Leonhard Euler

Instrucción completa
de
Álgebra

Segunda parte

Leonh. Euler

Leonhard Euler
Instrucción completa de Álgebra
Segunda Parte

Instrucción completa de Álgebra

Segunda Parte

Leonhard Euler

Traducción de Alexander Roux

Traducido por Alexander Roux con la colaboración de Susana Ledezma

Edición alemana original:
Leonhard Euler: *Vollständige Anleitung zur Algebra*. *Zweyter Theil*. St. Petersburg, 1770

Notas del traductor

Este libro es la traducción de la versión original alemana de 1770, incluyendo algunas anotaciones del matemático Heinrich Weber (1842-1913) en el libro de 1911, parte de la edición de la obra completa de Euler. Las correcciones de errores efectuadas por Weber se han tomado en cuenta en el presente libro.

Las pocas anotaciones que agregó el traductor se encuentran entre corchetes.

Euler escribió el libro en un lenguaje sencillo y coloquial, casi sin términos técnicos. En la traducción se ha pretendido conservar estas características y el espíritu del texto original. Como se trata de la primera versión española, se ha optado por traducir el texto lo más literalmente posible; lo cual incluye la puntuación original.

Sin embargo, sí se realizaron cambios *tipográficos*, utilizando letras itálicas cuando representan números. Asimismo, palabras destacadas se escribieron con letras itálicas; y para nombres de personas se utilizaron letras versalitas.

Finalmente, se aprovecharon los avances tecnológicos que permiten una maquetación más agradable para el lector.

Brühl, febrero de 2022 *Alexander Roux*

INFORME PREVIO

Por la presente se le entrega a los amantes de la aritmética avanzada una obra, de la cual una traducción rusa ha salido a la luz hace dos años [*Nota del traductor: es decir, en 1768*].[1)]

La intención del autor de fama mundial era elaborar un libro de texto con el que cualquiera pudiese entender fácilmente el álgebra y aprenderla a fondo.

La pérdida de la vista hizo surgir esta idea en él, e impulsado por su mente siempre movida, no falló en realizar su propósito. Para este fin escogió a un joven, al cual trajo de Berlín como criado, y quien sabía hacer cuentas bastante bien, pero no tenía ni la más mínima idea de matemáticas. Era sastre de oficio, y pertenecía, con respecto a las habilidades, a las mentes regulares. A pesar de esto, no sólo entendió muy bien lo que le decía y ordenaba escribir su gran maestro, sino que dentro de poco tiempo fue capaz de ejecutar por su propia cuenta los cálculos difíciles con letras, que iban apareciendo. Y podía resolver todas las tareas algebraicas encargadas con gran habilidad.

El aprendiz, quien escribió, entendió y realizó esta obra, solo obtuvo ayuda por parte de su maestro, quien aunque era famoso, estaba privado de la vista. Eso alaba aún más la exposición y el modo de enseñanza de la obra.

Aparte de este gran mérito, los conocedores leerán con placer y admiración sobre todo la teoría de los logaritmos y su relación con las otras operaciones aritméticas, y la resolución de las ecuaciones cúbicas y bicuadráticas. Los amantes de los problemas DIOFÁNTICOS, sin embargo, podrán disfrutar de la última sección de la segunda parte, en la que estas tareas se presentan en un contexto agradable, y se explican las técnicas necesarias para sus soluciones.

---

1) La primera parte de esta traducción apareció en 1768, la segunda en 1769. Los traductores fueron PETER INOCHODTZOFF e IWAN IUDIN.

La primera parte del original alemán debió completarse en 1767 a más tardar, la segunda en 1768. El hecho de que Euler haya usado los números 1765 y 1766 repetidamente y de manera llamativa como ejemplos (ver, por ejemplo, p. 106 y 197), ciertamente permite concluir que el trabajo ya había comenzado en 1765, es decir, todavía en Berlín. De ahí también había llevado a su ayudante con él, a quien supuestamente había examinado de antemano.

De las numerosas ediciones y traducciones que ha sufrido el Álgebra (las copias de los títulos y las notas bibliográficas e históricas asociadas abarcan 10 páginas impresas en la *Lista de obras de LEONHARD EULER* elaborada por ENESTRÖM), solo hay que destacar la traducción al francés de JOHANN III BERNOULLI, que se publicó en Lyon en 1774 en dos volúmenes. El segundo volumen contiene las famosas *Additions* de LAGRANGE.
Heinrich Weber, 1911

CONTENIDO DE LA OBRA COMPLETA

PRIMERA PARTE

SECCIÓN 1
DE LAS DIFERENTES OPERACIONES ARITMÉTICAS CON MAGNITUDES SIMPLES

SEGUNDA PARTE

SECCIÓN 1
DE LAS ECUACIONES ALGEBRAICAS Y SU RESOLUCIÓN

FIN

PRIMERA SECCIÓN DE LA SEGUNDA PARTE

DE LAS ECUACIONES ALGEBRAICAS Y SU RESOLUCIÓN

CAPÍTULO 1

DE LA RESOLUCIÓN DE TAREAS EN GENERAL

1.

El objetivo principal del álgebra, como de todas las partes de las matemáticas, es determinar el valor de las cantidades desconocidas hasta el momento. Esto tiene que hacerse considerando cuidadosamente las condiciones dadas, expresadas por cantidades conocidas. Por eso, el álgebra también se describe diciendo que ella enseña cómo encontrar cantidades desconocidas a partir de cantidades conocidas.

2.

Esto también coincide con todo lo que se ha presentado hasta ahora, ya que dondequiera, partiendo de magnitudes conocidas, se han obtenido otras magnitudes, que antes podían verse como desconocidas.

De inmediato, el primer ejemplo se encuentra en la suma, ya que la suma se encontró para dos o más números dados. De hecho, allí se buscó un número que sea igual a los números dados juntos.

En la resta se buscó un número que fuera igual a la diferencia entre dos números dados.

Y lo mismo ocurre con la multiplicación y la división, así como con las potencias y la extracción de las raíces, en las cuales siempre se encuentra un número previamente desconocido, a partir de los conocidos.

3.

En la última sección ya hemos resuelto varias preguntas, en las cuales se trataba de encontrar un número que tenía que ser deducido de otros números conocidos, bajo ciertas condiciones.

Así que todas las preguntas se reducen al hecho de que a partir de algunos números dados se debe encontrar uno nuevo, que está vinculado de cierta manera con aquellos, y este vínculo está determinado por ciertas condiciones o propiedades que tiene que tener el número buscado.

4.

Para cada pregunta que surge, el número a buscar se indica con una de las últimas letras del alfabeto, y se tienen en cuenta todas las condiciones prescritas, por lo que se llega a una igualdad de dos números. A partir de tal ecuación, se tiene que determinar el valor del número buscado, lo que resuelve la pregunta. A veces hay que buscar varios números, lo que se tiene que hacer de la misma manera utilizando ecuaciones.

5.

Esto quedará más claro a través de un ejemplo; consideramos la siguiente pregunta:

20 personas, hombres y mujeres, comen en una fonda: un hombre consume 8 groses [gro.], pero una mujer 7 gro., y el consumo total asciende a 6 táleros [tál.; 1 tál. = 24 gro.] Ahora la pregunta es, ¿cuántos hombres y mujeres había?

Para resolver esta pregunta, ponemos el número de hombres $= x$, y lo tomamos como conocido, o procedemos como si estuviéramos realizando la prueba para ver si esto satisface la pregunta. Dado que el número de hombres $= x$, y hombres y mujeres juntos suman 20 personas, el número de mujeres se puede determinar a partir de esto, y se encuentra restando el número de hombres de 20. Entonces el número de mujeres es $= 20 - x$.

Ahora, ya que un hombre consume 8 gro., estos x hombres consumirán $8x$ gro. Y porque una mujer consume 7 gro., estas $20-x$ mujeres consumirán $140-7x$ gro.

Entonces, hombres y mujeres juntos consumen $140+x$ gro. Pero sabemos cuánto han consumido, es decir, 6 tál., que convertidos a groses, dan 144 gr. Así obtenemos la ecuación $140+x=144$, de la cual es fácil ver que $x=4$.

Por lo tanto, había 4 hombres y 16 mujeres en la comida.

6.

Otra pregunta del mismo tipo:

20 personas, hombres y mujeres, están en una fonda. Los hombres consumen 24 florines [flo.] y las mujeres también consumen 24 flo., y resulta que un hombre tenía que pagar un florín más que una mujer. ¿Cuántos hombres y mujeres eran?

Sea el número de hombres $=x$, luego el número de mujeres es $=20-x$. Ahora, ya que estos x hombres han consumido 24 flo., entonces un hombre ha consumido $\frac{24}{x}$ florines.

Y debido a que las $20-x$ mujeres también han consumido 24 flo., una mujer ha consumido $\frac{24}{20-x}$. Este consumo de una mujer es ahora 1 menos que el consumo de un hombre. Entonces, si se le resta 1 flo. al consumo de un hombre, tiene que salir el consumo de una mujer; de lo cual se obtiene esta ecuación: $\frac{24}{x}-1=\frac{24}{20-x}$. Entonces esta es la ecuación a partir de la cual se tiene que buscar el valor de x, que no se puede encontrar tan fácilmente como en la pregunta anterior. Pero en lo que sigue veremos que $x=8$, que también satisface la ecuación encontrada: $\frac{24}{8}-1=\frac{24}{12}$, o sea $2=2$.

7.

En todas las preguntas, es decisivo que, después de que los números desconocidos o buscados hayan sido indicados con letras, se consideren cuidadosamente las circunstancias de la pregunta, y de ellas se deriven las ecuaciones. Después de eso, todo el arte consiste en cómo resolver tales ecuaciones, y encontrar el valor de los números desconocidos, y eso se tratará en esta sección.

8.

En las preguntas mismas también hay una diferencia, ya que en algunas se busca un solo número, y en otras se buscan dos o más números; en este último caso se debe tener en cuenta que se requiere el igual número de ecuaciones especiales, las cuales tienen que derivarse de las circunstancias de la pregunta misma.

9.

Entonces, una ecuación consta de dos miembros que se plantean como iguales. Para averiguar el valor del número desconocido, a menudo se tienen que efectuar muchísimas transformaciones, todas ellas basadas en el hecho de que cuando dos cantidades son iguales, también permanecen iguales, si se suman o restan las mismas cantidades a ambas; también si se multiplican o dividen por el mismo número; además si ambas a la vez se elevan a potencias, o de ambas se extraen raíces del mismo grado, y finalmente si se toman los logaritmos de ambas, como ya sucedió en la sección anterior.

10.

Aquellas ecuaciones en las que, solo ocurre la primera potencia del número desconocido, después de haber sido ordenadas, son las más fáciles de resolver y se denominan *ecuaciones de primer grado*. Luego siguen las ecuaciones que contienen la segunda potencia o el cuadrado del número desconocido, estas se denominan *ecuaciones cuadráticas* o *de segundo grado*. Después siguen las *ecuaciones de tercer grado* o *cúbicas*, en las que aparece el cubo del número desconocido, etc.; todo eso se tratará en esta sección.

CAPÍTULO 2

DE LAS ECUACIONES DE PRIMER GRADO Y SU RESOLUCIÓN

11.

Si el número desconocido o buscado se indica con la letra x, y la ecuación que surge es tal que un miembro solo contiene la x y el otro miembro contiene un número conocido, como p. ej. $x = 25$, entonces realmente ya se tiene el valor de x que se requiere, y siempre se debe aspirar a llegar a esta forma, por muy confusa que sea la ecuación que se tenga al principio; las reglas pertinentes se darán a continuación.

12.

Comenzamos con los casos más fáciles, y en primer lugar suponemos que se haya llegado a esta ecuación:

$x+9=16$, entonces se puede ver que $x=7$.

Pero sea de una manera general $x+a=b$, donde a y b indican números conocidos, los cuales pueden ser los que quieran. Entonces aquí se tiene que restar a en ambos lados y se obtiene la ecuación $x=b-a$, que nos muestra el valor de x.

13.

Si la ecuación encontrada es $x-a=b$, entonces agregamos a en ambos lados, y obtenemos $x=a+b$, que es el valor buscado de x.

De la misma manera se procede si la primera ecuación es de la forma $x-a=aa+1$, entonces será $x=aa+a+1$.

Y de la ecuación $x-8a=20-6a$ obtenemos $x=20-6a+8a$, o sea $x=20+2a$.

Y para $x+6a=20+3a$ se encuentra que $x=20+3a-6a$, o sea $x=20-3a$.

14.

Si la ecuación tiene la forma $x-a+b=c$, entonces se puede sumar a en ambos lados, obteniendo $x+b=c+a$, ahora se resta b en ambos lados, entonces se tiene $x=c+a-b$. Pero se puede sumar $+a-b$ en ambos lados al mismo tiempo, por lo que se obtiene $x=c+a-b$ de una vez. De la misma manera, en los siguientes ejemplos:

si $x-2a+3b=0$, entonces $x=2\mathrm{a}-3b$,

si $x-3a+2b=25+a+2b$, entonces $x=25+4a$,

si $x-9+6a=25+2a$, entonces $x=34-4a$.

15.

Si la ecuación encontrada tiene la forma $ax=b$, entonces se dividen ambos lados entre a, se tiene $x=\frac{b}{a}$.

Pero si la ecuación es $ax+b-c=d$, entonces primero se tiene que quitar lo que está escrito con ax, se agrega en ambos lados $-b+c$, entonces sale $ax=d-b+c$, consecuentemente $x=\frac{d-b+c}{a}$. O se resta $+b-c$ de ambos lados, entonces sale $ax=d-b+c$, y $x=\frac{d-b+c}{a}$.

