambda_4 = -0{,}05$

(Eigenwerte von P auf vier Stellen gerundet: $0{,}1944; 1{,}2876; 1{,}5180$)

Lösung mit mindestens einem negativen Eintrag und $\mathrm{P} = \sum_{k=1}^{4} \lambda_k \cdot R_k$ *nicht positiv semidefinit:*

$\rho_{12} = 0{,}3, \rho_{13} = 0{,}4, \rho_{23} = -0{,}9 \Longrightarrow \lambda_1 = 0{,}20, \lambda_2 = 0{,}45, \lambda_3 = 0{,}50, \lambda_4 = -0{,}15$

(Eigenwerte von P auf vier Stellen gerundet: $-0{,}1194; 1{,}2129; 1{,}9065$)

Das zweite Zahlenbeispiel zeigt, dass das Verfahren von Tiit nicht bei jeder vorgegebenen positiv semidefiniten Korrelationsmatrix zu einer gemeinsamen Verteilung führt.

Beispiel 14:

Gegeben seien vier Risiken mit den zugehörigen Verlusten X_1, X_2, X_3 und X_4. Die Varianzen der vier Verluste seinen endlich und die Korrelationsmatrix sei gegeben durch

$$\mathrm{P} = \left(\rho_{ij}\right)_{1\leq 3, j\leq 3} = \begin{pmatrix} 1 & \rho_{12} & \rho_{13} & \rho_{14} \\ \rho_{12} & 1 & \rho_{23} & \rho_{24} \\ \rho_{13} & \rho_{23} & 1 & \rho_{34} \\ \rho_{14} & \rho_{24} & \rho_{34} & 1 \end{pmatrix}.$$

Für die oberen und unteren Schranken der möglichen Korrelationskoeffizienten gelte

$$\rho_{M,12} = \rho_{M,13} = \rho_{M,14} = \rho_{M,23} = \rho_{M,24} = \rho_{M,34} = 1$$

und

$$\rho_{W,12} = \rho_{W,13} = \rho_{W,14} = \rho_{W,23} = \rho_{W,24} = \rho_{W,34} = -1.$$

Dies ist z.B. der Fall, wenn man für die gemeinsame Verteilung der vier Zufallsvariablen X_1, X_2, X_3 und X_4 eine 4−dimensionale Normalverteilung annimmt.

Es gibt $2^{4-1} = 8$ Extremal-Verteilungen mit den folgenden zugehörigen Korrelationsmatrizen:

$$R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, R_4 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R_5 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, R_6 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R_7 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, R_8 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Diese basieren auf den folgenden Teilmengen der Indexmenge $\{1,2,3,4\}$ mit der $\{1\}$ als Element: $\{1,2,3,4\}, \{1,2,3\}, \{1,2,4\}, \{1,3,4\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{1\}$.

Gesucht sind nun die Gewichtungsfaktoren $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6, \lambda_7, \lambda_8)$ mit nichtnegativen Einträgen,

$$\sum_{k=1}^{8} \lambda_k = 1$$

und

$$\sum_{k=1}^{8} \lambda_k \cdot R_k = \mathrm{P}.$$

D.h. zu lösen ist das lineare Gleichungssystem:

$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5 + \lambda_6 + \lambda_7 + \lambda_8 = 1$

$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 - \lambda_4 + \lambda_5 - \lambda_6 - \lambda_7 - \lambda_8 = \rho_{12}$

$\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 + \lambda_4 - \lambda_5 + \lambda_6 - \lambda_7 - \lambda_8 = \rho_{13}$

$\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 - \lambda_5 - \lambda_6 + \lambda_7 - \lambda_8 = \rho_{14}$

$\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4 - \lambda_5 - \lambda_6 + \lambda_7 + \lambda_8 = \rho_{23}$

$\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 - \lambda_4 - \lambda_5 + \lambda_6 - \lambda_7 + \lambda_8 = \rho_{24}$

$\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5 - \lambda_6 - \lambda_7 + \lambda_8 = \rho_{34}$

Dabei handelt es sich um ein unterbestimmtes Gleichungssystem mit acht Gleichungen und sieben Variablen. Mithilfe des Gauß-Algorithmus ergibt sich die folgenden Lösungen des linearen Gleichungssystems:

$$\left\{ \begin{pmatrix} -t + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}(\rho_{23} + \rho_{24} + \rho_{34}) \\ t + \frac{1}{4}(\rho_{12} + \rho_{13} - \rho_{24} - \rho_{34}) \\ t + \frac{1}{4}(\rho_{12} + \rho_{14} - \rho_{23} - \rho_{34}) \\ t + \frac{1}{4}(\rho_{13} + \rho_{14} - \rho_{23} - \rho_{24}) \\ -t + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}(-\rho_{13} - \rho_{14} + \rho_{34}) \\ -t + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}(-\rho_{12} - \rho_{14} + \rho_{24}) \\ -t + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}(-\rho_{12} - \rho_{13} + \rho_{23}) \\ t \end{pmatrix} \middle| \, t \in IR \right\}$$

Die acht Matrizen $R_k, k = 1,2,\ldots,8,$ haben das charakteristische Polynom

$$det(y \cdot E - R_k) = y^4 - 4 \cdot y^3 = y^3 \cdot (y - 4)$$

und somit die Eigenwerte $y = 0$ und $y = 4$. D.h. alle acht Matrizen sind positiv semidefinit. Damit kann analog zum letzten Beispiel nur unter Verwendung der Matrizenrechnung geschlossen werden, dass auch

$$\sum_{k=1}^{4} \lambda_k \cdot R_k$$

positiv semidefinit ist, sofern es sich bei $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_8)$ um eine nichtnegative Lösung handelt.

Zur Erläuterung der Lösbarkeit und der Mehrdeutigkeit werden im Folgenden mehrere Beispiele betrachtet.

Zunächst sei $\rho_{12} = \rho_{13} = \rho_{14} = \rho_{23} = \rho_{24} = \rho_{34} = 0$, d.h. alle Risiken sind paarweise unkorreliert. Dann ergibt sich als Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems

$$\left\{ \left. \begin{pmatrix} -t + \frac{1}{4} \\ t \\ t \\ t \\ -t + \frac{1}{4} \\ -t + \frac{1}{4} \\ -t + \frac{1}{4} \\ t \end{pmatrix} \right| t \in IR \right\}.$$

Damit alle Variablen der Lösung nichtnegativ sind muss gelten $0 \leq t \leq 0{,}25$. D.h. es gibt im Fall der paarweisen Unkorreliertheit unendlich viele Möglichkeiten für eine gemeinsame Verteilung der vier Risiken bzw. Verluste.

Gelte nun

$$\rho_{12} = 0{,}1, \rho_{13} = 0{,}2, \rho_{14} = 0{,}3, \rho_{23} = 0{,}4, \rho_{24} = 0{,}5, \rho_{34} = 0{,}6$$

Die zugehörige Korrelationsmatrix ist in diesem Fall positiv definit und man erhält für das lineare Gleichungssystem die Lösungsmenge

$$\left\{ \left. \begin{pmatrix} -t + 0{,}625 \\ t - 0{,}2 \\ t - 0{,}15 \\ t - 0{,}1 \\ -t + 0{,}275 \\ -t + 0{,}275 \\ -t + 0{,}275 \\ t \end{pmatrix} \right| t \in IR \right\}.$$

Somit handelt es sich um eine nichtnegative Lösung, falls $0{,}2 \leq t \leq 0{,}275$.

Variiert man das letzte Beispiel minimal, d.h. geht man von $\rho_{12} = -0{,}3$ aus und behält für alle anderen Korrelationskoeffizienten die Werte bei, so ergibt als Lösung des linearen Gleichungssystems

$$\left\{ \begin{pmatrix} -t + 0{,}625 \\ t - 0{,}3 \\ t - 0{,}25 \\ t - 0{,}1 \\ -t + 0{,}275 \\ -t + 0{,}375 \\ -t + 0{,}375 \\ t \end{pmatrix} \middle| \, t \in IR \right\}.$$

Für die Nichtnegativität von $\lambda_2 = t - 0{,}3$ benötigt man $t \geq 0{,}3$, für die Nichtnegativität von $\lambda_5 = -t + 0{,}275$ benötigt man $t \leq 0{,}275$. Da sich die beiden Bedingungen widersprechen, gibt es keine geeignete Lösung des linearen Gleichungssystems.

Zusammengefasst kann man sagen, dass es wie bei anderen Anwendungen linearer Gleichungssysteme auch bei der Methode von Ene-Margit Tiit bezüglich der Lösbarkeit drei Fälle gibt: eine eindeutige geeignete Lösung, keine geeignete Lösung und unendlich viele geeignete Lösungen.

9. Ökonomisches Fallbeispiel

Mit der Neufassung des IDW (= Institut der Wirtschaftsprüfer) Prüfungsstandards „Die Prüfung des Risikofrüherkennungssystems nach § 317 Abs. 4 HGB (IDW PS 340 n.F.)“ steht u.a. die Risikoaggregation zur Beurteilung der Risikotragfähigkeit eines Unternehmens verstärkt im Fokus der Wirtschaftsprüfer. Obwohl sich diese Prüfung auf §91 Abs. 2 des Aktiengesetzes bezieht und damit formal nur börsennotierte Aktiengesellschaften betrifft, ist von einer Ausstrahlungswirkung der Neufassung des IDW PS 340 auch auf andere Aktiengesellschaften bzw. Unternehmen mit einer anderen Rechtsform auszugehen. Der IDW PS 340 n.F. war erstmalig für Wirtschaftsjahre, die nach dem 31.12.2020 begonnen haben, anzuwenden. Im Rahmen einer Risikoaggregation ist die Gesamtrisikoposition eines Unternehmens zu ermitteln, diese ist dann mit der maximalen Risikotragfähigkeit zu vergleichen. Dabei sind auch Wechselwirkungen zwischen den Einzelrisiken zu berücksichtigen. (vgl. [3])

Im Folgenden wird anhand eines ökonomischen Fallbeispiels eine Vorgehensweise dargestellt, bei der die Wechselwirkungen zwischen den Einzelrisiken durch eine Korrelationsmatrix modelliert werden. D.h. wir betrachten ein inhomogenes Risikoportfolio, modellieren die Verluste der Einzelrisiken, definieren die Korrelationsmatrix bezogen auf die Verluste der Einzelrisiken, überprüfen, ob diese Korrelationsmatrix geeignet ist, und bestimmen mithilfe der Methode von Ene-Margit Tiit eine mögliche gemeinsame Verteilung aller Einzelrisiken bzw. deren Verluste. Anschließend wird auf dieser Modellbasis eine Monte-Carlo-Simulation durchgeführt und die Ergebnisse werden interpretiert. Die Monte-Carlo-Simulation ist vor allem dann sinnvoll, wenn das Risikoportfolio keiner gemeinsamen mehrdimensionalen Normalverteilung genügt. In der Praxis werden Unternehmen mit den unterschiedlichsten – oft auch branchen- oder unternehmensspezifischen – Risiken konfrontiert. Dabei werden zur Modellierung der Verluste die unterschiedlichsten wahrscheinlichkeitstheoretischen Modelle verwendet. D.h. i.d.R. ist nicht von einer mehrdimensionalen Normalverteilung auszugehen. Ist dies dennoch der Fall, so kann anstelle der Monte-Carlo-Methode die Varianz-Kovarianz-Methode zur Risikoaggregation verwendet werden.

Wir betrachten nun das folgende Beispiel. Ein Unternehmen hat im Rahmen der Risikoidentifikation („Risikoinventur“) für das kommende Wirtschaftsjahr das folgenden Risikoportfolio zusammengestellt:

- ***Personalüberhang:***

Zur Abwicklung von Großaufträgen musste das Unternehmen sein Personal an Fachkräften vom Typ A und Typ B aufstocken. Die Arbeiten an den Großaufträgen werden fast das ganze kommende Wirtschaftsjahr dauern. Sollte das Unternehmen keine gleichwertigen Anschlussaufträge erhalten, wäre es gezwungen, den Personalüberhang wieder abzubauen. In diesem Fall müsste das Unternehmen die neu eingestellten Fachkräfte Typ A und Typ B wieder entlassen. Das Unternehmen müsste dann Abfindungen von 100.000 € (Fachkräfte Typ A) bzw. 40.000 € (Fachkräfte Typ B) zahlen. Das Unternehmen schätzt die Wahrscheinlichkeit, keine gleichwertigen Anschlussaufträge zu erhalten, bei beiden Fachkräftetypen auf 30%.

- ***Forderungsausfall:***

Das Unternehmen hat im kommenden Wirtschaftsjahr sechs Forderungen gegenüber Großkunden. Die Forderung gegenüber Kunde A beträgt 300.000 €. Da Kunde A von der Insolvenz bedroht ist, schätzt das Unternehmen die Ausfallwahrscheinlichkeit mit 60% ein. Die Forderung gegenüber Kunde B beträgt 200.000 €. Kunde B ist ebenfalls von der Insolvenz bedroht, die Ausfallwahrscheinlichkeit beträgt 40%. Die Forderungen gegenüber den restlichen vier Kunden C, D, E und F betragen jeweils 50.000 € und die Ausfallwahrscheinlichkeit wird jeweils mit 2% angesetzt.

- ***Haftung:***

Durch Fehler bei der Produktion bzw. beim Einbau von Produkten sieht sich das Unternehmen Haftungsrisiken ausgesetzt. Es wird geschätzt, dass der Verlust aus diesen Haftungsrisiken im kommenden Wirtschaftsjahr im best case 0 €, im normal case 100.000 € und im worst case 300.000 € beträgt.

- ***Unternehmensbeteiligungen:***

Das Unternehmen hat drei risikoreiche Unternehmensbeteiligungen an den Firmen I, II und III. Die Beteiligungen wurden aufgrund ihrer langfristigen Perspektive erworben, kurzfristig ist aber mit Verlusten zu rechnen. Für das kommende Wirtschaftsjahr wird für die Beteiligungen aufgrund von Analysen von folgenden erwarteten Verlusten und Standardabweichungen ausgegangen:

Beteiligung an	Erwarteter Verlust in €	Standardabweichung des Verlustes in €
Firma I	50.000	25.000
Firma II	30.000	25.000
Firma III	25.000	10.000

Im ersten Schritt werden für die Verluste der Einzelrisiken die folgenden Modellierungen gewählt:

Risiko	Gewählte Modellierung	Wahrscheinlichkeits-theoretisches Modell für den Verlust X_i
Personalüberhang Typ A	Der Verlust beträgt mit einer Wahrscheinlichkeit von 30% 100.000 € und mit einer Wahrscheinlichkeit von 70% 0 €	$X_1 = \begin{cases} 0, & 0{,}7 \\ 100.000, & 0{,}3 \end{cases}$
Personalüberhang Typ B	Der Verlust beträgt mit einer Wahrscheinlichkeit von 30% 40.000 € und mit einer Wahrscheinlichkeit von 70% 0 €	$X_2 = \begin{cases} 0, & 0{,}7 \\ 40.000, & 0{,}3 \end{cases}$
Forderungsausfall Kunde A	Die Forderung fällt mit einer Wahrscheinlichkeit von 60% aus. Allerdings wird nicht in jedem Fall von einem Verlust in Höhe von 300.000 € ausgegangen, sondern aus den Erfahrungen bei vergleichbaren Fällen werden unterschiedliche Verlusthöhen abgeleitet.	$X_3 = \begin{cases} 300.000, & 0{,}03 \\ 200.000, & 0{,}12 \\ 100.000, & 0{,}20 \\ 50.000, & 0{,}25 \\ 0, & 0{,}40 \end{cases}$
Forderungsausfall Kunde B	Die Forderung fällt mit einer Wahrscheinlichkeit von 40% aus. Allerdings wird nicht in jedem Fall von einem Verlust in Höhe von 200.000 € ausgegangen, sondern aus den Erfahrungen bei vergleichbaren Fällen werden unterschiedliche Verlusthöhen abgeleitet.	$X_4 = \begin{cases} 200.000, & 0{,}01 \\ 100.000, & 0{,}03 \\ 50.000, & 0{,}17 \\ 20.000, & 0{,}19 \\ 0, & 0{,}60 \end{cases}$
Forderungsausfall Kunde C, D, E, F	Die Verluste aus den vier gleichartigen Risiken werden mithilfe der Binomialverteilung zu einem Risiko bzw. zu einem Verlust zusammengefasst. Dies setzt insbesondere voraus, dass die Verluste aus den vier Risiken stochastische unabhängig sind.	Y sei binomialverteilt mit $n = 4$ und $p = 0{,}02$. $X_5 = 50.000 \cdot Y$
Haftung	Der Verlust der Haftung wird mit einer Dreiecksverteilung mit dem best case 0 €, dem normal case	X_6 sei dreiecksverteilt mit dem best case $a = 0$, dem normal

	100.000 € und dem worst 300.000 € modelliert.	case $b = 100.000$ und dem worst case $c = 300.000$.
Unternehmensbe-teiligungen	Die Verluste aus den drei Beteiligungen werden mit einer gemeinsamen 3 −dimensionalen Normalverteilung modelliert. Dabei sei die Korrelationsmatrix gegeben durch: $\begin{pmatrix} 1 & 0,6 & -0,4 \\ 0,6 & 1 & -0,3 \\ -0,4 & -0,3 & 1 \end{pmatrix}$	Die Verluste aus den drei Beteiligungen werden mithilfe der Varianz-Kovarianz-Methode zu einem Verlust zusammengefasst: X_7 ist normalverteilt mit Erwartungswert $\mu = 105.000$ und Standardabweichung $\sigma = 41.833$. (Herleitung siehe unten)

Varianz-Kovarianz-Methode zur Zusammenfassung der Verluste aus den drei Unternehmensbeteiligungen I, II und III.:

1. Die Korrelationsmatrix ist positiv definit und daher geeignet, da:

$$|1| = 1 > 0, \begin{vmatrix} 1 & 0,6 \\ 0,6 & 1 \end{vmatrix} = 0,64 > 0, \begin{vmatrix} 1 & 0,6 & -0,4 \\ 0,6 & 1 & -0,3 \\ -0,4 & -0,3 & 1 \end{vmatrix} = 0,534 > 0$$

2. Erwartungswert:

$$\mu = 50.000 + 30.000 + 25.000 = 105.000$$

3. Varianz und Standardabweichung:

$$\sigma^2 = 25.000^2 + 25.000^2 + 10.000^2 + 2 \cdot 25.000 \cdot 25.000 \cdot 0,6$$

$$-2 \cdot 25.000 \cdot 10.000 \cdot 0,4 - 2 \cdot 25.000 \cdot 10.000 \cdot 0,3 = 1.750.000.000$$

$$\sigma = \sqrt{1.750.000.000} \approx 41.833$$

Als weitere Modellannahme wird die folgende $7x7$ −Matrix P als Korrelationsmatrix gewählt. Dabei steht die i −te Zeile und i −te Spalte für den Verlust bzw. die Zufallsvariable $X_i, i = 1,2,\ldots,7$:

$$\mathrm{P} = \begin{pmatrix} 1,00 & 0,80 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,30 & 0,00 \\ 0,80 & 1,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,30 & 0,00 \\ 0,00 & 0,00 & 1,00 & 0,60 & 0,25 & 0,00 & 0,00 \\ 0,00 & 0,00 & 0,60 & 1,00 & 0,30 & 0,00 & 0,00 \\ 0,00 & 0,00 & 0,25 & 0,30 & 1,00 & 0,00 & 0,00 \\ 0,30 & 0,30 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 1,00 & 0,00 \\ 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 1,00 \end{pmatrix}$$

Anmerkung: Da es sich hier um ein fiktives Beispiel handelt, orientieren sich die Einträge nur bedingt an den ökonomischen Sachverhalten.

Die Matrix ist positiv definit, dies kann durch die Berechnung der Hauptunterdeterminanten überprüft werden. Zusätzlich muss überprüft werden, dass die gewählten Korrelationskoeffizienten jeweils in den durch die Fréchet-Hoeffding-Schranken gegebenen Intervallen liegen. Dazu werden diese Schranken EDV-technisch ermittelt. Dabei ist zu beachten, dass dies bei den verwendeten stetigen Verteilungen mit numerischen Methoden nur näherungsweise erfolgen kann.

Die oberen und unteren Grenzen für die Korrelationskoeffizienten sind in den beiden folgenden Matrizen zusammengefasst.

Obere Grenzen:

$$\mathrm{P}_M = \begin{pmatrix} 1,0000 & 1,0000 & 0,8099 & 0,7347 & 0,4364 & 0,7972 & 0,7391 \\ 1,0000 & 1,0000 & 0,8099 & 0,7347 & 0,4364 & 0,7972 & 0,7391 \\ 0,8099 & 0,8099 & 1,0000 & 0,8706 & 0,6544 & 0,9132 & 0,8562 \\ 0,7347 & 0,7347 & 0,8706 & 1,0000 & 0,7102 & 0,7952 & 0,7576 \\ 0,4364 & 0,4364 & 0,6544 & 0,7102 & 1,0000 & 0,5518 & 0,5523 \\ 0,7972 & 0,7972 & 0,9132 & 0,7952 & 0,5518 & 1,0000 & 0,9654 \\ 0,7391 & 0,7391 & 0,8562 & 0,7576 & 0,5523 & 0,9654 & 1,0000 \end{pmatrix}$$

Unter Grenzen:

$$\mathrm{P}_M = \begin{pmatrix} 1,0000 & -0,4286 & -0,5614 & -0,3772 & -0,1870 & -0,7317 & -0,7392 \\ -0,4286 & 1,0000 & -0,5614 & -0,3772 & -0,1870 & -0,7317 & -0,7392 \\ -0,5614 & -0,5614 & 1,0000 & -0,4940 & -0,2450 & -0,8480 & -0,8564 \\ -0,3772 & -0,3772 & -0,4940 & 1,0000 & -0,1646 & -0,6992 & -0,7581 \\ -0,1870 & -0,1870 & -0,2450 & -0,1646 & 1,0000 & -0,4561 & -0,5528 \\ -0,7317 & -0,7317 & -0,8480 & -0,6992 & -0,4561 & 1,0000 & -0,9654 \\ -0,7392 & -0,7392 & -0,8564 & -0,7581 & -0,5528 & -0,9654 & 1,0000 \end{pmatrix}$$

Somit liegen die gewählten Korrelationskoeffizienten alle in den durch die Fréchet-Hoeffding-Schranken gegebenen Intervallen. Insgesamt ist die Korrelationsmatrix somit zur Modellierung der Abhängigkeitsstruktur geeignet.

Da das Risikoportfolio aus es sieben Einzelrisiken bzw. Verluste besteht und es somit $2^{7-1} = 64$ Extremal-Verteilungen gibt, enthält das Gleichungssystem

$$\sum_{k=1}^{64} \lambda_k \cdot R_k = \mathrm{P}$$

64 Variablen. Die Anzahl der Gleichungen ergibt sich aus der Anzahl der relevanten Positionen in der Korrelationsmatrix, diese beträgt wegen der Symmetrie der Matrix $\frac{7 \cdot 6}{2} = 21$ (für die Nicht-Diagonalelemente) zuzüglich einer Gleichung für die Diagonalelemente, also in Summe 22 Gleichungen.