Sea $2x+5=17$, luego $2x=12$ y $x=6$.

Sea $3x-8=7$, luego $3x=15$ y $x=5$.

Sea $4x-5-3a=15+9a$, luego $4x=20+12a$, por lo tanto $x=5+3a$.

16.

Si la ecuación es de la forma $\frac{x}{a}=b$, entonces se multiplica por a en ambos lados, así se obtiene $x=ab$.

Si ahora es $\frac{x}{a}+b-c=d$, entonces en primer lugar será $\frac{x}{a}=d-b+c$, y luego

$$x=(d-b+c)a=ad-ab+ac.$$

Sea $\frac{1}{2}x-3=4$, entonces $\frac{1}{2}x=7$, $x=14$.

Sea $\frac{1}{3}x-1+2a=3+a$, entonces $\frac{1}{3}x=4-a$, y $x=12-3a$.

Sea $\frac{x}{a-1}-1=a$, entonces $\frac{x}{a-1}=a+1$, y $x=aa-1$.

17.

Si la ecuación es de la forma $\frac{ax}{b}=c$, entonces se multiplica por b en ambos lados, así se obtiene $ax=bc$, y además $x=\frac{bc}{a}$.

Pero si $\frac{ax}{b}-c=d$, entonces será $\frac{ax}{b}=d+c$ y $ax=bd+bc$, y en consecuencia $x=\frac{bd+bc}{a}$.

Sea $\frac{2}{3}x-4=1$, entonces $\frac{2}{3}x=5$ y $2x=15$, en consecuencia $x=\frac{15}{2}$, es decir $7\frac{1}{2}$.

Sea $\frac{3}{4}x+\frac{1}{2}=5$, entonces $\frac{3}{4}x=5-\frac{1}{2}$, que es $=\frac{9}{2}$, y $3x=18$, y $x=6$.

18.

También puede suceder que dos o más términos contengan la letra x, y aparezcan o en un miembro, o en ambos. Si están en un lado, como en $x+\frac{1}{2}x+5=11$, entonces será $x+\frac{1}{2}x=6$, y $3x=12$, y $x=4$.

Sea $x+\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}x=44$, ¿que es x? Multiplicamos por 3, entonces $4x+\frac{3}{2}x=132$, además, multiplicando por 2, da $11x=264$, y $x=24$. Aquellos tres términos también pueden ser resumidos en uno, o sea $\frac{11}{6}x=44$, se dividen ambos lados entre 11, obteniendo $\frac{1}{6}x=4$, y $x=24$.

Sea $\frac{2}{3}x-\frac{3}{4}x+\frac{1}{2}x=1$, resumiendo sale $\frac{5}{12}x=1$, y $x=2\frac{2}{5}$.

Sea $ax-bx+cx=d$, entonces esto es lo mismo que $(a-b+c)x=d$, de lo cual sale $x=\frac{d}{a-b+c}$.

19.

Pero si x se encuentra en ambos miembros, como p. ej. en $3x+2=x+10$, entonces hay que quitar las x del lado que contenga menos x. Por lo tanto, se resta x de ambos lados, entonces resulta $2x+2=10$, y $2x=8$, y $x=4$.

Además, sea $x+4=20-x$, entonces $2x+4=20$, y $2x=16$, y $x=8$.

Sea $x+8=32-3x$, entonces $4x+8=32$, y $4x=24$, y $x=6$.

Además, sea $15-x=20-2x$, entonces $15+x=20$, y $x=5$.

Sea $1+x=5-\frac{1}{2}x$, entonces $1+\frac{3}{2}x=5$, y $\frac{3}{2}x=4$, y $3x=8$, y $x=2\frac{2}{3}$.

Sea $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}x=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}x,$ sumando $\frac{1}{3}x$ sale $\frac{1}{2}=\frac{1}{3}+\frac{1}{12}x,$ restamos $\frac{1}{3},$ se obtiene $\frac{1}{12}x=\frac{1}{6},$ multiplicamos por 12, y resulta $x = 2$.

Sea $1\frac{1}{2}-\frac{2}{3}x=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}x,$ sumando $\frac{2}{3}x$ sale $1\frac{1}{2}=\frac{1}{4}+\frac{7}{6}x,$ restamos $\frac{1}{4},$ entonces se obtiene $\frac{7}{6}x=1\frac{1}{4},$ multiplicamos por 6, entonces se obtiene $7x=7\frac{1}{2},$ dividiendo entre 7 da $x=1\frac{1}{14},$ o también $x=\frac{15}{14}.$

20.

Si se llega a una ecuación, en la cual el número desconocido x está en el denominador, la fracción tiene que ser eliminada, multiplicando la ecuación completa por ese mismo denominador.

Entonces, si se encuentra $\frac{100}{x}-8=12,$ sumando 8 sale $\frac{100}{x}=20,$ multiplicando por x, se obtiene $100 = 20x$, y dividiendo entre 20, da $x = 5$.

Además, sea $\frac{5x+3}{x-1}=7,$ multiplicando por $x-1$, se tiene $5x+3 = 7x-7$, restando $5x$, da $3 = 2x-7$, sumando 7 se obtiene $2x = 10$, por lo tanto $x = 5$.

21.

A veces también hay signos de raíz, y sin embargo la ecuación es de primer grado; como cuando se busca un número x menor que 100, de modo que la raíz cuadrada de $100-x$ sea igual a 8, o sea que $\sqrt{100-x}=8.$ Entonces tomamos los cuadrados en ambos lados, $100-x = 64$, se suma x, obteniendo $100 = 64+x$, restamos 64, y tenemos $x = 36$. O también se podría proceder así: ya que $100-x = 64$, restamos 100, y obtenemos $-x = -36$, multiplicando por -1, da $x = 36$.

22.

A veces, el número desconocido x también aparece en el exponente, tales ejemplos ya han ocurrido anteriormente, y ahí hay que acudir a los logaritmos.

Como cuando se encuentra $2^x = 512$, se toman los logaritmos en ambos lados, ahí se tiene $x \log 2 = \log 512$; se divide entre $\log 2$, entonces será $x = \frac{\log 512}{\log 2}$; por lo tanto, según las tablas obtenemos:

$$x = \frac{2{,}7092700}{0{,}3010300} = \frac{27092700}{3010300}; \text{ por lo tanto } x = 9.$$

Sea $5 \cdot 3^{2x} - 100 = 305$; sumando 100, sale $5 \cdot 3^{2x} = 405$; dividiendo entre 5 da $3^{2x} = 81$; tomando los logaritmos, $2x \log 3 = \log 81$, y dividiendo entre $2 \log 3$, obtenemos $x = \frac{\log 81}{2 \log 3}$, o sea $x = \frac{\log 81}{\log 9}$, por lo tanto $x = \frac{1{,}9084850}{0{,}9542425} = \frac{19084850}{9542425}$; entonces $x = 2$.

CAPÍTULO 3

RESOLUCIÓN DE ALGUNAS PREGUNTAS RELACIONADAS

23.

I. Pregunta. Partir 7 en dos partes, tal que la mayor sea 3 más grande que la menor.

Sea la parte mayor $= x$, entonces la parte menor será $7 - x$, por lo tanto tiene que ser $x = 7 - x + 3$, o sea $x = 10 - x$; sumando x, sale $2x = 10$, y dividiendo entre 2, se obtienes $x = 5$.

Respuesta. La parte mayor es 5 y la menor 2.

II. Pregunta. Partir a en dos partes, tal que la mayor sea b más grande que la menor.

Sea la parte mayor x, entonces la parte menor será $a - x$, por lo tanto $x = a - x + b$; sumando x, sale $2x = a + b$, y dividiendo entre 2, se obtienes $x = \frac{a+b}{2}$.

Otra solución: sea la parte mayor $= x$, porque ahora esa es b más grande que la parte menor, entonces, al revés, la parte menor es b más pequeña que la parte mayor; por lo tanto, la parte más pequeña será $x - b$: estas dos partes juntas tienen que dar a, por lo que se obtiene: $2x - b = a$; sumando b, se tiene $2x = a + b$, por lo tanto, $x = \frac{a+b}{2}$, que es la parte mayor, y la parte menor será $\frac{a+b}{2} - b$, o sea $\frac{a+b}{2} - \frac{2b}{2}$, o sea $\frac{a-b}{2}$.

24.

III. Pregunta. Un padre deja tres hijos y 1600 tál. (táleros). Según su testamento, el hijo mayor debería tener 200 tál. más que el segundo, pero el segundo 100 tál. más que el tercero; ¿cuánto recibe cada uno?

Sea la herencia del tercero $= x$, luego la herencia del segundo $= x + 100$, y la herencia del primero $= x + 300$; estas 3 juntas tienen que ascender a 1600 tál. Por lo tanto, $3x + 400 = 1600$; restando 400, obtenemos $3x = 1200$, y dividiendo entre 3, da $x = 400$.

Respuesta. El tercero obtiene 400 tál., el segundo 500 tál., y el primero 700 tál.

25.

IV. Pregunta. Un padre deja 4 hijos y 8600 tál. Según su testamento, el primer hijo debe recibir el doble que el segundo, menos 100 tál. El segundo debe obtener tres veces más que el tercero, menos 200 tál., y el tercero debe tener cuatro veces más que el cuarto, menos 300 tál. ¿Cuánto recibe cada uno?

Sea la herencia del cuarto $= x$, luego la herencia del tercero $4x - 300$, la herencia del segundo $12x - 1100$, y la herencia del primero $24x - 2300$. La suma de estas debe ascender a 8600 tál., de donde surge esta ecuación: $41x - 3700 = 8600$; sumando 3700, obtenemos $41x = 12300$; y dividiendo entre 41, da $x = 300$.

Respuesta. El cuarto hijo obtiene 300 tál., el tercero obtiene 900 tál., el segundo 2500 tál., y el primero 4900 tál.

26.

V. Pregunta. Un hombre deja 11000 tál. y una viuda, dos hijos y tres hijas. Según su testamento, la mujer debe tener dos veces más que un hijo y un hijo dos veces más que una hija. ¿Cuánto recibe cada uno?

Sea la herencia de una hija $= x$, de modo que la herencia de un hijo $= 2x$, y la herencia de la viuda $= 4x$; por lo tanto, la herencia completa es $3x + 4x + 4x$, o sea $11x = 11000$; dividiendo entre 11, da $x = 1000$.

Respuesta:

una hija recibe 1000 tál., las tres reciben	3000 tál.
un hijo recibe 2000 tál., los dos reciben	4000 tál.
y la madre recibe	4000 tál.
Suma	11000 tál.

27.

VI. Pregunta. Un padre deja tres hijos que comparten la fortuna legada de la siguiente manera. El primero obtiene 1000 tál. menos de la mitad de la herencia total, el segundo 800 tál. menos que la tercera parte de la herencia, y el tercero 600 tál. menos que la cuarta parte de la herencia. Ahora la pregunta es: ¿qué tan grande fue la herencia, y cuánto recibió cada uno?

Sea todo el patrimonio $= x$,

entonces el primer hijo recibió $\frac{1}{2}x - 1000$

el segundo $\frac{1}{3}x - 800$

el tercero $\frac{1}{4}x - 600$

Por lo tanto, los tres hijos juntos recibieron $\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}x - 2400,$ que tiene que igualarse a la herencia total, x, de lo cual surge la ecuación $\frac{13}{12}x - 2400 = x.$ Réstese x, entonces se tiene $\frac{1}{12}x - 2400 = 0,$ súmese 2400, entonces $\frac{1}{12}x = 2400,$ y multiplicado por 12, da $x = 28800.$

Respuesta. Toda la herencia ascendía a 28800 tál., de la cual ahora

el primer hijo recibió	13400 tál.
el segundo	8800
el tercero	6600
por lo tanto, los tres juntos	28800 tál.

28.

VII Pregunta: Un padre deja cuatro hijos que comparten la herencia entre ellos: el primero toma 3000 tál. menos de la mitad de la herencia, el segundo toma 1000 tál. menos que $\frac{1}{3}$ de la herencia, el tercero solo toma justamente $\frac{1}{4}$ de la herencia total, el cuarto toma 600 tál., más $\frac{1}{5}$ de la herencia. ¿Qué tan grande fue la herencia y cuánto recibió cada hijo?

Ponemos toda la herencia $= x$

entonces el primer hijo recibió $\frac{1}{2}x - 3000$

el segundo $\frac{1}{3}x - 1000$

el tercero $\frac{1}{4}x$

el cuarto $\frac{1}{5}x+600$

y los cuatro juntos tomaron $\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}x+\frac{1}{4}x+\frac{1}{5}x-3400$, que tiene que ser $=x$. Por eso tenemos la ecuación $\frac{77}{60}x-3400=x$, restando x, entonces $\frac{17}{60}x-3400=0$, sumando 3400, da $\frac{17}{60}x=3400$, dividiendo entre 17, se obtiene $\frac{1}{60}x=200$, y multiplicando por 60 da $x = 12000$.

Respuesta. Toda la herencia era de 12000 tál. De esta, el primero recibió 3000 tál., el segundo 3000, el tercero 3000, el cuarto 3000.

29.

VIII. Pregunta. Se busca un número tal, que si se suma su mitad, excede 60 por la misma cantidad que le falta al número mismo para llegar a 65.

El número sea x, entonces $x+\frac{1}{2}x-60$ tiene que ser tanto como $65-x$, es decir $\frac{3}{2}x-60=65-x$; sumando x, tenemos $\frac{5}{2}x-60=65$, sumando 60, sale $\frac{5}{2}x=125$, dividimos entre 5 y tenemos $\frac{1}{2}x=25$, multiplicando por 2, da $x = 50$.