Dieses lineare Gleichungssystem mit 64 Variablen und 22 Gleichungen kann EDV-technisch mit dem Excel-Solver gelöst werden. Dabei sind im vorliegenden Beispiel lediglich 19 Variablen des Lösungsvektors $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{64})$ mit einem Wert größer 0 belegt. Diese basieren auf den Extremal-Verteilungen zu den folgenden Teilmengen I der Indexmenge $\{1,2, \dots, 7\}$:

$$\{1,2\}, \{1,5\}, \{1,7\}, \{1,2,6\}, \{1,2,3,4\}, \{1,2,3,5\}, \{1,2,4,5\}, \{1,2,3,7\}, \{1,2,5,7\},$$
$$\{1,2,6,7\}, \{1,3,4,6\}, \{1,2,3,5,6\}, \{1,2,4,5,6\}, \{1,2,4,6,7\}, \{1,2,5,6,7\}, \{1,3,4,5,6\}, \{1,2,3,4,6,7\},$$
$$\{1,2,3,5,6,7\}, \{1,2,4,5,6,7\}$$

Da ist sich um ein unterbestimmtes lineares Gleichungssystem handelt, gibt es weitere Lösungen und es hängt vom Algorithmus ab, welche Lösung bestimmt wird. Ferner kann es, wie im letzten Abschnitt gezeigt wurde, sein, dass es keine Lösung gibt. Dies ist z.B. der Fall, wenn man in der Korrelationsmatrix P für den Korrelationskoeffizienten ρ_{34} den Wert $= -0{,}4 \in [-0{,}4940, 08706]$ ansetzt und alle anderen Werte unverändert lässt. Dann ist die Korrelationsmatrix P zwar weiterhin positiv definit, aber das obige lineare Gleichungssystem hat keine nichtnegative Lösung.

Unter Verwendung der Formel für die Verteilungsfunktion einer Extremal-Verteilung

$$\max\left(0, \left(\min_{i\in I} F_i(x_i) + \min_{j\in I^c} F_j(x_j) - 1\right)\right)$$

können zunächst für alle (relevanten) Extremal-Verteilungen die Verteilungsfunktionen $G_k, k = 1,2, \dots, 64$ an ausgewählten Punkten des IR^7 bestimmt werden. Dabei werden im vorliegenden Fallbeispiel die beiden stetigen Modelle (Dreiecksverteilung und Normalverteilung) wiederum mit diskreten Modellen (jeweils 11 Werte bzw. Klassen) angenähert. Insgesamt werden 60.500 Punkte im IR^7 betrachtet. Diese Zahl ergibt sich aufgrund der Anzahl der möglichen Werte in den verwendeten sieben Modellen durch das Produkt $2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 11$.

Anschließend erhält man mit dem Lösungsvektor $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{64})$ und der Gleichung

$$G = \sum_{k=1}^{64} \lambda_k \cdot G_k$$

die passende gemeinsame Verteilungsfunktion an den ausgewählten Stützstellen.

Für die Monte-Carlo-Simulation wird die Gesamtwahrscheinlichkeit dieser passenden gemeinsamen Verteilung G auf die einzelnen 60.500 Punkte aufgeteilt. Da G eine Verteilung ist, ist sie insbesondere rechtecksmonoton. Mithilfe dieser Eigenschaft kann jedem der 60.500 Punkte eine Einzelwahrscheinlichkeit zugeordnet werden. Je nach gewählter Rundung variiert hierbei die Anzahl der Punkte mit positiver Wahrscheinlichkeit.

In den beiden folgenden Übersichten sind die Ergebnisse der Monte-Carlo-Simulation zusammengestellt, einmal mit 50.000 Simulationsläufen und einmal mit $1.000.000$ Simulationsläufen (ausgeführt mit einem Delphi-Programm). Die ersten beiden Übersichten enthalten jeweils eine Gegenüberstellung der beobachteten und der theoretischen Kennzahlen: Erwartungswert, Standardabweichung, VaR (=Value at Risk) und ES (=Expected Shortfall). Die dritte und vierte Übersicht enthält jeweils eine Gegenüberstellung von der beobachteten und der theoretischen Korrelationsmatrix.

Man erkennt anhand der Kennzahlen, dass die Modelle der sieben Einzelrisiken mit den Simulationen gut abgebildet werden. Lediglich bei den beiden stetigen Modellen gibt es bei den Kennzahlen aufgrund der verwendeten Näherungen teilweise Abweichungen im einstelligen Prozentbereich. Die Abweichungen bezüglich der Summe aller Risiken ist beim Erwartungswert gering (Gesetz der großen Zahlen). Die Abweichungen bei den anderen drei Kennzahlen beruhen auf Diversifikationseffekten. Die Abhängigkeitsstruktur gegeben als Korrelationsmatrix wird durch die Simulationen ebenfalls sehr gut abgebildet, wobei durch den Übergang von 50.000 zu 1.000.000 Simulationsläufen die Näherung signifikant verbessert wird.

Die Simulationsergebnisse können nun im Sinne IDW PS 340 n.F. dazu verwendet werden, die Risikotragfähigkeit eines Unternehmens auf Basis der berechneten Risikomaße VaR und ES zu beurteilen. Mögliche Steuerungsmaßnahmen, z.B. der Abschluss einer Forderungsausfallsversicherung, können in die Modelle eingepflegt werden und deren Wirkung auch in Relation zu den mit einer Maßnahme verbundenen Kosten analysiert werden.

Dabei ist allerdings zu beachten, dass es bei der vorgegebenen Korrelationsmatrix neben der hier verwendeten gemeinsamen Verteilung noch weitere gemeinsame Verteilungen geben kann, die dann aber bei den Risikomaßen zu unterschiedlichen Ergebnissen führen werden.

Anzahl der Simulationen	**50.000**			

Beobachtete	**KENNZAHLEN**			
Risiko-Nr.	Erwartungswert	Standardabweichung	VaR	ES
1	30.124,00	45.880,13	100.000,00	100.000,00
2	12.070,40	18.361,05	40.000,00	40.000,00
3	65.339,00	76.334,67	200.000,00	260.760,00
4	17.268,80	29.992,71	50.000,00	109.860,00
5	3.956,00	13.951,84	50.000,00	52.420,00
6	132.698,40	62.895,07	255.000,00	263.736,00
7	104.861,20	42.621,05	178.207,75	190.108,40
Gesamt	366.317,80	149.125,71	643.207,75	780.247,34

Theoretische	**KENNZAHLEN**			
Risiko-Nr.	Erwartungswert	Standardabweichung	VaR	ES
1	30.000,00	45.825,76	100.000,00	100.000,00
2	12.000,00	18.330,30	40.000,00	40.000,00
3	65.500,00	76.385,54	200.000,00	260.000,00
4	17.300,00	30.028,49	50.000,00	110.000,00
5	4.000,00	14.000,00	50.000,00	52.368,16
6	133.333,33	62.360,96	245.227,74	263.485,16
7	105.000,00	41.833,00	173.911,10	191.284,75
Summe	367.133,33	288.764,05	859.138,84	1.017.138,07

rel. Abweichung	**KENNZAHLEN**			
Risiko-Nr.	Erwartungswert	Standardabweichung	VaR	ES
1	0,41%	0,12%	0,00%	0,00%
2	0,59%	0,17%	0,00%	0,00%
3	-0,25%	-0,07%	0,00%	0,29%
4	-0,18%	-0,12%	0,00%	-0,13%
5	-1,10%	-0,34%	0,00%	0,10%
6	-0,48%	0,86%	3,98%	0,10%
7	-0,13%	1,88%	2,47%	-0,61%
Gesamt/Summe	-0,22%	-48,36%	-25,13%	-23,29%