Respuesta. El número buscado es 50.

30.

IX. Pregunta. Partir 32 en dos partes, tal que, si se divide la menor entre 6, pero la mayor entre 5, los dos cocientes juntos den 6.

Sea la parte menor $= x$, entonces la mayor es $= 32-x$; la menor, dividida entre 6, da $\frac{x}{6}$; la mayor, dividida entre 5, da $\frac{32-x}{5}$. Entonces tiene que ser $\frac{x}{6}+\frac{32-x}{5}=6$, multiplicada por 5, da $\frac{5}{6}x+32-x=30$, o sea $-\frac{1}{6}x+32=30$, sumando $\frac{1}{6}x$, sale $32=30+\frac{1}{6}x$, restando 30, da $2=\frac{1}{6}x$, multiplicando por 6, se obtiene $x=12$.

Respuesta. La parte menor es 12 y la parte mayor 20.

31.

X. Pregunta. Buscamos un número tal que, si se multiplica por 5, el producto es tanto menos que 40, como el número mismo es menos que 12.

Sea este número $=x$, que está por debajo de 12 por $12-x$, el número, tomado cinco veces, es $5x$ y está por debajo de 40 por $40-5x$, que debe ser tanto como $12-x$, por lo tanto, $40-5x=12-x$, súmese $5x$, entonces será $40=12+4x$, restando 12 da $28=4x$, dividiendo entre 4 da $x=7$.

Respuesta. El número es 7.

32.

XI. Pregunta. Partir 25 en dos partes, tal que la mayor sea 49 veces más grande que la menor.

Sea la parte menor $=x$, entonces la mayor $=25-x$, esta dividida entre aquella debería dar 49, por lo tanto, $\frac{25-x}{x}=49$, multiplicando por x, da $25-x=49x$, y sumando x da, $50x=25$, dividiendo entre 50, queda $x=\frac{1}{2}$.

Respuesta. La parte menor es $\frac{1}{2}$, y la parte mayor es $24\frac{1}{2}$, la cual dividida entre $\frac{1}{2}$, o sea multiplicada por 2, da 49.

33.

XII. Pregunta. Partir 48 en nueve partes, de modo que cada una sea siempre $\frac{1}{2}$ más grande que la anterior.

Sea la primera y a la vez la parte menor $= x$, entonces la segunda es $= x + \frac{1}{2}$, y la tercera $= x + 1$, etc. Ya que ahora estas partes forman una progresión aritmética, de la cual el primer término $= x$, el noveno y último término es $x + 4$, sumándole el primer término x, da $2x + 4$. Multiplicamos esta suma por el número de términos, 9, obtenemos $18x + 36$; esto dividido entre 2, da la suma de todas las nueve partes, $9x + 18$, que tiene que ser 48. Por eso tenemos $9x + 18 = 48$, restando 18, da $9x = 30$, dividiendo entre 9 da $x = 3\frac{1}{3}$.

Respuesta. La primera parte es $3\frac{1}{3}$, y las nueve partes son las siguientes

$$\overset{1}{3\tfrac{1}{3}} + \overset{2}{3\tfrac{5}{6}} + \overset{3}{4\tfrac{1}{3}} + \overset{4}{4\tfrac{5}{6}} + \overset{5}{5\tfrac{1}{3}} + \overset{6}{5\tfrac{5}{6}} + \overset{7}{6\tfrac{1}{3}} + \overset{8}{6\tfrac{5}{6}} + \overset{9}{7\tfrac{1}{3}},$$

cuya suma es = 48.

34.

XIII. Pregunta. Buscar una progresión aritmética cuyo primer término sea = 5 y el último = 10, además la suma = 60.

Aquí no se conoce la diferencia, ni el número de términos, pero la suma de todos se puede encontrar mediante el primer y el último término, si solo se supiera el número de términos. Por eso ponemos el número de términos $= x$, entonces la suma de la progresión será $\frac{15}{2}x = 60$; dividido entre 15 da $\frac{1}{2}x = 4$, multiplicando por 2, da $x = 8$. Dado que el número de términos ahora es 8, ponemos la diferencia $= z$, entonces el segundo término es $5 + z$, el tercero es $5 + 2z$, y el octavo $5 + 7z$, que tiene que ser igual a 10.

Entonces tenemos $5 + 7z = 10$, y restando 5, da $7z = 5$, dividido entre 7, resulta $z = \frac{5}{7}$.

Respuesta. La diferencia de la progresión es $\frac{5}{7}$, y el número de términos es 8, por lo tanto, la progresión misma será:

$$\overset{1}{5}+\overset{2}{5\tfrac{5}{7}}+\overset{3}{6\tfrac{3}{7}}+\overset{4}{7\tfrac{1}{7}}+\overset{5}{7\tfrac{6}{7}}+\overset{6}{8\tfrac{4}{7}}+\overset{7}{9\tfrac{2}{7}}+\overset{8}{10},$$

cuya suma es = 60.

35.

XIV. Pregunta. Busco un número de modo que, si resto 1 de su doble y duplico la diferencia, luego le resto 2, divido la diferencia entre 4, entonces sale 1 menos que el número que estoy buscando.

El número buscado sea x, entonces su doble es $2x$, restando 1 queda $2x-1$, duplicando esto da $4x-2$, restando 2 queda $4x-4$, esto dividido entre 4 da $x-1$, que tiene que ser 1 menos que x:

Entonces $x-1=x-1$, esta es una *ecuación idéntica* e indica que x no está determinada en absoluto, sino que para ella puede tomarse cualquier número arbitrariamente.

36.

XV. Pregunta. Compré varias varas de tela y pagué 7 tál. por cada 5 varas. Volví a venderlas en 11 tál. para 7 varas y gané 100 tál. por toda la mercancía: ¿cuánta tela había?

La cantidad de tela habida sea x varas. Entonces, primero hay que ver cuánto costó la compra, lo que se calcula mediante la siguiente regla de tres: 5 varas cuestan 7 tál., ¿cuánto cuestan x varas? Respuesta: $\frac{7}{5}x$ tál., ese es el dinero que ha gastado. Ahora veamos cuánto volvió a cobrar, esto sucede por medio de esta regla de tres: 7 varas cuestan 11 tál. en la venta, ¿cuánto cuestan las x varas? Respuesta: $\frac{11}{7}x$ tál.

Este es el ingreso, que es 100 tál. mayor que el gasto, de donde surge esta ecuación: $\frac{11}{7}x = \frac{7}{5}x + 100$, restando $\frac{7}{5}x$, queda $\frac{6}{35}x = 100$, multiplicado por 35, sale $6x = 3500$, dividiendo entre 6, resulta $x = 583\frac{1}{3}$.

Respuesta. Había $583\frac{1}{3}$ varas, las que primero se compraron en $816\frac{2}{3}$ tál., luego se volvieron a vender por $916\frac{2}{3}$ tál., ganando por lo tanto 100 tál.

37.

XVI. Pregunta. Alguien compra 12 piezas de tela por 140 tál., 2 de ellas son blancas, 3 son negras y 7 son azules. Una pieza de tela negra cuesta 2 tál. más que una blanca, y una azul 3 tál. más que una negra. La pregunta es, ¿cuánto cuesta cada una?

Suponemos que una pieza blanca cuesta x tál., por lo tanto, las dos piezas blancas cuestan $2x$ tál. Además, una pieza negra cuesta $x+2$, las tres piezas negras $3x+6$ y una pieza azul cuesta $x+5$, las 7 piezas azules $7x+35$, y todas las doce piezas $12x+41$; pero en realidad cuestan 140 tál., así tenemos $12x+41 = 140$, restando 41, obtenemos $12x = 99$, dividiendo entre 12, sale $x = 8\frac{1}{4}$.

Respuesta: una pieza blanca cuesta	$8\frac{1}{4}$	tál.
una pieza negra cuesta	$10\frac{1}{4}$	tál.
una pieza azul cuesta	$13\frac{1}{4}$	tál.

38.

XVII. Pregunta. Alguien ha comprado nueces moscadas y dice que 3 piezas cuestan tanto más que 4 peniques, como 4 piezas cuestan más que 10 peniques. ¿Cuánto costaron?

Digamos que 3 piezas cuestan $x+4$ peniques, entonces 4 piezas costarán $x+10$ peniques. Pero ahora, según la primera frase encontramos cuánto cuestan 4 piezas mediante la regla de tres:

3 piezas : $x+4$ peniques = 4 piezas : ... Respuesta: $\frac{4x+16}{3}$, entonces $\frac{4x+16}{3}=x+10$, o sea $4x+16=3x+30$, restando $3x$, da $x+16=30$, restando 16, da $x=14$.

Respuesta. 3 piezas cuestan 18 peniques y 4 piezas cuestan 24 peniques, por lo que 1 pieza cuesta 6 peniques.

39.

XVIII. Pregunta. Alguien tiene dos vasos de plata y una tapa; el primer vaso pesa 12 onzas [lots], con la tapa puesta pesa el doble que el otro vaso. Pero si se pone la tapa en el otro vaso, pesa tres veces más que el primero. La pregunta aquí es, ¿cuánto pesaban la tapa y también el otro vaso?

Suponemos que la tapa pesa x onzas, entonces el primer vaso con tapa pesa $x+12$ onzas. Como este peso es dos veces mayor que el del otro vaso, el otro pesó $\frac{1}{2}x+6$; si se le pone la tapa, pesa $\frac{3}{2}x+6$, lo cual tiene que ser 3 por 12, o sea 36. Entonces tenemos $\frac{3}{2}x+6=36$, o sea $\frac{3}{2}x=30$, luego $\frac{1}{2}x=10$, por lo tanto $x=20$.

Respuesta. La tapa pesaba 20 onzas, el otro vaso pesaba 16 onzas.

40.

XIX. Pregunta. Un cambista tiene dos tipos de monedas; un tálero vale a monedas del primer tipo, y b monedas del segundo tipo. Ahora viene alguien y quiere c monedas por un tálero. ¿Cuánto tiene que darle el cambista de cada tipo?

Suponemos que le da x monedas del primer tipo y, por tanto, $c-x$ monedas del otro tipo. Pero ahora aquellas x monedas valen $a:1=x:\frac{x}{a}$ tál., y estas $c-x$ monedas valen $b:1=c-x:\frac{c-x}{b}$ tál.

Entonces tiene que ser $\frac{x}{a}+\frac{c-x}{b}=1$, o sea $\frac{bx}{a}+c-x=b$, o sea $bx+ac-ax=ab$, y luego $bx-ax=ab-ac$, por lo tanto tenemos:

$$x=\frac{ab-ac}{b-a} \quad \text{o sea} \quad x=\frac{a(b-c)}{b-a},$$

por eso será

$$c-x=\frac{bc-ab}{b-a}=\frac{b(c-a)}{b-a}.$$

Respuesta. El cambista da $\frac{a(b-c)}{b-a}$ piezas del primer tipo, y $\frac{b(c-a)}{b-a}$ piezas del otro tipo.

Nota: Estos dos números se pueden encontrar fácilmente usando la regla de tres; a saber, para el primero:

$$b-a:b-c=a:\frac{ab-ac}{b-a},$$

y para el segundo:

$$b-a:c-a=b:\frac{bc-ab}{b-a}.$$

Cabe señalar que b es mayor que a y c es menor que b, pero mayor que a, como lo requiera la naturaleza del asunto.

41.

XX. Pregunta. Un cambista tiene dos tipos de monedas; un tálero vale 10 monedas del primer tipo, y 20 monedas del segundo tipo. Ahora alguien pide 17 piezas por un tálero. ¿Cuántas obtiene de cada tipo?

Entonces aquí tenemos $a=10$, $b=20$ y $c=17$; de donde salen estas reglas de tres:

I.) 10 : 3 = 10 : 3, entonces 3 piezas del primer tipo;

II.) 10 : 7 = 20 : 14, y del otro tipo 14 piezas.

42.

XXI. Pregunta. Después de su muerte, un padre deja unos hijos junto con una fortuna que los hijos comparten entre ellos de esta manera:
El primero toma 100 tál. más la 10.ª parte del resto.
El segundo toma 200 tál. más la 10.ª parte del resto.
El tercero toma 300 tál. más la 10.ª parte del resto.
El cuarto toma 400 tál. más la 10.ª parte del resto
y así sucesivamente; se encuentra que de esta forma toda la fortuna se distribuyó equitativamente entre los hijos. La pregunta ahora es: ¿qué tan grande fue la fortuna, cuántos hijos había y cuánto recibió cada uno?

Esta pregunta es de un tipo muy especial y, por lo tanto, merece ser notada. Para resolverla más fácilmente, ponemos la fortuna heredada = z tál. y, debido a que todos los hijos obtienen la misma cantidad, la parte de cada uno = x; de lo cual se puede ver que el número de hijos fue $\frac{z}{x}$. En base a eso planteamos la resolución de la siguiente forma.

La medida o el dinero a repartir	Orden de los hijos	La parte de cada uno	Las diferencias
z	el primero	$x = 100 + \frac{z-100}{10}$	
$z - x$	segundo	$x = 200 + \frac{z-x-200}{10}$	$100 - \frac{x+100}{10} = 0$
$z - 2x$	tercero	$x = 300 + \frac{z-2x-300}{10}$	$100 - \frac{x+100}{10} = 0$
$z - 3x$	cuarto	$x = 400 + \frac{z-3x-400}{10}$	$100 - \frac{x+100}{10} = 0$
$z - 4x$	quinto	$x = 500 + \frac{z-4x-500}{10}$	$100 - \frac{x+100}{10} = 0$
$z - 5x$	sexto	$x = 600 + \frac{z-5x-600}{10}$	etc.

En la última columna se han puesto las diferencias, que surgen cuando se resta cada herencia de la siguiente. Ya que todas las partes de la herencia son iguales entre sí, cada una de estas diferencias tiene que ser $= 0$. Dado que ahora en esta circunstancia afortunada, todas las diferencias son iguales entre sí, es suficiente poner una de ellas igual a 0, por lo que obtenemos la ecuación $100 - \frac{x+100}{10} = 0$. Multiplicando por 10 se obtiene $1000 - x - 100 = 0$, o sea $900 - x = 0$, por lo tanto $x = 900$.

Por lo cual ya sabemos que la herencia de cada hijo fue de 900 tál. Ahora tomamos cualquiera de las ecuaciones de la tercera columna, p. ej. la primera: $900 = 100 + \frac{z-100}{10}$, de la cual se obtiene z inmediatamente; entonces $9000 = 1000 + z - 100$, o sea $9000 = 900 + z$, por lo tanto $z = 8100$, por eso $\frac{z}{x} = 9$.

Respuesta. Entonces, el número de hijos = 9, la fortuna heredada = 8100 tál. de los cuales cada hijo recibe 900 tál.

CAPÍTULO 4

DE LA RESOLUCIÓN DE DOS O MÁS ECUACIONES DE PRIMER GRADO

43.

A menudo sucede que en los cálculos hay que considerar dos o más números desconocidos, representados por las letras *x*, *y*, *z*, etc., y si la pregunta está determinada, surge la misma cantidad de ecuaciones, de las cuales luego se tienen que encontrar los números desconocidos. Pero aquí solo consideramos ecuaciones en las que solo aparece la primera potencia del número desconocido y ninguno se multiplica por el otro. De modo que cada ecuación será de esta forma: $az + by + cx = d$.

44.

Entonces, comencemos con dos ecuaciones, y de ellas determinemos dos números desconocidos, x, y. Para tratar el asunto de una manera general, consideramos estas dos ecuaciones:

$$\text{I.)}\ ax+by=c \quad \text{y} \quad \text{II.)}\ fx+gy=h$$

donde las letras a, b, c y f, g, h toman el lugar de números conocidos. La pregunta ahora es cómo sacar los dos números desconocidos x e y de estas dos ecuaciones.

45.

La manera más natural es determinar el valor de un número desconocido, como p. ej. x, de cada ecuación y luego igualar los dos valores, de lo cual se obtiene una ecuación que solo contiene el número desconocido que puede ser determinado mediante las reglas anteriores. Si se ha encontrado y, entonces solo se tiene que sustituir por el valor encontrado para obtener el valor de x.

46.

Según esta regla, se encuentra $x=\frac{c-by}{a}$ de la primera ecuación, y de la segunda se encuentra $x=\frac{h-gy}{f}$; se igualan estos dos valores, entonces se obtiene esta nueva ecuación: $\frac{c-by}{a}=\frac{h-gy}{f}$. Multiplicado por a, da $c-by=\frac{ah-agy}{f}$, multiplicado por f da $fc-fby=ah-agy$. Sumando agy sale $fc-fby+agy=ah$. Restamos fc, entonces tenemos $-fby+agy=ah-fc$, o sea $(ag-bf)y=ah-fc$, dividiendo entre $ag-bf$ da

$$y=\frac{ah-fc}{ag-bf}.$$

Si se escribe este valor de y en uno de los dos valores encontrados para x, también se obtiene el valor de x.

Tomamos el primero, entonces primero tenemos $-by = \frac{-abh+bcf}{ag-bf}$, de lo cual sale $c - by = c - \frac{abh-bcf}{ag-bf}$, o sea $c - by = \frac{acg-bcf-abh+bcf}{ag-bf} = \frac{acg-abh}{ag-bf}$; dividido entre a da

$$x = \frac{c-by}{a} = \frac{cg-bh}{ag-bf}.$$

47.

I. Pregunta. Para explicar esto con ejemplos, ponemos esta pregunta: se buscan dos números cuya suma sea 15 y cuya diferencia sea 7.

Sea el número mayor $= x$, y el menor $= y$, entonces tenemos:

$$\text{I.)}\ x + y = 15, \qquad \text{y} \qquad \text{II.)}\ x - y = 7.$$

De la primera ecuación se obtiene $x = 15 - y$ y de la segunda se obtiene $x = 7 + y$, de donde surge esta nueva ecuación $15 - y = 7 + y$, aquí se suma y, entonces se tiene $15 = 7 + 2y$, se resta 7, entonces $2y = 8$, dividiendo entre 2 sale $y = 4$ y de esto obtenemos $x = 11$.

Respuesta. El número menor es 4, y el número mayor es 11.

48.

II. Pregunta. La pregunta anterior también puede hacerse de forma general y buscar dos números cuya suma $= a$ y cuya diferencia $= b$.

Sea el número mayor más grande $= x$ y el menor $= y$, entonces tenemos

$$\text{I.)}\ x + y = a, \qquad \text{y} \qquad \text{II.)}\ x - y = b.$$

De la primera ecuación se obtiene $x = a - y$ y de la segunda se obtiene $x = b + y$, de donde surge la ecuación $a - y = b + y$. Sumando y se obtiene $a = b + 2y$, restando b

sale $2y = a - b$, dividiendo entre 2 da $y = \frac{a-b}{2}$ y de esto sale $x = a - \frac{a-b}{2} = \frac{a+b}{2}$.

Respuesta. El número mayor es $x = \frac{a+b}{2}$ y el número menor es $y = \frac{a-b}{2}$; o también, ya que $x = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$ e $y = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b$, resulta el siguiente teorema.

El número mayor es igual a la mitad de la suma *más* la mitad de la diferencia, y el número menor es igual a la mitad de la suma *menos* la mitad de la diferencia.

49.

También se puede resolver esta pregunta de la siguiente manera: dado que las dos ecuaciones son $x + y = a$ y $x - y = b$, entonces las sumamos, obteniendo $2x = a + b$ y $x = \frac{a+b}{2}$.

Luego restamos la segunda de la primera y se obtiene $2y = a - b$ y $y = \frac{a-b}{2}$, como antes.

50.

III. Pregunta. Una mula y un burro cargan cada uno varios puds. [*Unidad rusa de peso: 1 pud es aprox. 16 kg*.] El burro se queja de su carga y le dice a la mula: si me dieras un pud de tu carga, yo tendría el doble que tú; la mula responde: si me dieras un pud de tu carga, yo tendría tres veces más que tú. ¿Cuántos puds tenía cada uno?

Suponemos que la mula tenía x puds, y el burro tenía y puds. Si la mula le da un pud al burro, el burro tiene $y + 1$ pero la mula aún se queda con $x - 1$; ya que ahora el burro tiene el doble que la mula, entonces $y + 1 = 2x - 2$.

Pero si el burro le da un pud a la mula, la mula obtiene $x + 1$ y el burro todavía se queda con $y - 1$. Como aquella carga es tres veces mayor que esta, entonces $x + 1 = 3y - 3$.

Entonces nuestras dos ecuaciones son

$$\text{I.)}\ y+1=2x-2, \qquad \text{II.)}\ x+1=3y-3.$$

De la primera se encuentra $x=\frac{y+3}{2}$ y de la otra $x=3y-4$, de donde surge esta nueva ecuación $\frac{y+3}{2}=3y-4$, que multiplicada por 2 da $y+3=6y-8$, y restando y sale $5y-8=3$, sumando 8 tenemos $5y=11$, e $y=\frac{11}{5}$, o sea, $2\frac{1}{5}$; de esto sale $x=2\frac{3}{5}$.

Respuesta. Por lo tanto, la mula tenía $2\frac{3}{5}$ puds y el burro tenía $2\frac{1}{5}$ puds.

51.

Si se tienen tres números desconocidos y la misma cantidad de ecuaciones, como p. ej.

$$\text{I.)}\ x+y-z=8, \qquad \text{II.)}\ x+z-y=9, \qquad \text{III.)}\ y+z-x=10,$$

entonces también buscamos el valor de x en cada ecuación:

$$\text{I.)}\ x=8+z-y, \qquad \text{II.)}\ x=9+y-z, \qquad \text{III.)}\ x=y+z-10.$$

Ahora, en primer lugar, igualamos el primero con el segúndo, y después también con el tercero, entonces obtenemos estas dos nuevas ecuaciones:

$$\text{I.)}\ 8+z-y=9+y-z, \qquad \text{II.)}\ 8+z-y\ =y+z-10.$$

Ahora, la primera da $2z-2y=1$, y la segunda da $2y=18$, de la cual inmediatamente se obtiene $y=9$; este valor puesto para y en la ecuación anterior, da $2z-18=1$ y $2z=19$, por tanto, $z=9\frac{1}{2}$, de lo cual encontramos $x=8\frac{1}{2}$.

Aquí sucedió que en la última ecuación la letra z desapareció y de ella se pudo determinar y inmediatamente. Pero si también hubiera aparecido z en ella, se habrían tenido dos ecuaciones en z e y, que tendrían que resolverse según la primera regla.

52.

Se han encontrado las siguientes tres ecuaciones,

$$\text{I.)}\ \ 3x+5y-4z=25,$$

$$\text{II.)}\ \ 5x-2y+3z=46,$$

$$\text{III.)}\ \ 3y+5z-x=62.$$

En cada ecuación buscamos el valor de x, entonces tenemos:

$$\text{I.)}\ \ x=\frac{25-5y+4z}{3},$$

$$\text{II.)}\ \ x=\frac{46+2y-3z}{5},$$

$$\text{III.)}\ \ x=3y+5z-62.$$

Ahora, comparamos estos tres valores entre sí; entonces el tercero y el primero dan $3y+5z-62=\frac{25-5y+4z}{3}$, multiplicado por 3 da:

$$25-5y+4z=9y+15z-186,$$

sumando 186 se obtiene $211-5y+4z=9y+15z$, sumando $5y$ tenemos $211+4z=14y+15z$, por lo tanto, I y III nos dan $211=14y+11z$.

El segundo y tercero dan $3y+5z-62=\frac{46+2y-3z}{5}$, o sea

$$46+2y-3z=15y+25z-310,$$

y de esta ecuación se encuentra $356=13y+28z$.

De cada una de estas dos ecuaciones buscamos el valor de y.

I.) $211=14y+11z$, donde se resta $11z$, dejando

$$14y=211-11z \quad \text{o sea} \quad y=\frac{211-11z}{14}$$

II.) $356=13y+28z$, donde se resta $28z$, dejando

$$13y=356-28z \quad \text{o sea} \quad y=\frac{356-28z}{13};$$

igualando estos dos valores obtenemos:

$$\frac{211-11z}{14}=\frac{356-28z}{13},$$

multiplicado por $13\cdot 14$, da $2743-143z=4984-392z$, y sumando $392z$ sale

$$249z+2743=4984,\quad \text{o sea}\quad 249z=2241\quad \text{y}\quad z=9.$$

De esto obtenemos $y=8$ y finalmente $x=7$.

53.

Si ocurren más de tres números desconocidos y la misma cantidad de ecuaciones, se podría resolver el problema de una manera similar, lo que generalmente conduciría a cálculos fastidiosos.

Pero en cualquier caso, se utilizan medios para facilitar enormemente la resolución, y esto se hace introduciendo en el cálculo, aparte de los números desconocidos principales, un nuevo número desconocido arbitrario, como por ejemplo la suma de todas las incógnitas; alguien que ya haya practicado tales cálculos, podrá encontrar fácilmente el medio adecuado en cualquier caso. Por eso exponemos algunos ejemplos de este tipo.

54.

IV. Pregunta. Tres individuos juegan juntos; en el primer juego el primer jugador pierde con cada uno de los otros dos tanto como cada uno de los otros dos tenía de dinero. En el segundo juego, el segundo pierde tanto contra el primero y el tercero como lo que cada uno de ellos tiene. En el tercer juego, el tercero pierde tanto contra el primero y el segundo como lo que cada uno tiene; y después de terminar el juego, resulta que todos tienen la misma cantidad, cada uno tiene 24 flo. [florines]. Ahora la pregunta es, ¿cuánto tenía cada uno inicialmente?

Suponemos que el primero tenía x florines, el segundo y, el tercero z. Consideramos la suma de todos esto florines juntos: $x+y+z=s$. Dado que en el primer juego el primero pierde tanto como los otros dos tienen, y el primero tiene x, los otros dos tienen $s-x$, y eso es lo que pierde el primero, por lo que todavía tiene $2x-s$; pero el segundo tendrá $2y$ y el tercero $2z$.

Entonces, después del primer juego, cada uno tendrá lo que sigue:

$$\text{I.)}\ 2x-s, \quad \text{II.)}\ 2y, \quad \text{III.)}\ 2z.$$

En el segundo juego, el segundo jugador, que ahora tiene $2y$, pierde frente a los otros dos tanto como ellos tienen, es decir, $s-2y$. Por lo tanto, el segundo todavía conserva $4y-s$; pero los otros dos tendrán el doble que antes.

Entonces, después del segundo juego, tendrán:

$$\text{I.)}\ 4x-2s, \quad \text{II.)}\ 4y-s, \quad \text{III.)}\ 4z.$$

En el tercer juego, el tercer jugador, que ahora tiene $4z$, pierde frente a los otros dos tanto como ellos tienen, pero ellos tienen $s-4z$; por lo que el tercero se queda con $8z-s$ y los otros dos obtienen el doble de lo que tenían.