Anzahl der Simulationen	1.000.000			

Beobachtete	**KENNZAHLEN**			
Risiko-Nr.	Erwartungswert	Standardabweichung	VaR	ES
1	29.999,10	45.825,39	100.000,00	100.000,00
2	12.020,68	18.339,32	40.000,00	40.000,00
3	65.606,45	76.410,71	200.000,00	260.380,00
4	17.318,09	30.035,63	50.000,00	110.077,00
5	4.018,45	14.034,06	50.000,00	52.404,00
6	133.329,06	62.913,87	255.000,00	263.921,40
7	105.015,30	42.604,22	178.207,75	190.101,96
Gesamt	367.307,13	149.851,91	643.207,75	783.761,40

Theoretische	**KENNZAHLEN**			
Risiko-Nr.	Erwartungswert	Standardabweichung	VaR	ES
1	30.000,00	45.825,76	100.000,00	100.000,00
2	12.000,00	18.330,30	40.000,00	40.000,00
3	65.500,00	76.385,54	200.000,00	260.000,00
4	17.300,00	30.028,49	50.000,00	110.000,00
5	4.000,00	14.000,00	50.000,00	52.368,16
6	133.333,33	62.360,96	245.227,74	263.485,16
7	105.000,00	41.833,00	173.911,10	191.284,75
Summe	367.133,33	288.764,05	859.138,84	1.017.138,07

rel. Abweichung	**KENNZAHLEN**			
Risiko-Nr.	Erwartungswert	Standardabweichung	VaR	ES
1	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
2	0,17%	0,05%	0,00%	0,00%
3	0,16%	0,03%	0,00%	0,15%
4	0,10%	0,02%	0,00%	0,07%
5	0,46%	0,24%	0,00%	0,07%
6	0,00%	0,89%	3,98%	0,17%
7	0,01%	1,84%	2,47%	-0,62%
Gesamt/Summe	0,05%	-48,11%	-25,13%	-22,94%

Anzahl der Simulationen **50.000**

Beobachtete KORRELATIONSMATRIX

1,0000	0,7968	0,0041	0,0012	-0,0028	0,3013	-0,0117
0,7968	1,0000	-0,0008	-0,0025	-0,0056	0,2922	-0,0023
0,0041	-0,0008	1,0000	0,6107	0,2462	-0,0100	0,0059
0,0012	-0,0025	0,6107	1,0000	0,3072	-0,0087	-0,0009
-0,0028	-0,0056	0,2462	0,3072	1,0000	-0,0113	-0,0114
0,3013	0,2922	-0,0100	-0,0087	-0,0113	1,0000	-0,0145
-0,0117	-0,0023	0,0059	-0,0009	-0,0114	-0,0145	1,0000

Theoretische KORRELATIONSMATRIX

1,0000	0,8000	0,0000	0,0000	0,0000	0,3000	0,0000
0,8000	1,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,3000	0,0000
0,0000	0,0000	1,0000	0,6000	0,2500	0,0000	0,0000
0,0000	0,0000	0,6000	1,0000	0,3000	0,0000	0,0000
0,0000	0,0000	0,2500	0,3000	1,0000	0,0000	0,0000
0,3000	0,3000	0,0000	0,0000	0,0000	1,0000	0,0000
0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	1,0000

abs. Abweichung KORRELATIONSMATRIX

0,0000	-0,0032	0,0041	0,0012	-0,0028	0,0013	-0,0117
-0,0032	0,0000	-0,0008	-0,0025	-0,0056	-0,0078	-0,0023
0,0041	-0,0008	0,0000	0,0107	-0,0038	-0,0100	0,0059
0,0012	-0,0025	0,0107	0,0000	0,0072	-0,0087	-0,0009
-0,0028	-0,0056	-0,0038	0,0072	0,0000	-0,0113	-0,0114
0,0013	-0,0078	-0,0100	-0,0087	-0,0113	0,0000	-0,0145
-0,0117	-0,0023	0,0059	-0,0009	-0,0114	-0,0145	0,0000

Anzahl der Simulationen 1.000.000

Beobachtete KORRELATIONSMATRIX

1,0000	0,7996	0,0012	0,0011	0,0000	0,2993	-0,0022
0,7996	1,0000	0,0012	0,0012	0,0006	0,2987	-0,0015
0,0012	0,0012	1,0000	0,6003	0,2500	-0,0002	0,0010
0,0011	0,0012	0,6003	1,0000	0,2978	-0,0024	0,0014
0,0000	0,0006	0,2500	0,2978	1,0000	0,0003	0,0012
0,2993	0,2987	-0,0002	-0,0024	0,0003	1,0000	0,0000
-0,0022	-0,0015	0,0010	0,0014	0,0012	0,0000	1,0000

Theoretische KORRELATIONSMATRIX

1,0000	0,8000	0,0000	0,0000	0,0000	0,3000	0,0000
0,8000	1,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,3000	0,0000
0,0000	0,0000	1,0000	0,6000	0,2500	0,0000	0,0000
0,0000	0,0000	0,6000	1,0000	0,3000	0,0000	0,0000
0,0000	0,0000	0,2500	0,3000	1,0000	0,0000	0,0000
0,3000	0,3000	0,0000	0,0000	0,0000	1,0000	0,0000
0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	1,0000

abs. Abweichung KORRELATIONSMATRIX

0,0000	-0,0004	0,0012	0,0011	0,0000	-0,0007	-0,0022
-0,0004	0,0000	0,0012	0,0012	0,0006	-0,0013	-0,0015
0,0012	0,0012	0,0000	0,0003	0,0000	-0,0002	0,0010
0,0011	0,0012	0,0003	0,0000	-0,0022	-0,0024	0,0014
0,0000	0,0006	0,0000	-0,0022	0,0000	0,0003	0,0012
-0,0007	-0,0013	-0,0002	-0,0024	0,0003	0,0000	0,0000
-0,0022	-0,0015	0,0010	0,0014	0,0012	0,0000	0,0000

10. Fazit und Ausblick

Im vorliegenden Artikel steht die Modellierung der Abhängigkeitsstruktur eines Risikoportfolios mithilfe einer Korrelationsmatrix im Mittelpunkt des Interesses. Dabei werden zum einen mögliche Schwierigkeiten aufgezeigt und zum anderen eine Methode zur Ermittlung einer gemeinsamen Verteilung der Verluste aus den Einzelrisiken, die auf den Arbeiten von Ene-Margit Tiit basiert, vorgestellt.

Es zeigt sich, dass man bei der Verwendung einer Korrelationsmatrix zur Modellierung der Abhängigkeitsstruktur die verschiedensten Probleme auftreten können. So kann es sein, dass die angesetzten Korrelationskoeffizienten mit einer gemeinsamen Verteilung nicht realisierbar sind, da sie außerhalb der mit den Fréchet-Hoeffding-Schranken ermittelten Grenzen liegen. Selbst wenn man eine gemeinsame Verteilung für die Verluste aus den Einzelrisiken bestimmen kann, ist diese Verteilung i.d.R. nicht eindeutig. Diese Mehrdeutigkeit wirkt sich zwar nicht auf den Erwartungswert und die Standardabweichung (Streuung) des Gesamtverlustes aus, aber auf die beiden Risikomaße Value at Risk und Expected Shortfall. Deren Werte variieren, je nach verwendeter gemeinsamer Verteilung.

Trotz der aufgezeigten Schwierigkeiten ist die Modellierung der Abhängigkeitsstruktur mithilfe einer Korrelationsmatrix eine in der Praxis gängige Methode. Sie ermöglicht einen sehr guten Zugang in die Problematik. Als mögliche Weiterentwicklung der Modellierung der Abhängigkeitsstruktur eines Risikoportfolios kann auch die Verwendung einer Copula in Betracht gezogen werden. Hierbei gibt es eine Vielzahl von möglichen Modellen, aus denen eine passende Copula ausgewählt werden kann.