Entonces, después del tercer juego, cada uno tendrá:

$$\text{I.)}\ 8x-4s, \quad \text{II.)}\ 8y-2s, \quad \text{III.)}\ 8z-s;$$

dado que ahora cada uno tiene 24 florines, obtenemos tres ecuaciones que son de tal naturaleza que de la primera se puede encontrar inmediatamente x, de la segunda y, y de la tercera z; especialmente porque s ahora es un número conocido, ya que todos juntos al final del juego tienen 72 florines. Pero esto saldrá por sí mismo, sin tener que fijarse.

Ahora, este cálculo será:

$$\begin{array}{rllll}
\text{I.)} & 8x-4s=24, & \text{o}\quad 8x=24+4s, & \text{o} & x=3+\tfrac{1}{2}s \\
\text{II.)} & 8y-2s=24, & \text{o}\quad 8y=24+2s, & \text{o} & y=3+\tfrac{1}{4}s \\
\text{III.)} & 8z-s=24, & \text{o}\quad 8z=24+s, & \text{o} & z=3+\tfrac{1}{8}s
\end{array}$$

Sumando estos 3 valores se obtiene

$$x+y+z=9+\frac{7}{8}s,$$

ya que $x+y+z=s$, tenemos $s=9+\frac{7}{8}s$; restado $\frac{7}{8}s$, queda $\frac{1}{8}s=9$, y $s=72$.

Respuesta. Al principio del juego, el primero tenía 39 flo., el segundo 21 flo. y el tercero 12 flo.

En esta resolución se puede ver como todas las dificultades mencionadas anteriormente han sido eliminadas afortunadamente con la ayuda de la suma de los tres números desconocidos.

55.

Por difícil que parezca esta pregunta, hay que notar que se puede resolver sin álgebra.

Solo se necesita retroceder en la consideración: entonces, dado que las tres personas obtuvieron la misma cantidad después del tercer juego, es decir, el primer jugador 24, el segundo 24, y el tercero 24; pero en el tercer juego, el primero y el segundo duplicaron su dinero, entonces, antes del tercer juego tienen que haber tenido lo siguiente:

I.) 12, II.) 12, III.) 48.

En el segundo juego, el primero y el tercero duplicaron su dinero, por lo que antes del segundo juego tienen que haber tenido:

I.) 6, II.) 42, III.) 24.

En el primer juego, el segundo y el tercero habían duplicado su dinero, por lo que antes del primer juego tenían:

I.) 39, II.) 21, III.) 12

y para el inicio del juego encontramos las mismas cantidades que antes.

56.

V. Pregunta. Dos personas deben 29 rub. [rublos], y cada uno tiene dinero, pero no tanto como para poder pagar esta deuda común él solo. Por eso el primero le dice al otro: si me das $\frac{2}{3}$ de tu dinero, yo puedo pagar de inmediato la deuda yo solo; el otro responde: si me das $\frac{3}{4}$ de tu dinero, puedo pagar la deuda yo solo. ¿Cuánto dinero tenia cada uno?

Suponemos que el primero tenía x rub., el otro y rub. Entonces obtenemos primero $x+\frac{2}{3}y=29$, luego también $y+\frac{3}{4}x=29$. Del primero se encuentra $x=29-\frac{2}{3}y$, del segundo $x=\frac{116-4y}{3}$.

De estos dos valores surge esta ecuación:

$$29-\frac{2}{3}y=\frac{116-4y}{3}, \text{ entonces } y=14\tfrac{1}{2}; \text{ por tanto } x=19\tfrac{1}{3}.$$

Respuesta. El primero tenía $19\frac{1}{3}$ rub. y el segundo $14\frac{1}{2}$ rub.

57.

VI. Pregunta: Tres personas compraron una casa por 100 tál. El primero desea del segundo $\frac{1}{2}$ de su dinero para poder pagar la casa él solo; el segundo desea del tercero $\frac{1}{3}$ de su dinero, así podría pagar la casa él solo. El tercero desea del primero $\frac{1}{4}$ de su dinero, así le gustaría pagar la casa él solo. ¿Cuánto dinero tenía cada uno?

Suponemos que el primero tenía x, el segundo y, el tercero z tál., entonces se obtienen las siguientes tres ecuaciones

I.) $x+\frac{1}{2}y=100$ II.) $y+\frac{1}{3}z=100$ III.) $z+\frac{1}{4}x=100$

De las cuales se encuentra el valor de x:

I.) $x=100-\frac{1}{2}y,$ III.) $x=400-4z,$

hay que notar que aquí no se pudo determinar x de la segunda ecuación.

Ahora, los dos valores dan esta ecuación:

$100-\frac{1}{2}y=400-4z$ o sea $4z-\frac{1}{2}y=300$

La cual tiene que ser conectada con la segunda para encontrar y y z. Pero ahora la segunda ecuación fue $y+\frac{1}{3}z=100;$ de ella encontramos $y=100-\frac{1}{3}z;$ pero de la ecuación $4z-\frac{1}{2}y=300$ encontrada arriba sabemos que $y=8z-600,$ de donde surge esta última ecuación: $100-\frac{1}{3}z=8z-600,$ por lo tanto $8\frac{1}{3}z=700,$ es decir, $\frac{25}{3}z=700,$ y $z=84$; de esto se encuentra $y=100-28$, o sea $y=72,$ y finalmente $x=64$.

Respuesta. El primero tenía 64 tál., el segundo 72 tál. y el tercero 84 tál.

58.

Dado que en este ejemplo solo hay dos números desconocidos en cada ecuación, la resolución se puede realizar de una manera más cómoda.

De la primera encontramos $y=200-2x,$ que está determinada por x; este valor se escribe en lugar de y en la segunda ecuación, por lo que tenemos $200-2x+\frac{1}{3}z=100,$ restando 100 queda $100-2x+\frac{1}{3}z=0,$ o sea $\frac{1}{3}z=2x-100,$ luego $z=6x-300.$

Entonces, z también está determinada por x; si ahora ponemos este valor en la tercera ecuación, obtenemos $6x-300+\frac{1}{4}x=100$, en la que solamente ocurre x, luego

$$25x-1600=0$$

por lo tanto, $x=64$, en consecuencia $y=200-128=72$ y $z=384-300=84$.

59.

También se puede proceder de la misma manera cuando ocurren más ecuaciones de este tipo, es decir, si se tiene de manera general:

$$\text{I.)}\ u+\frac{x}{a}=n, \qquad \text{II.)}\ x+\frac{y}{b}=n, \qquad \text{III.)}\ y+\frac{z}{c}=n,$$
$$\text{IV.)}\ z+\frac{u}{d}=n,$$

o después de haber eliminado las fracciones, estas:

$$\text{I.)}\ au+x=an, \qquad \text{II.)}\ bx+y=bn, \qquad \text{III.)}\ cy+z=cn,$$
$$\text{IV.)}\ dz+u=dn.$$

Aquí obtenemos de la primera $x=an-au$, cuyo valor sustituido en la segunda da $abn-abu+\mathrm{y}=bn$, por lo tanto, $\mathrm{y}=bn-abn+abu$; este valor puesto en la tercera da

$$bcn-abcn+abcu+z=cn, \text{ entonces}$$

$$z=cn-bcn+abcn-abcu;$$

finalmente, esto sustituido en la cuarta ecuación da

$$cdn-bcdn+abcdn-abcdu+u=dn.$$

Así será

$$dn-cdn+bcdn-abcdn=-abcdu+u \qquad \text{o sea}$$

$$(abcd-1)u=abcdn-bcdn+cdn-dn$$

de lo que se obtiene

$$u=\frac{abcdn-bcdn+cdn-dn}{abcd-1}=n\frac{(abcd-bcd+cd-d)}{abcd-1}$$

De esto, se encuentra además lo siguiente

$$x=\frac{abcdn-acdn+adn-an}{abcd-1}=n\cdot\frac{(abcd-acd+ad-a)}{abcd-1}$$

$$y=\frac{abcdn-abdn+abn-bn}{abcd-1}=n\cdot\frac{(abcd-abd+ab-b)}{abcd-1}$$

$$z=\frac{abcdn-abcn+bcn-cn}{abcd-1}=n\cdot\frac{(abcd-abc+bc-c)}{abcd-1}$$

$$u=\frac{abcdn-bcdn+cdn-dn}{abcd-1}=n\cdot\frac{(abcd-bcd+cd-d)}{abcd-1}$$

60.

VII. Pregunta. Un capitán tiene tres compañías de soldados. En una están suizos, en la segunda suabos, en la tercera sajones; con estos quiere tomar una ciudad por asalto y promete repartir la recompensa de 901 tál. de la siguiente manera.

Cada soldado de la compañía que realice el asalto obtendrá 1 tál., pero el resto del dinero se distribuirá equitativamente entre las otras dos compañías.

Ahora se da que si los suizos hicieran el asalto, cada uno de los soldados de las otras dos compañías recibiría $\frac{1}{2}$ tál.; pero si los suabos hicieran el asalto, cada uno de los soldados de las otras dos compañías recibiría $\frac{1}{3}$ tál. Pero si los sajones hicieran el asalto, entonces cada uno de los soldados de las otras dos compañías recibiría $\frac{1}{4}$ tál. La pregunta ahora es, ¿cuántas personas tenía cada compañía?

Ahora suponemos que el número de suizos fue x cabezas, el de los suabos y, el de los sajones z. Además, ponemos el número de todos $x+y+z=s$, porque es fácil ver de antemano que esto facilita mucho el cálculo. Luego, si los suizos hacen el asalto, el número de los cuales $=x$, entonces el número de los otros dos es $=s-x$. Ya que aquellos reciben 1 tál., pero estos reciben un medio tál., entonces tenemos: $x+\frac{1}{2}s-\frac{1}{2}x=901$. De la misma manera, si los suabos realizan el asalto, entonces $y+\frac{1}{3}s-\frac{1}{3}y=901$, y finalmente si los sajones realizan el asalto, será $z+\frac{1}{4}s-\frac{1}{4}z=901$. A partir de estas tres ecuaciones se puede determinar cada una de las tres letras *x*, *y*, *z*.

Ahora, de la primera se obtiene $x = 1802 - s$, de la segunda $2y = 2703 - s$, de la tercera $3z = 3604 - s$.

Escribimos estos resultados uno debajo del otro; pero primero buscamos los valores de $6x$, $6y$ y $6z$.

$$\begin{aligned} 6x &= 10812 - 6s \\ 6y &= 8109 - 3s \\ 6z &= 7208 - 2s \end{aligned}$$

suma: $6s = 26129 - 11s$ o sea $17s = 26129$

de donde se encuentra $s = 1537$, que es el número de todos los hombres y de esto también se encuentra:

$$\begin{aligned} x &= 1802 - 1537 = 265 \\ 2y &= 2703 - 1537 = 1166 \quad \text{y} \quad y = 583 \\ 3z &= 3604 - 1537 = 2067 \quad \text{y} \quad z = 689 \end{aligned}$$

Respuesta. La compañía de los suizos estaba formada por 265 hombres, la de los suabos por 583 y la de los sajones por 689.

CAPÍTULO 5

DE LA RESOLUCIÓN DE LAS ECUACIONES CUADRÁTICAS PURAS

61.

Una ecuación se llama *cuadrática* [de segundo grado] si contiene el cuadrado, o sea la segunda potencia, del número desconocido, siempre y cuando no contenga ninguna potencia superior. Porque si se da que la tercera potencia también aparece en ella, entonces dicha ecuación ya se considera cúbica, cuya resolución requiere reglas especiales.

62.

Por lo tanto, en una ecuación cuadrática solo hay tres tipos de términos.

En primer lugar, aquellos términos en los que el número desconocido no está contenido en absoluto, es decir, que se componen solamente de números conocidos.

En segundo lugar, aquellos términos en los que solo ocurre la primera potencia del número desconocido.

Y tercero, aquellos que contienen el cuadrado del número desconocido.

Entonces, si x indica el número desconocido, pero las letras a, b, c, d, etc. representan números conocidos, los términos del primer tipo tienen esta forma a, los términos del segundo tipo tienen la forma bx y los términos del tercer tipo tiene la forma cxx.

63.

Ya se ha visto bastante bien que dos o más términos de un tipo pueden resumirse en uno, o verse como un solo término.

Entonces, esta forma $axx - bxx + cxx$ puede verse como un solo término y, por lo tanto, representarse como

$(a-b+c)xx$, porque $a-b+c$ en realidad expresa un número conocido.

Para el caso en que tales términos estén en ambos lados del signo $=$, ya hemos visto cómo se pueden llevar a un lado y ser resumidos en un solo término.

Por ejemplo, dada esta ecuación

$$2xx-3x+4=5xx-8x+11,$$

entonces primero se resta $2xx$, da $-3x+4=3xx-8x+11$; después sumamos $8x$, obtenemos $5x+4=3xx+11$, y restando 11 sale $3xx=5x-7$.

64.

También se pueden llevar todos los términos a un lado del signo $=$, de modo que 0 esté en el otro lado; en eso hay que tener en cuenta que si los términos se mueven de un lado a otro, sus signos tienen que ser cambiados.

Entonces, la ecuación anterior obtendrá esta forma $3xx-5x+7=0$, y por lo tanto, en general, cualquier ecuación cuadrática se puede representar mediante esta forma

$$axx\pm bx\pm c=0,$$

donde el signo $\pm$ se pronuncia *más o menos* para indicar que tales términos a veces pueden ser positivos y a veces negativos.

65.

Una ecuación cuadrática puede parecer inicialmente como quiera, pero siempre puede llevarse a esta forma que consta de sólo tres miembros; si p. ej. se hubiera llegado a esta ecuación $\frac{ax+b}{cx+d}=\frac{ex+f}{gx+h}$, entonces ante todo habrá que eliminar las fracciones. Por lo tanto, multiplicamos por

$cx+d$ y obtenemos $ax+b=\frac{cexx+cfx+edx+fd}{gx+h}$, aquí multiplicado por $gx+h$, da

$$agxx+bgx+ahx+bh=cexx+cfx+edx+fd$$

que es una ecuación cuadrática, y se puede reducir a los siguientes tres términos, si todos se colocan en un lado, y los cuales se acostumbran escribir uno debajo del otro:

$$\begin{array}{rlrlrl} 0 = & agxx & + & bgx & + & bh \\ - & cexx & + & ahx & - & fd \\ & & - & cfx & & \\ & & - & edx & & \end{array}$$

o para presentarlo aún más claro

$$0=(ag-ce)xx+(bg+ah-cf-ed)x+bh-fd.$$

66.

Las ecuaciones cuadráticas que contienen términos de todos los tres tipos se denominan *completas*, y la resolución de ellas también está sujeta a más dificultades; por lo tanto, primero consideramos las ecuaciones en las que falta uno de estos tres términos. Ahora, si el término xx no está presente, la ecuación ni siquiera sería cuadrática y pertenecería al tipo anterior; pero si falta el término que solo contiene números conocidos, la ecuación se vería como $axx \pm bx = 0$, donde se puede dividir entre x, obteniendo esta ecuación $ax \pm b = 0$, que nuevamente es una ecuación simple y no pertenece al tema que se está tratando.

67.

Pero si falta el término medio, que contiene solo la primera potencia de x, la ecuación toma esta forma: $axx \pm c = 0$, o $axx = c$, ahora c puede tener el signo $+$ o $-$.

Tal ecuación se llama cuadrática *pura*, porque su resolución no está sujeta a ninguna dificultad. Entonces solo se necesita dividir entre *a*, obteniendo $xx = \frac{c}{a}$; y tomando la raíz cuadrada en ambos lados, tenemos $x = \sqrt{\frac{c}{a}}$; con lo cual se ha resuelto la ecuación.

68.

Ahora hay tres casos a considerar. El primero, si $\frac{c}{a}$ es un número cuadrado, cuya raíz realmente se puede mostrar; entonces se obtiene el valor de x expresado por un número racional, ya sea entero o fraccionario.

Así, de esta ecuación $xx = 144$ se obtiene $x = 12$, y de esta $xx = \frac{9}{16}$ se obtiene $x = \frac{3}{4}$.

El segundo caso es cuando $\frac{c}{a}$ no es un número cuadrado, entonces uno tiene que conformarse con el signo de raíz $\sqrt{}$.

Así, dado $xx = 12$, obtenemos $x = \sqrt{12}$, cuyo valor se puede determinar por aproximación, como ya hemos mostrado anteriormente.

Pero en tercer lugar, si $\frac{c}{a}$ es incluso un número negativo, el valor de x se vuelve completamente imposible o imaginario e indica que la pregunta que conduce a tal ecuación es en sí misma imposible.

69.

Antes de continuar, cabe señalar que cada vez que se tenga que sacar la raíz cuadrada de un número, la raíz siempre tiene un valor doble y que puede ser tomado tanto positivo como negativo, como ya se ha mostrado anteriormente.

Así, cuando se llega a esta ecuación $xx = 49$, el valor de x no solo es $+7$, sino también -7 y, por lo tanto, generalmente se indica: $x = \pm 7$, de lo cual está claro que todas estas preguntas permiten una doble resolución, pero en muchos casos, por ejemplo cuando se pregunta por un número de personas, el valor negativo es descartado automáticamente.

70.

Incluso en el caso anterior, donde falta el simple número, las ecuaciones $axx = bx$ siempre permiten dos valores diferentes para x, aunque solo se encuentre uno al dividir entre x. Porque, dada p. ej. esta ecuación $xx = 3x$, donde se debe encontrar tal valor para x que xx se vuelve igual a $3x$, entonces esto se cumple poniendo $x = 3$, valor que resulta dividiendo entre x; no obstante, aparte de este valor, también $x = 0$ satisface la ecuación; porque entonces tenemos $xx = 0$ y $3x = 0$. Esto debe notarse con todas las ecuaciones cuadráticas, que siempre hay dos soluciones, mientras que con las ecuaciones simples nunca hay más de una.

Ahora explicamos estas ecuaciones cuadráticas puras mediante algunos ejemplos.

71.

I. Pregunta. Se busca un número cuya mitad multiplicada por su $\frac{1}{3}$ de 24.

Sea este número $= x$, entonces $\frac{1}{2}x$ multiplicado por $\frac{1}{3}x$ tiene que ser 24, de donde surge esta ecuación $\frac{1}{6}xx = 24$.

Multiplicado por 6, da $xx = 144$, y la raíz cuadrada extraída es $x = \pm 12$. Luego, si $x = +12$, entonces $\frac{1}{2}x = 6$ y $\frac{1}{3}x = 4$, de los cuales el producto es 24. Asimismo, si $x = -12$, entonces $\frac{1}{2}x = -6$ y $\frac{1}{3}x = -4$, de los cuales el producto también es 24.

72.

II. Pregunta. Se busca un número tal que, si primero se le suma 5 y luego también se le resta 5, y la suma se multiplica por el resto, sale 96.

Si este número es x, entonces $x+5$ multiplicado por $x-5$ tiene que dar 96, de lo cual surge esta ecuación $xx-25=96$.

Se suma 25, entonces será $xx=121$, y sacando la raíz cuadrada se tiene $x=11$, entonces serán $x+5=16$ y $x-5=6$. Pero ahora $6\cdot 16=96$.

73.

III. Pregunta. Buscamos un número tal que, si primero lo sumamos a 10, luego lo restamos de 10, aquella suma multiplicada por este resto dé 51.

Si el número es x, entonces $10+x$ multiplicado por $10-x$ tiene que dar 51, de lo cual surge esta ecuación $100-xx=51$.

Se suma xx y se resta 51, entonces sale $xx=49$, de lo cual la raíz cuadrada indica que $x=7$.

74.

IV. Pregunta. Tres hombres tienen dinero, las veces que el primero tenga 7 tál., el segundo tiene 3 tál., y las veces que el segundo tenga 17 tál., el tercero tiene 5 tál. Pero si multiplico el dinero del primero por el dinero del segundo, y el dinero del segundo por el dinero del tercero, y finalmente también el dinero del tercero por el dinero del primero, y luego sumo estos tres productos, entonces el total será $3830\frac{2}{3}$. ¿Cuánto dinero tenía cada uno?

Suponemos que el primero haya tenido x tál. Y como se dice que las veces que el primero tenga 7 tál., el segundo tiene 3 tál., entonces esto significa que el dinero del primero está relacionado con el dinero del segundo como $7:3$. Entonces planteamos $7:3=x$ al dinero del segundo, que será $\frac{3}{7}x$. Además, dado que el dinero del segundo está relacionado con el dinero del tercero, como $17:5$, entonces planteamos $17:5=\frac{3}{7}x$ al dinero del tercero, que será $\frac{15}{119}x$. Ahora multiplicamos el dinero del primero x por el dinero del segundo $\frac{3}{7}x$, entonces el producto es $=\frac{3}{7}xx$.

Además, el dinero del segundo $\frac{3}{7}x$, multiplicado por el dinero del tercero $\frac{15}{119}x$, da $\frac{45}{833}xx$.

Y finalmente, el dinero del tercero $\frac{15}{119}x$, multiplicado por el dinero del primero x, da $\frac{15}{119}xx$. Estos tres productos juntos dan

$$\frac{3}{7}xx+\frac{45}{833}xx+\frac{15}{119}xx,$$

lo cual, llevado a un común denominador, da $\frac{507}{833}xx$, que tiene que ser igualado al número $3830\frac{2}{3}$.

Entonces tenemos $\frac{507}{833}xx=3830\frac{2}{3}$, multiplicado por 3 se obtiene $\frac{1521}{833}xx=11492$, luego multiplicado por 833 da $1521xx=9572836$, y dividido entre 1521 resulta $xx=\frac{9572836}{1521}$, sacando la raíz cuadrada da $x=\frac{3094}{39}$, esta fracción se puede reducir dividiendo entre 13 y sale $x=\frac{238}{3}$, o sea $x=79\frac{1}{3}$; por lo tanto, también obtenemos $\frac{3}{7}x=34$ y $\frac{15}{119}x=10$.

Respuesta. Entonces, el primero ha tenido $79\frac{1}{3}$ tál., el segundo 34 tál. y el tercero 10 tál.

Nota: este cálculo es aún más fácil de hacer, si los números que aparecen en él se descomponen en factores, fijándose especialmente en sus cuadrados.

Entonces $507 = 3 \cdot 169$, donde 169 es el cuadrado de 13; después $833 = 7 \cdot 119$ y $119 = 7 \cdot 17$; ya que ahora tenemos $\frac{3 \cdot 169}{17 \cdot 49} xx = 3830\frac{2}{3}$, entonces multiplicamos por 3, obteniendo $\frac{9 \cdot 169}{17 \cdot 49} xx = 11492$. Este número también se desglosa en sus factores, de los cuales el primero, el 4, salta a la vista inmediatamente, de modo que $11492 = 4 \cdot 2873$; además, 2873 se puede dividir entre 17 y se convierte en $2873 = 17 \cdot 169$, por lo que nuestra ecuación se ve así:

$$\frac{9 \cdot 169}{17 \cdot 49} xx = 4 \cdot 17 \cdot 169,$$

la cual dividida entre 169, será $\frac{9}{17 \cdot 49} xx = 4 \cdot 17$, además, multiplicada por $17 \cdot 49$ y dividida entre 9, da $xx = \frac{4 \cdot 289 \cdot 49}{9}$, donde todos los factores son cuadrados, y por lo tanto, la raíz será: $x = \frac{2 \cdot 17 \cdot 7}{3} = \frac{238}{3}$, como arriba.

75.

V. Pregunta. Algunos comerciantes designan un representante y lo envían a la ciudad de Arcángel para realizar un negocio. Cada uno ha puesto diez veces más táleros que el número de personas. El representante, por cada 100 tál. de la inversión, gana tantos táleros como el doble número de personas. Si se multiplica la $\frac{1}{100}$ parte del beneficio total por $2\frac{2}{9}$, se obtiene el número de socios. ¿Cuántos socios había?

Sea el número de estos $= x$. Ya que cada uno invirtió $10x$ tál., el capital total fue $= 10xx$ tál. Ahora el representante por cada 100 tál. de la inversión recibe $2x$ tál., en consecuencia, gana $\frac{1}{5}x^3$ con el capital completo $10xx$. Por lo tanto, la $\frac{1}{100}$ parte de esta ganancia es $\frac{1}{500}x^3$, que multiplicada por $2\frac{2}{9}$, es decir, por $\frac{20}{9}$, da $\frac{20}{4500}x^3$, o sea $\frac{1}{225}x^3$, que tiene que ser igual al número de socios x.

Entonces se tiene esta ecuación $\frac{1}{225}x^3 = x$, o sea $x^3 = 225x$, que parece ser cúbica, pero debido a que se puede dividir entre x, resulta esta ecuación cuadrática: $xx = 225$, luego $x = 15$.

Respuesta. Por lo tanto, había 15 socios en total y cada uno ha invertido 150 tál.

CAPÍTULO 6

DE LA RESOLUCIÓN DE LAS ECUACIONES CUADRÁTICAS MIXTAS

76.

Una ecuación cuadrática es llamada *mixta* si aparecen tres tipos de términos en ella, es decir, términos que contienen el cuadrado del número desconocido, como axx, luego también aquellos en los que aparece el número desconocido en sí mismo, como bx, y finalmente aquellos términos que solo están compuestos de números conocidos. Dado que dos o más términos de un tipo se resumen en uno, y todos pueden llevarse a un lado del signo =, la forma de esta ecuación será así:

$$axx \pm bx \pm c = 0.$$

En este capítulo se mostrará cómo se ha de encontrar el valor de x en tales ecuaciones; dos caminos conducen a esta meta.

77.

Una ecuación de este tipo se puede arreglar por división de modo que el primer término solo contenga el cuadrado puro del número desconocido xx; luego se deja el segundo término en el mismo lado donde está escrito xx, pero llevamos el término conocido al otro lado. De esta manera, nuestra ecuación tomará la forma $xx \pm px = \pm q$, donde p y q indican números conocidos, tanto positivos como negativos; y ahora todo depende de cómo encontrar el verdadero valor de x. Aquí debe tenerse en cuenta primero que si $xx + px$ fuera un cuadrado verdadero, la resolución no tendría ninguna dificultad, porque solo habría que sacar la raíz cuadrada en ambos lados.

78.

Pero está claro que $xx + px$ no puede ser un cuadrado, porque vimos anteriormente que cuando la raíz consta de dos términos, p. ej. $x + n$, su cuadrado contendría tres términos, es decir, además del cuadrado de cada parte, el producto doble de ambas partes, de modo que el cuadrado de $x + n$ será $xx + 2nx + nn$. Como ya tenemos $xx + px$ en un lado, podemos considerar xx como el cuadrado de la primera parte de la raíz, y aquí px tiene que ser el doble del producto de la primera parte de la raíz x con la otra parte; por lo tanto, la otra parte tiene que ser $\frac{1}{2}p$, entonces, de hecho, el cuadrado de $x + \frac{1}{2}p$ resulta ser $xx + px + \frac{1}{4}pp$.

79.