Mathematischer Anhang

Satz:

Seien X_1 und X_2 zwei Zufallsvariablen mit den Verteilungsfunktionen F_1 und F_2 sowie der gemeinsamen Verteilungsfunktion F. Es seien ferner $E(X_1^2) < \infty$ und $E(X_2^2) < \infty$. Dann gilt:

$$Cov(X_1, X_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(x_1, x_2) - F_1(x_1) \cdot F_2(x_2) \; dx_1 dx_2$$

Beweis: (in Anlehnung an [4])

Zunächst wird gezeigt, dass die folgende Gleichung gilt:

$$x, z \in IR: x - z = \int_{-\infty}^{\infty} 1_{\{z \le u\}} - 1_{\{x \le u\}} \, du$$

Fall 1: $x > z$

$$1_{\{z \le u\}} - 1_{\{x \le u\}} = \begin{cases} 0 - 0 = 0 & u < z \\ 1 - 0 = 1 & z \le u < x \\ 1 - 1 = 0 & u \ge x \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} 1_{\{z \le u\}} - 1_{\{x \le u\}} \, du = \int_{z}^{x} 1 \, du = x - z$$

Fall 2: $x < z$

$$1_{\{z \le u\}} - 1_{\{x \le u\}} = \begin{cases} 0 - 0 = 0 & u < x \\ 0 - 1 = -1 & x \le u < z \\ 1 - 1 = 0 & u \ge z \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} 1_{\{z \le u\}} - 1_{\{x \le u\}} \, du = \int_{x}^{z} -1 \, du = -(z - x) = x - z$$

Fall 3: $x = z$:

$$1_{\{z \le u\}} - 1_{\{x \le u\}} = 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} 1_{\{z \le u\}} - 1_{\{x \le u\}} \, du = \int_{-\infty}^{\infty} 0 \, du = 0 = x - z$$

Seien nun (X_1, X_2) und (Z_1, Z_2) zwei unabhängige zweidimensionale Zufallsvektoren mit gleicher Verteilung. Unter Verwendung der oben bewiesenen Gleichung ergibt sich das Folgende:

$$E\big((X_1 - Z_1) \cdot (X_2 - Z_2)\big) =$$

$$= E\left(\int_{-\infty}^{\infty} 1_{\{Z_1 \le u\}} - 1_{\{X_1 \le u\}} \, du \cdot \int_{-\infty}^{\infty} 1_{\{Z_2 \le v\}} - 1_{\{X_2 \le v\}} \, dv\right) =$$

$$= E\left(\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left(1_{\{Z_1\le u\}} - 1_{\{X_1\le u\}}\right)\cdot\left(1_{\{Z_2\le v\}} - 1_{\{X_2\le v\}}\right) du\ dv\right) =$$

$$\underbrace{=}_{Fubini}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} E\left(\left(1_{\{Z_1\le u\}} - 1_{\{X_1\le u\}}\right)\cdot\left(1_{\{Z_2\le v\}} - 1_{\{X_2\le v\}}\right)\right) du\ dv =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} E\left(1_{\{Z_1\le u\}}\cdot 1_{\{Z_2\le v\}} - 1_{\{Z_1\le u\}}\cdot 1_{\{X_2\le v\}} - 1_{\{X_1\le u\}}\cdot 1_{\{Z_2\le v\}} + 1_{\{X_1\le u\}}\cdot 1_{\{X_2\le v\}}\right) du\ dv =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} E(1_{\{Z_1\le u\}}\cdot 1_{\{Z_2\le v\}}) - E(1_{\{Z_1\le u\}}\cdot 1_{\{X_2\le v\}}) - E(1_{\{X_1\le u\}}\cdot 1_{\{Z_2\le v\}})$$
$$+ E(1_{\{X_1\le u\}}\cdot 1_{\{X_2\le v\}})\ du\ dv =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} E(1_{\{Z_1\le u\}}\cdot 1_{\{Z_2\le v\}}) - E(1_{\{Z_1\le u\}})\cdot E(1_{\{X_2\le v\}}) - E(1_{\{X_1\le u\}})\cdot E(1_{\{Z_2\le v\}})$$
$$+ E(1_{\{X_1\le u\}}\cdot 1_{\{X_2\le v\}})\ du\ dv =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F(u,v) - F_1(u)\cdot F_2(v) - F_1(u)\cdot F_2(v) + F(u,v)\ du\ dv =$$

$$= 2\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F(u,v) - F_1(u)\cdot F_2(v)\ du\ dv$$

Dabei kann bei dieser Umformung der Satz von Fubini (vgl. [16] S.178f) angewendet werden, da

$$E\left(\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\left(1_{\{Z_1\le u\}} - 1_{\{X_1\le u\}}\right)\cdot\left(1_{\{Z_2\le v\}} - 1_{\{X_2\le v\}}\right)\right| du\ dv\right)$$

$$= E\left(\int_{-\infty}^{\infty}\left|1_{\{Z_1\le u\}} - 1_{\{X_1\le u\}}\right| du\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\left|1_{\{Z_2\le v\}} - 1_{\{X_2\le v\}}\right| dv\right)$$

$$= E(|X_1 - Z_1|\cdot[X_2 - Z_2]) = E(|(X_1 - Z_1)\cdot(X_2 - Z_2)|)$$

$$= E(|X_1\cdot X_2 - X_1\cdot Z_2 - Z_1\cdot X_2 + Z_1\cdot Z_2|) \le E(|X_1\cdot X_2| + |X_1\cdot Z_2| + |Z_1\cdot X_2| + |Z_1\cdot Z_2|)$$

$$= E(|X_1\cdot X_2|) + E(|X_1\cdot Z_2|) + E(|Z_1\cdot X_2|) + E(|Z_1\cdot Z_2|)$$

$$\le \sqrt{E(X_1^2)\cdot E(X_2^2)} + \sqrt{E(X_1^2)\cdot E(Z_2^2)} + \sqrt{E(Z_1^2)\cdot E(X_2^2)} + \sqrt{E(Z_1^2)\cdot E(Z_2^2)} < \infty$$

Das vorletzte Ungleichheitszeichen ergibt sich durch Anwendung der Cauchy-Schwarz-Ungleichung (vgl. [16] S.144).

Ferner gilt:

$$E\big((X_1 - Z_1)\cdot(X_2 - Z_2)\big) =$$

$$= E\big((X_1 - E(X_1) + E(Z_1) - Z_1)\cdot(X_2 - E(X_2) + E(Z_2) - Z_2)\big) =$$

$$= E\left(\left(X_1 - E(X_1)\right)\cdot\left(X_2 - E(X_2)\right)\right) - E\left(\left(X_1 - E(X_1)\right)\cdot\left(Z_2 - E(Z_2)\right)\right)$$
$$- E\left(\left(Z_1 - E(Z_1)\right)\cdot\left(X_2 - E(X_2)\right)\right) + E\left(\left(Z_1 - E(Z_1)\right)\cdot\left(Z_2 - E(Z_2)\right)\right) =$$

$= Cov(X_1, X_2) - Cov(X_1, Z_2) - Cov(Z_1, X_2) + Cov(Z_1, Z_2) =$

$= Cov(X_1, X_2) - 0 - 0 + Cov(X_1, X_2) = 2 \cdot Cov(X_1, X_2)$

Die Behauptung ergibt sich durch Gleichsetzen der beiden Ergebnisse für $E\big((X_1 - Z_1) \cdot (X_2 - Z_2)\big)$ und der anschließenden Division durch den Faktor 2.

□

Ergänzung zu Beispiel 11:

Überprüfung der Integrierbarkeit als Voraussetzung für die Anwendung des Satzes von Fubini (vgl. [16] S.178f).