Como ahora $xx + px + \frac{1}{4}pp$ es un cuadrado verdadero, cuya raíz es $x + \frac{1}{2}p$, a nuestra ecuación $xx + px = q$ solo necesitamos sumar $\frac{1}{4}pp$ en ambos lados, y obtenemos $xx + px + \frac{1}{4}pp = q + \frac{1}{4}pp$, donde hay un cuadrado verdadero en el primer lado, pero solo números conocidos en el otro. Entonces, si sacamos la raíz cuadrada en ambos lados, obtenemos $x+\frac{1}{2}p=\sqrt{\frac{1}{4}pp+q}$; si ahora se resta $\frac{1}{2}p$, se obtiene $x=-\frac{1}{2}p+\sqrt{\frac{1}{4}pp+q}$; y ya que cada raíz cuadrada puede tomarse tanto positiva como negativa, entonces hay dos valores para *x*, que generalmente se expresan de esta forma:

$$x=-\frac{1}{2}p\pm\sqrt{\frac{1}{4}pp+q}.$$

80.

Esta fórmula contiene ahora la regla según la cual se pueden resolver todas las ecuaciones cuadráticas, y para que no siempre haya que repetir la operación anterior, es suficiente que el contenido de esta fórmula quede bien grabado en la memoria. La ecuación se puede poner de tal manera que el puro cuadrado *xx* esté en un lado, por lo que la ecuación anterior tendrá esta forma:

$$xx=-px+q$$

de la cual el valor de *x* se puede escribir inmediatamente de la siguiente manera:

$$x=-\frac{1}{2}p\pm\sqrt{\frac{1}{4}pp+q}.$$

81.

De eso se concluye ahora esta regla general para resolver la ecuación

$$xx=-px+q.$$

Se puede ver que el número desconocido *x* será igual a la mitad del número por el que se multiplica *x* en el otro lado, y además de eso, $+$ o $-$ la raíz cuadrada del cuadrado del número recién escrito, más el puro número, que es el tercer término de la ecuación.

Por lo tanto, si se da esta ecuación $xx = 6x + 7$, entonces se tendría inmediatamente $x = 3 \pm \sqrt{9+7} = 3 \pm 4$; en consecuencia, los dos valores de x son

I.) $x = 7$ y II.) $x = -1$.

Si se tuviera esta ecuación $xx = 10x - 9$, entonces $x = 5 \pm \sqrt{25-9}$, que es $= 5 \pm 4$; por lo tanto, los dos valores serán $x = 9$ y $x = 1$.

82.

Para mayor explicación de esta regla, se pueden distinguir los siguientes casos, I.) si p es un número par, II.) si p es un número impar, y III.) si p es un número fraccionario.

I.) Sea p un número par y sea la ecuación de la forma: $xx = 2px + q$, entonces obtenemos $x = p \pm \sqrt{pp+q}$.

II.) Sea p un número impar y sea la ecuación $xx = px + q$, entonces será

$$x = \tfrac{1}{2}p \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}pp + q},$$

ahora, ya que $\frac{1}{4}pp + q = \frac{pp+4q}{4}$, y que del denominador 4 se puede sacar la raíz cuadrada, entonces se obtiene

$$x = \tfrac{1}{2}p \pm \frac{\sqrt{pp+4q}}{2}, \quad \text{o sea} \quad x = \frac{p \pm \sqrt{pp+4q}}{2}$$

III.) Pero si p es una fracción, la resolución puede ser realizada de la siguiente forma. Sea la ecuación cuadrática

$$axx = bx + c, \qquad \text{o} \qquad xx = \frac{bx}{a} + \frac{c}{a},$$

entonces, según la regla será

$$x = \frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{bb}{4aa} + \frac{c}{a}}.$$

Ahora, dado que $\frac{bb}{4aa}+\frac{c}{a}=\frac{bb+4ac}{4aa}$, y aquí el denominador es un cuadrado, entonces

$$x=\frac{b\pm\sqrt{bb+4ac}}{2a}.$$

83.

El otro camino, que también conduce a esta solución, consiste en convertir tal ecuación cuadrática mixta

$$xx=px+q$$

en una pura, lo que se realiza introduciendo en el cálculo, en lugar del número desconocido x, otro número desconocido y, es decir, que

$$x=y+\frac{1}{2}p;$$

porque si se ha encontrado y, se obtiene inmediatamente el valor de x.

Si se escribe $y+\frac{1}{2}p$ en lugar de x, entonces

$$xx=yy+py+\frac{1}{4}pp \quad \text{y} \quad px=py+\frac{1}{2}pp,$$

por eso nuestra ecuación se convierte en:

$$yy+py+\frac{1}{4}pp=py+\frac{1}{2}pp+q;$$

si primero se resta py, entonces se tiene

$$yy+\frac{1}{4}pp=\frac{1}{2}pp+q,$$

restando además $\frac{1}{4}pp$, da $yy=\frac{1}{4}pp+q$, que es una ecuación cuadrática pura, de la cual se obtiene inmediatamente $y=\pm\sqrt{\frac{1}{4}pp+q}$.

Dado que $x=y+\frac{1}{2}p$, entonces $x=\frac{1}{2}p\pm\sqrt{\frac{1}{4}pp+q}$, como ya hemos encontrado anteriormente. Así que no queda nada más que explicar esta regla con ejemplos.

84.

I. Pregunta. Tengo dos números; uno es 6 más grande que el otro y su producto es 91. ¿Cuáles son estos números?

Sea x el número más pequeño, entonces el más grande es $x+6$ y su producto

$$xx+6x=91.$$

Se resta 6x, entonces se tiene $xx=-6x+91$, y según la regla

$$x=-3\pm\sqrt{9+91}=-3\pm 10,$$

por lo tanto, se tiene $x=7$ o $x=-13$.

Respuesta. La pregunta tiene dos soluciones: según la primera, el número menor es $x=7$, el mayor $x+6=13$. Pero según la otra, el número menor es $x=-13$ y el mayor es $x+6=-7$.

85.

II. Pregunta. Busco un número tal que, si resto 9 de su cuadrado, la diferencia es tanto más que 100, como mi número es menor que 23. ¿Qué número es?

Sea el número x, entonces $xx-9$ excede a 100 en $xx-109$. Pero el número buscado x está debajo de 23 con diferencia de $23-x$, de lo cual surge esta ecuación

$$xx-109=23-x.$$

Sumando 109 se obtiene $xx=-x+132$, entonces según la regla

$$x=-\tfrac{1}{2}\pm\sqrt{\tfrac{1}{4}+132}=-\tfrac{1}{2}\pm\sqrt{\tfrac{529}{4}}=-\tfrac{1}{2}\pm\tfrac{23}{2}.$$

Por lo tanto, o es $x=11$, o $x=-12$.

Respuesta. Si solo se pide una respuesta positiva, entonces el número buscado es 11, cuyo cuadrado menos 9 da 112, que es 12 más que 100, y el número encontrado es 12 menor que 23.

86.

III. Pregunta. Busco un número tal que si multiplico su mitad por su tercio, y sumo $\frac{1}{2}$ del número buscado, salga 30.

Sea este número x, cuya mitad multiplicada por su tercera parte da $\frac{1}{6}xx$; entonces debe ser $\frac{1}{6}xx+\frac{1}{2}x=30$; multiplicado por 6, sale $xx+3x=180$, o $xx=-3x+180$, de lo cual se obtiene

$$x=-\frac{3}{2}\pm\sqrt{\frac{9}{4}+180}=-\frac{3}{2}\pm\frac{27}{2}.$$

Por lo tanto, o $x=12$, o $x=-15$.

87.

IV. Pregunta. Busco dos números, donde uno es el doble del otro, tal que si se agrega su suma a su producto, resulte 90.

Sea el número x, entonces el mayor es $2x$, su producto es $2xx$, y sumándole la suma $3x$ da 90. Entonces $2xx+3x=90$, y restando $3x$ da

$$2xx=-3x+90,$$

dividido entre 2, sale $xx=-\frac{3}{2}x+45$; de lo cual se encuentra según la regla

$$x=-\frac{3}{4}\pm\sqrt{\frac{9}{16}+45}=-\frac{3}{4}\pm\frac{27}{4}.$$

Por lo tanto, o $x=6$, o $x=-7\frac{1}{2}$.

88.

V. Pregunta. Alguien compra un caballo por varios táleros, lo vende de nuevo en 119 tál. y por cada 100 gana tantos táleros como lo que el caballo costó. La pregunta es, ¿en cuánto se compró el mismo?

Suponemos que el caballo costó x tál.; ya que ahora ganó el x por ciento sobre el costo, planteamos: con 100 se ganan x, ¿cuánto se ganan con x? Respuesta $\frac{xx}{100}$. Ahora, como ganó $\frac{xx}{100}$ y la compra fue x, tiene que haberlo vendido por $x+\frac{xx}{100}$. Por lo tanto, $x+\frac{xx}{100}=119$.

Réstese x, sale $\frac{xx}{100}=-x+119$, y se multiplica por 100, obteniendo $xx=-100x+11900$, de lo cual se encuentra mediante la regla:

$$x=-50\pm\sqrt{2500+11900}=-50\pm\sqrt{14400}=-50\pm 120.$$

Respuesta. El caballo costó 70 tál., debido a que ahora ganó el 70 por ciento, la ganancia fue de 49 tál., así que tiene que haberlo vendido en $70+49$, es decir, en 119 tál., cómo sucedió realmente.

89.

VI. Pregunta. Alguien compra una determinada cantidad de piezas de tela: la primera por 2 tál., la segunda por 4 tál., la tercera por 6 tál. y siempre 2 tál. más por la siguiente, y por todas las piezas de tela paga 110 tál. ¿Cuántas piezas de tela fueron?

Suponemos que fueron x piezas de tela, y la siguiente tabla muestra cuánto pagó por cada una:

para la	1.ª	2.ª	3.ª	4.ª	5.ª	…	x.ª
paga	2,	4,	6,	8,	10,	…	$2x$ tál.

Por lo tanto, hay que sumar esta progresión aritmética $2+4+6+8+10+\cdots 2x$ que consta de x términos para encontrar el precio de todas las piezas de tela juntas.

De acuerdo con la regla dada anteriormente, se suman el primer término y el último, se obtiene $2x+2$. Esto se multiplica por el número de términos x, entonces se obtiene el doble de la suma $2xx+2x$. Por eso, la suma misma será $xx+x$, que tiene que ser igual a 110, o sea $xx+x=110$.

Restamos x, entonces $xx=-x+110$, por lo tanto,

$$x=-\tfrac{1}{2}+\sqrt{\tfrac{1}{4}+110} \quad \text{o sea} \quad =-\tfrac{1}{2}+\sqrt{\tfrac{441}{4}}$$

o sea $$x=-\tfrac{1}{2}+\tfrac{21}{2}=10.$$

Respuesta. Se han comprado 10 piezas de tela.

90.

VII. Pregunta. Alguien compra varias piezas de tela por 180 tál. Si por el mismo dinero hubiera obtenido 3 piezas de tal más, cada pieza habría salido en 3 tál. más barata. ¿Cuántas piezas de tela había?

Suponemos que hayan sido x piezas de tela, por lo que una pieza realmente costó $\frac{180}{x}$ tál. Pero si hubiera obtenido $x+3$ piezas por 180 tál., cada pieza habría costado $\frac{180}{x+3}$ tál., un precio que está 3 tál. por debajo del precio real, de lo cual surge esta ecuación: $\frac{180}{x+3}=\frac{180}{x}-3$.

Multiplicando por x, se obtiene $\frac{180x}{x+3}=180-3x$, dividido entre 3, da $\frac{60x}{x+3}=60-x$, multiplicado por $x+3$, se obtiene $60x=180+57x-xx$, se suma xx, entonces sale $xx+60x=180+57x$. Se resta $60x$, entonces se obtiene $xx=-3x+180$. De esto, de acuerdo con la regla:

$$x=-\tfrac{3}{2}+\sqrt{\tfrac{9}{4}+180}, \quad \text{o sea} \quad x=-\tfrac{3}{2}+\tfrac{27}{2}=12.$$

Respuesta. Entonces, se han comprado 12 piezas de tela por 180 tál., por lo tanto, una costó 15 tál. Pero si se hubieran obtenido 3 más, es decir, 15 por 180 tál., entonces 1 pieza habría costado 12 tál., en consecuencia 3 tál. menos que de hecho.

91.

VIII. Pregunta. Dos comerciantes forman una sociedad, su inversión conjunta es de 100 tál.; el primero deja su dinero durante 3 meses, y el otro durante 2 meses, y cada uno saca 99 tál. con capital y ganancias. ¿Cuánto invirtió cada uno?

Suponemos que el primero ha invertido x tál., y así el otro invirtió $100-x$; ya que el primero retira 99 tál., su ganancia es $99-x$, que ha sido adquirida en 3 meses con el capital x; ya que el otro también retira 99 tál., su ganancia es $x-1$, que fue adquirida en dos meses con el capital $100-x$; con este mismo capital $100-x$ se ganaría entonces en tres meses $\frac{3x-3}{2}$. Ahora estas ganancias son proporcionales al capital, es decir, aquel capital es a aquella ganancia como este capital es a esta ganancia; entonces

$$x:99-x=100-x:\frac{3x-3}{2}.$$

Igualando el producto de los términos en los extremos con el producto de los términos de en medio, se tiene $\frac{3xx-3x}{2}=9900-199x+xx,$ y multiplicado por 2, da

$$3xx-3x=19800-398x+2xx;$$

restando $2xx$ sale $xx-3x=19800-398x$, y sumando $3x$ se obtiene:

$$xx=-395x+19800.$$

Por lo tanto, de acuerdo con la regla

$$x=-\frac{395}{2}+\sqrt{\frac{156025}{4}+\frac{79200}{4}} \quad \text{o sea}$$

$$x=-\frac{395}{2}+\frac{485}{2}=\frac{90}{2}=45.$$

Respuesta. El primero ha puesto 45 tál. y el otro 55 tál. Con los 45 tál., el primero ganó 54 tál. en 3 meses, por lo tanto, habría ganado 18 tál. en un mes. Y el otro gana

44 tál.con 55 tál. en 2 meses, por lo tanto, habría ganado 22 tál. en un mes, lo que también está de acuerdo con aquello; porque si con 45 tál. se ganan 18 en un mes, entonces con 55 en el mismo lapso se ganan 22 tál.