<u>*Obere Fréchet-Hoeffding-Schranke*</u>

Bei der Umformung kann in Beispiel 11 der Satz von Fubini angewendet werden, da

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{x_1}^{\infty}|x_1 \cdot f(x_1)\ \cdot (F(x_2)-1)|\, dx_2\, dx_1 = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{x_1}^{\infty}|x_1|\cdot f(x_1)\ \cdot \left(1-F(x_2)\right) dx_2\, dx_1$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{x_1}^{\infty}|x_1|\cdot f(x_1)\ \cdot P(X_2 > x_2)\, dx_2\, dx_1$$

$$\underbrace{=}_{M>0} \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{x_1}^{max(M,x_1)}|x_1|\cdot f(x_1)\ \cdot P(X_2 > x_2)\, dx_2 + \int_{max(M,x_1)}^{\infty}|x_1|\cdot f(x_1)\ \cdot P(X_2 > x_2)\, dx_2\right) dx_1$$

$$\leq \int_{-\infty}^{\infty}|x_1|\cdot f(x_1)\ \cdot \left(\int_{x_1}^{max(M,x_1)} 1\, dx_2 + \int_{max(M,x_1)}^{\infty} P(|X_2| \geq x_2)\, dx_2\right) dx_1$$

$$\underbrace{\leqq}_{Ungl.\ von\, Markov} \int_{-\infty}^{\infty}|x_1|\cdot f(x_1)\ \cdot \left(max(M,x_1)-x_1+\int_{max(M,x_1)}^{\infty}\frac{E(X_2^2)}{x_2^2}\, dx_2\right) dx_1$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}|x_1|\cdot f(x_1)\ \cdot \left(max(M,x_1)-x_1+\left[-\frac{E(X_2^2)}{x_2}\right]_{max(M,x_1)}^{\infty}\right) dx_1$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}|x_1|\cdot f(x_1)\ \cdot \left(max(M,x_1)-x_1+\frac{E(X_2^2)}{max(M,x_1)}\right) dx_1$$

$$= \int_{-\infty}^{M}|x_1|\cdot f(x_1)\ \cdot \left(max(M,x_1)-x_1+\frac{E(X_2^2)}{\max(M,x_1)}\right) dx_1$$
$$+ \int_{M}^{\infty}|x_1|\cdot f(x_1)\ \cdot \left(max(M,x_1)-x_1+\frac{E(X_2^2)}{max(M,x_1)}\right) dx_1$$

$$= \int_{-\infty}^{M}|x_1|\cdot f(x_1)\ \cdot \left(\mathrm{M}-x_1+\frac{E(X_2^2)}{\mathrm{M}}\right) dx_1 + \int_{M}^{\infty}|x_1|\cdot f(x_1)\ \cdot \left(x_1-x_1+\frac{E(X_2^2)}{x_1}\right) dx_1$$

$$\leq \left(\mathrm{M}+\frac{E(X_2^2)}{\mathrm{M}}\right)\cdot \int_{-\infty}^{M}|x_1|\cdot f(x_1)\, dx_1 + \int_{-\infty}^{M} x_1^2\cdot f(x_1)\, dx_1 + E(X_2^2)\cdot \int_{M}^{\infty} f(x_1)\, dx_1 < \infty$$

und

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{x_1}|x_1\cdot f(x_1)\ \cdot F(x_2)|\, dx_2\, dx_1 = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{x_1}|x_1|\cdot f(x_1)\ \cdot P(X_2 \leq x_2)\, dx_2\, dx_1$$

$$\underbrace{=}_{M>0} \int_{-\infty}^{\infty}|x_1|\cdot f(x_1)\ \cdot \left(\int_{-\infty}^{-max(M,-x_1)} P(X_2 \leq x_2)\, dx_2 + \int_{-max(M,-x_1)}^{x_1} P(X_2 \leq x_2)\, dx_2\right) dx_1$$

$$\leq \int_{-\infty}^{\infty} |x_1| \cdot f(x_1) \cdot \left(\int_{-\infty}^{-max(M,-x_1)} P(|X_2| \geq -x_2)\, dx_2 + \int_{-max(M,-x_1)}^{x_1} 1\, dx_2 \right) dx_1$$

$$\underbrace{\leq}_{Ungl.\ von\ Markov} \int_{-\infty}^{\infty} |x_1| \cdot f(x_1) \cdot \left(\int_{-\infty}^{-max(M,-x_1)} \frac{E(X_2^2)}{x_2^2}\, dx_2 + x_1 + max(M,-x_1) \right) dx_1$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} |x_1| \cdot f(x_1) \cdot \left(\left[-\frac{E(X_2^2)}{x_2} \right]_{-\infty}^{-max(M,-x_1)} + x_1 + max(M,-x_1) \right) dx_1$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} |x_1| \cdot f(x_1) \cdot \left(\frac{E(X_2^2)}{max(M,-x_1)} + x_1 + max(M,-x_1) \right) dx_1$$

$$= \int_{-\infty}^{-M} |x_1| \cdot f(x_1) \cdot \left(\frac{E(X_2^2)}{max(M,-x_1)} + x_1 + max(M,-x_1) \right) dx_1 +$$

$$= \int_{-M}^{\infty} |x_1| \cdot f(x_1) \cdot \left(\frac{E(X_2^2)}{max(M,-x_1)} + x_1 + max(M,-x_1) \right) dx_1$$

$$= \int_{-\infty}^{-M} |x_1| \cdot f(x_1) \cdot \left(-\frac{E(X_2^2)}{x_1} + x_1 - x_1 \right) dx_1 + \int_{-M}^{\infty} |x_1| \cdot f(x_1) \cdot \left(\frac{E(X_2^2)}{M} + x_1 + M \right) dx_1$$

$$\leq E(X_2^2) \cdot \int_{-\infty}^{-M} f(x_1)\, dx_1 + \left(\frac{E(X_2^2)}{M} + M \right) \cdot \int_{-M}^{\infty} |x_1| \cdot f(x_1)\, dx_1 + \int_{-M}^{\infty} x_1^2 \cdot f(x_1)\, dx_1 < \infty$$

Bei beiden Abschätzungen wird die Ungleichung von Markov auf die Zufallsvariable X_2 und das zweite Moment angewendet (vgl. [16] S.281).

Satz:

Seien $G_k, k = 1,2, \dots, m$ und

$$G = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \cdot G_k$$

n –dimensionale Verteilungen, wobei $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$ ein Vektor mit nichtnegativen Gewichtungsfaktoren und

$$\sum_{k=1}^{m} \lambda_k = 1$$

sei. Ferner sei $h: IR^n \rightarrow IR$ eine bezüglich $G_k, k = 1,2, \dots, m$, integrierbare Funktion. Dann ist h bezüglich G integrierbar und es gilt:

$$\int_{IR^n} h\, dG = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \cdot \int_{IR^n} h\, dG_k$$

Beweis:

Die Integrierbarkeit ergibt aus die Additivität von Maßen (vgl. [1] S.77) wie folgt:

$$\int_{IR^n} |h|\, dG = \sum_{k=1}^{m} \int_{IR^n} |h|\, d(\lambda_k \cdot G_k) = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \cdot \int_{IR^n} |h|\, d(G_k) < \infty$$

Analog ergibt sich die obige Formel:

$$\int_{IR^n} h\, dG = \sum_{k=1}^{m} \int_{IR^n} h\, d(\lambda_k \cdot G_k) = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \cdot \int_{IR^n} h\, d(G_k)$$

□

Literaturverzeichnis

[1] Bauer H., *Maß- und Integrationstheorie*, 2., überarb. Aufl. Berlin [u.a.]: De Gruyter, 1992.

[2] Cottin C. und Döhler S., *Risikoanalyse: Modellierung, Beurteilung und Management von Risiken mit Praxisbeispielen*, 2., überarb. u. erw. Aufl. Wiesbaden: Springer Spektrum, 2013.

[3] Deloitte, *Neuregelungen des IDW PS 340 n.F. im Überblick*, *h*ttps://www2.deloitte.com/de/de/pages/audit/articles/idw-eps-340-n-f-neuregelungen-ueberlick.html (Stand 30. August 2023).

[4] Dhaene J. und Goovaerts M., „Dependency of Risks and Stop-Loss Order", *ASTIN BULLETIN*, Bd. 26, Nr. 2, S. 201–212, 1996, doi: 10.2143/AST.26.2.563219.

[5] Embrechts P., McNeil A., Straumann D., und The Pennsylvania State University CiteSeerX Archives, *Correlation And Dependence In Risk Management: Properties And Pitfalls*. Cambridge University Press, 1999.

[6] Fréchet M., „Les tableaux dont les marges sont données", *Trabajos de Estadistica*, Bd. 11, Nr. 1, S. 3–18, Feb. 1960, doi: 10.1007/bf03009203.

[7] Gänßler P. und Stute W., *Wahrscheinlichkeitstheorie*. Berlin [u.a.]: Springer, 1977.

[8] Georgii H.-O., *Stochastik: Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik*, 5. Aufl. Berlin; Boston: De Gruyter, 2015.

[9] Gleißner W. und Wolfrum M., *Risikoaggregation und Monte-Carlo-Simulation: Schlüsseltechnologie für Risikomanagement und Controlling*. Wiesbaden: Springer Fachmedien Wiesbaden, Imprint: Springer, 2019 [Online]. Verfügbar unter: https://doi.org/ 10.1007/978-3-658-24274-9

[10] Hoeffding W., *Maszstabinvariante Korrelationstheorie: Maßstabinvariante Korrelationstheorie*. 1940.

[11] Krengel U., *Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik*, 8., erweiterte Auflage. Wiesbaden: Vieweg+Teubner Verlag, 2005 [Online]. Verfügbar unter: https://doi.org/ 10.1007/978-3-663-09885-0

[12] Mai J.-F., Scherer M., Czado C., Korn E., Korn R., und Stöber J., *Simulating copulas: stochastic models, sampling algorithms, and applications*, 2nd edition. New Jersey: World Scientific, 2017.

[13] Opitz O., Etschberger S., Burkart W. R., und Klein R., *Mathematik: Lehrbuch für das Studium der Wirtschaftswissenschaften*, 12., vollständig überarbeitete Auflage. Berlin; Boston: De Gruyter Oldenbourg, 2017 [Online]. Verfügbar unter: https://doi.org/10.1515/9783110475333

[14] Schlittgen R., *Einführung in die Statistik: Analyse und Modellierung von Daten*, 12., korr. Aufl. München: Oldenbourg, 2012 [Online]. Verfügbar unter:

https://doi.org/10.1524/9783486715910

[15] Schlittgen R. und Streitberg B. H. J., *Zeitreihenanalyse*, 9., unwesentlich veränd. Aufl. München [u.a.]: Oldenbourg, 2001.

[16] Schmidt K. D., *Maß und Wahrscheinlichkeit*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2009 [Online]. Verfügbar unter: https://doi.org/10.1007/978-3-540-89730-9

[17] Tiit E.-M., „Mixtures of Multivariate Quasi-Extremal Distributions Having Given Marginals", *Lecture Notes-Monograph Series, 1996 Jan 01*, Bd. 28, S. 337–357, 1996.

Impressum

Diese Veröffentlichung erscheint im Rahmen der Online-Publikationsreihe „Forschung am **ivw**Köln“. Eine vollständige Übersicht aller bisher erschienenen Publikationen findet sich am Ende dieser Publikation und kann hier abgerufen werden.

Forschung am ivwKöln, 2/2024
ISSN (online) 2192-8479

Ralf Knobloch: Aggregation in einem Risikoportfolio mit Abhängigkeitsstruktur

Köln, Februar 2024

Kontakt Autor / Contact author:

Prof. Dr. Ralf Knobloch

Schmalenbach Institut für Wirtschaftswissenschaften /
Schmalenbach Institute of Business Administration

Fakultät für Wirtschafts- und Rechtswissenschaften /
Faculty of Business, Economics and Law

Technische Hochschule Köln /
University of Applied Sciences

Gustav Heinemann-Ufer 54
50968 Köln

Mail ralf.knobloch@th-koeln.de

Publikationsreihe „Forschung am ivwKöln“

Die Veröffentlichungen der Online-Publikationsreihe "Forschung am ivwKöln" (ISSN: 2192-8479) werden üblicherweise über Cologne Open Science (Publikationsserver der TH Köln) veröffentlicht. Die Publikationen werden hierdurch über nationale und internationale Bibliothekskataloge, Suchmaschinen sowie andere Nachweisinstrumente erschlossen.

Alle Publikationen sind auch kostenlos abrufbar unter www.ivw-koeln.de.

2024

1/2024	Institut für Versicherungswesen: Forschungsbericht für das Jahr 2023

2023

2/2023	Völler, Müller-Peters: InsurTech Karte ivwKöln 2023 - Beiträge zu InsurTechs und Innovation am ivwKöln
1/2023	Institut für Versicherungswesen: Forschungsbericht für das Jahr 2022

2022

4/2022	Goecke: Collective Defined Contribution Plans – Backtesting Based on German Capital Market Data 1950 - 2022
3/2022	Knobloch, Miebs: Aktuelle Herausforderungen an das aktuarielle und finanzielle Risikomanagement durch COVID-19 und die anhaltende Niedrigzinsphase. Proceedings zum 16. FaRis & DAV-Symposium am 10. Dezember 2021
2/2022	Knobloch: Ein Portfolio von inhomogenen Markov-Ketten mit Abhängigkeitsstruktur
1/2022	Institut für Versicherungswesen: Forschungsbericht für das Jahr 2021

2021

4/2021	Institut für Versicherungswesen: Risiko im Wandel als Herausforderung für die Versicherungswirtschaft
3/2021	Völler, Müller-Peters: InsurTech Karte ivwKöln 2021 - Beiträge zu InsurTechs und Innovation am ivwKöln
2/2021	Knobloch: Die quantitative Risikobewertung bei einem Portfolio von dichotomen Risiken mithilfe des zentralen Grenzwertsatzes
1/2021	Institut für Versicherungswesen: Forschungsbericht für das Jahr 2020

2020

7/2020	Müller-Peters, Schmidt, Völler: Revolutionieren Big Data und KI die Versicherungswirtschaft? 24. Kölner Versicherungssymposium am 14. November 2019
6/2020	Schmidt: Künstliche Intelligenz im Risikomanagement. Proceedings zum 15. FaRis & DAV Symposium am 6. Dezember 2019 in Köln
5/2020	Müller-Peters: Die Wahrnehmung von Risiken im Rahmen der Corona-Krise
4/2020	Knobloch: Modellierung einer Cantelli-Zusage mithilfe einer bewerteten inhomogenen Markov-Kette
3/2020	Müller-Peters, Gatzert: Todsicher: Die Wahrnehmung und Fehlwahrnehmung von Alltagsrisiken in der Öffentlichkeit
2/2020	Völler, Müller-Peters: InsurTech Karte ivwKöln 2020 - Beiträge zu InsurTechs und Innovation am ivwKöln
1/2020	Institut für Versicherungswesen: Forschungsbericht für das Jahr 2019

2019

5/2019	Muders: Risiko und Resilienz kollektiver Sparprozesse – Backtesting auf Basis deutscher und US-amerikanischer Kapitalmarktdaten 1957-2017
4/2019	Heep-Altiner, Berg: Mikroökonomisches Produktionsmodell für Versicherungen. Teil 2: Renditemaximierung und Vergleich mit klassischen Optimierungsansätzen.
3/2019	Völler, Müller-Peters: InsurTech Karte ivwKöln 2019 - Beiträge zu InsurTechs und Innovation am ivwKöln
2/2019	Rohlfs, Pütz, Morawetz: Risiken des automatisierten Fahrens. Herausforderungen und Lösungsansätze für die Kfz-Versicherung. Proceedings zum 14. FaRis & DAV-Symposium am 7.12.2018 in Köln.
1/2019	Institut für Versicherungswesen: Forschungsbericht für das Jahr 2018