92.

IX. Pregunta. Dos campesinas juntas llevan 100 huevos al mercado, una más que la otra, y sin embargo, ambas obtienen la misma cantidad de dinero. La primera le dice a la otra: "si yo hubiera tenido tus huevos, habría ganado 15 kreuzers" [*monedas antiguas en Alemania, Austria y Suiza*]; a lo que la otra responde: "si yo hubiera tenido tus huevos, habría ganado $6\frac{2}{3}$ kreuzers con ellos". ¿Cuántos huevos tenia cada una?

Suponemos que la primera haya tenido x huevos, y entonces la otra tenía $100-x$.

Así que ahora la primera habría vendido $100-x$ por 15 kreuzers, entonces se plantea esta regla de tres:

$$100-x : 15 = x \text{ para ...,} \qquad \text{respuesta: } \frac{15x}{100-x} \text{ kreuzers.}$$

Lo mismo se aplica a la otra que habría vendido x huevos por $6\frac{2}{3}$ kreuzers, y se puede encontrar cuánto ganó con sus $100-x$ huevos,

$$x : \frac{20}{3} = 100-x \text{ a ...,} \qquad \text{respuesta: } \frac{2000-20x}{3x}.$$

Como las dos campesinas han ganado la misma cantidad, encontramos esta ecuación:

$$\frac{15x}{100-x} = \frac{2000-20x}{3x},$$

multiplicada por $3x$, da $2000-20x = \frac{45xx}{100-x}$, multiplicada por $100-x$, da $45xx = 200000-4000x+20xx$, restando $20xx$, se obtiene $25xx = 200000-4000x$, dividido entre 25, da $xx = -160x+8000$, por lo tanto, según la regla

$$x = -80 + \sqrt{6400 + 8000} = -80 + 120 = 40.$$

Respuesta. Entonces, la primera campesina tenía 40 huevos, la otra 60 huevos y cada una ganó 10 kreuzers.

93.

X. Pregunta. Dos comerciantes vendieron varias varas de tela, el segundo 3 varas más que el primero, y juntos ganaron 35 tál. El primero le dice al otro: “con tu tela yo hubiera ganado 24 tál.”, responde el otro: “con la tuya yo hubiera ganado $12\frac{1}{2}$ tál.” ¿Cuántas varas tenía cada uno?

Suponemos que el primero haya tenido x varas, y entonces el otro tenía $x+3$. Dado que el primero hubiera ganado 24 tál. con $x+3$ varas, tiene que haber vendido sus x varas por $\frac{24x}{x+3}$ tál., y dado que el otro habría vendido x varas por $12\frac{1}{2}$ tál., entonces habría vendido sus $x+3$ varas por $\frac{25x+75}{2x}$ y entonces los dos juntos ganaron $\frac{24x}{x+3} + \frac{25x+75}{2x} = 35$ tál. Por lo tanto

$$\frac{48xx}{x+3} + 25x + 75 = 70x \quad \text{o sea} \quad \frac{48xx}{x+3} = 45x - 75,$$

multiplicado por $x+3$, da $48xx = 45\text{xx} + 60x - 225$, restado $45xx$, se tiene $3xx = 60x - 225$, o sea $xx = 20x - 75$.

Esto se convierte en

$$x = 10 \pm \sqrt{100-75} = 10 \pm \sqrt{25}, \quad \text{entonces} \quad x = 10 \pm 5.$$

Respuesta. Por lo tanto, hay dos soluciones. Según la primera, el primero ha vendido 15 varas y el otro 18 varas; ahora, ya que el primero habría vendido 18 varas por 24 tál., entonces con sus 15 varas ha ganado 20 tál. Pero el otro con 15 varas habría ganado $12\frac{1}{2}$ tál., por lo tanto, con sus 18 varas ha ganado 15 tál., así que ambos juntos ganaron 35 tál.

Según la segunda solución, el primero tenía 5 varas, en consecuencia el otro tenía 8 varas, por lo que el primero habría vendido 8 varas por 24 tál. y así con sus 5 varas ha ganado 15 tál.. El otro habría vendido 5 varas por $12\frac{1}{2}$ tál., por lo tanto, con sus 8 varas ha ganado 20 tál. en consecuencia, ambos juntos de nuevo 35 tál.

CAPÍTULO 7

DE LA EXTRACCIÓN DE LAS RAÍCES DE LOS NÚMEROS POLIGONALES

94.

Hemos mostrado arriba [Parte I, § 425-439] cómo se encuentran los números poligonales; pero lo que ahí habíamos llamado un lado, también se llama raíz. Ahora, si la raíz se indica por x, entonces se encuentran los números poligonales de la siguiente forma.

El	triángulo	es	$\frac{xx+x}{2}$
"	cuadrilátero	"	xx
"	5-gono	"	$\frac{3xx-x}{2}$
"	6-gono	"	$2xx-x$
"	7-gono	"	$\frac{5xx-3x}{2}$
"	8-gono	"	$3xx-2x$
"	9-gono	"	$\frac{7xx-5x}{2}$
"	10-gono	"	$4xx-3x$
"	n-gono	"	$\frac{(n-2)xx-(n-4)x}{2}$

95.

Ya se ha mostrado arriba extensamente que con la ayuda de estas fórmulas ahora es fácil encontrar un número poligonal para cualquier lado, o raíz, sea el número de vértices tan grande como sea. Pero si, al revés, se dan un número poligonal y el número de lados, es mucho más difícil encontrar su raíz o lado, y para este propósito se requiere la resolución de ecuaciones cuadráticas, por lo que este asunto merece ser tratado aquí. Siguiendo el orden, comenzamos con los números triangulares y seguimos con los poligonales.

96.

Entonces, sea 91 el número triangular dado, del cual se debe buscar el lado o la raíz.

Ponemos esta raíz $=x$, entonces $\frac{xx+x}{2}$ tiene que ser igual al número 91; se multiplica por 2, entonces se tiene $xx+x=182$, de donde se encuentra $xx=-x+182$ y así

$$x=-\tfrac{1}{2}+\sqrt{\tfrac{1}{4}+182}=-\tfrac{1}{2}+\sqrt{\tfrac{729}{4}},\quad \text{luego}\quad x=-\tfrac{1}{2}+\tfrac{27}{2}=13;$$

por lo tanto, la raíz requerida del triángulo = 13, porque el triángulo de 13 es 91.

97.

De manera general, sea a el número triangular dado cuya raíz se debe encontrar.

Ponemos la raíz $=x$, entonces $\frac{xx+x}{2}=a$, o sea $xx+x=2a$, además $xx=-x+2a$, de lo cual se encuentra $x=-\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}+2a}$, o sea

$$x=\frac{-1+\sqrt{8a+1}}{2}.$$

De ahí surge esta regla. Se multiplica el número triangular dado por 8 y se suma 1 al producto, se saca la raíz cuadrada de la suma, se resta 1 de ella; el resto se divide entre 2, entonces resulta la raíz del triángulo que se busca.

98.

De esto se puede ver que todos los números triangulares tienen la propiedad de que si se multiplican por 8 y se le agrega 1, siempre tiene que salir un número cuadrado, como se puede ver en la siguiente tabla,

triángulo	1,	3,	6,	10,	15,	21,	28,	36,	45,	55,	66,	etc.
8 veces $+1$:	9,	25,	49,	81,	121,	169,	225,	289,	361,	441,	529,	etc.

Si el número dado a no es de tal naturaleza, eso es una señal de que no es realmente un número triangular, o que la raíz del mismo no es racional.

99.

Buscamos la raíz triangular del número 210 mediante esa regla, entonces $a = 210$ y $8a + 1 = 1681$, cuya raíz cuadrada es 41, de la cual se puede ver que el número 210 es realmente un número triangular, del cual la raíz es $= \frac{41-1}{2} = 20$.

Pero si el número 4 se diera como un triángulo, cuya raíz debería buscarse, ella sería $= \frac{\sqrt{33}-1}{2}$ y, por tanto, irracional. Pero de hecho, de esta raíz, es decir, de $\frac{\sqrt{33}-1}{2}$, se encuentra el triángulo de la siguiente manera:

Como $x = \frac{\sqrt{33}-1}{2}$, entonces $xx = \frac{17-\sqrt{33}}{2}$; sumando x se obtiene $xx + x = \frac{16}{2} = 8$, y, en consecuencia, el número triangular es $\frac{xx+x}{2} = 4$.

100.

Dado que los números cuadriláteros son los mismos que los cuadrados, el asunto no tiene dificultad. Porque, si ponemos el número cuadrilátero dado $= a$ y su raíz cuadrilátera $= x$, entonces $xx = a$ y por lo tanto $x = \sqrt{a}$. De modo que la raíz cuadrada y la raíz cuadrilátera son iguales.

101.

Ahora proseguimos con los números pentagonales.

Sea 22 un número pentagonal y su raíz $= x$, entonces tiene que ser $\frac{3xx-x}{2} = 22$, o sea $3xx - x = 44$, o sea $xx = \frac{1}{3}x + \frac{44}{3}$; de lo cual se encuentra $x = \frac{1}{6} + \sqrt{\frac{1}{36} + \frac{44}{3}}$, es decir $x = \frac{1+\sqrt{529}}{6} = \frac{1}{6} + \frac{23}{6} = 4$. Entonces, 4 es la raíz pentagonal buscada del número 22.

102.

Ahora, esté planteada esta pregunta: si el pentágono dado es $= a$, ¿cómo se debe encontrar su raíz?

Si se pone esta raíz buscada $= x$, se llega a esta ecuación $\frac{3xx-x}{2} = a$, o sea $3xx - x = 2a$, o sea $xx = \frac{1}{3}x + \frac{2a}{3}$; de lo cual se encuentra $x = \frac{1}{6} + \sqrt{\frac{1}{36} + \frac{2a}{3}}$, es decir

$$x = \frac{1+\sqrt{24a+1}}{6}.$$

Por eso, si a es un pentágono verdadero, entonces $24a + 1$ siempre tiene que ser un número cuadrado.

Sea p. ej. 330 el pentágono dado, entonces su raíz será $x = \frac{1+\sqrt{7921}}{6} = \frac{1+89}{6} = 15$.

103.

Ahora sea a un número hexagonal dado cuya raíz debe buscarse.

Si se pone esta raíz buscada $=x$, entonces será $2xx-x=a$, o sea $xx=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}a$, así encontramos

$$x=\frac{1}{4}+\sqrt{\frac{1}{16}+\frac{1}{2}a}=\frac{1+\sqrt{8a+1}}{4}.$$

Por eso, si a es un hexágono real, entonces $8a+1$ tiene que ser un cuadrado, de lo cual se ve que todos los números hexagonales están incluidos en los triangulares; pero las raíces son diferentes.

Sea p. ej. 1225 el número hexagonal dado, entonces su raíz será $x=\frac{1+\sqrt{9801}}{4}=\frac{1+99}{4}=25.$

104.

Además, sea a un número heptagonal dado del cual se busca el lado o la raíz.

Si se pone esta raíz $=x$, entonces se tiene $\frac{5xx-3x}{2}=a$, o sea $5xx-3x=2a$, así $xx=\frac{3}{5}x+\frac{2}{5}a$, de lo cual se encuentra

$$x=\frac{3}{10}+\sqrt{\frac{9}{100}+\frac{2}{5}a}=\frac{3+\sqrt{40a+9}}{10}.$$

Todos los números heptagonales son de tal naturaleza que, si se multiplican por 40 y se suma 9 al producto, la suma siempre será un número cuadrado.

Sea p. ej. 2059 el heptágono dado, entonces su raíz será $x=\frac{3+\sqrt{82369}}{10}=\frac{3+287}{10}=29.$

105.

Ahora sea a un número octagonal dado del cual se busca el lado o la raíz x.

Entonces se tiene $3xx - 2x = a$, o sea, $xx = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}a$, de lo cual se encuentra

$$x = \frac{1}{3} + \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{a}{3}} = \frac{1+\sqrt{3a+1}}{3}.$$

Todos los números octagonales son de tal naturaleza que, si se multiplican por 3 y se suma 1, la suma siempre será un número cuadrado.

Sea p. ej. 3816 un número octagonal, entonces su raíz será $x = \frac{1+\sqrt{11449}}{3} = \frac{1+107}{3} = 36.$

106.

Finalmente, sea a un número n-gonal dado cuya raíz x debe buscarse, entonces se tiene esta ecuación $\frac{(n-2)xx-(n-4)x}{2} = a$, o sea $(n-2)xx - (n-4)x = 2a$, entonces $xx = \frac{(n-4)x}{n-2} + \frac{2a}{n-2}$, de lo cual se encuentra

$$x = \frac{n-4}{2(n-2)} + \sqrt{\frac{(n-4)^2}{4(n-2)^2} + \frac{2a}{n-2}},$$

o sea

$$x = \frac{n-4}{2(n-2)} + \sqrt{\frac{(n-4)^2}{4(n-2)^2} + \frac{8(n-2)a}{4(n-2)^2}}$$

y en consecuencia

$$x = \frac{n-4+\sqrt{8(n-2)a+(n-4)^2}}{2(n-2)}.$$

Esta fórmula contiene una regla general para encontrar todas las raíces poligonales posibles de números dados.

Para explicar esto con un ejemplo, consideramos el número 24-gonal 3009; ya que aquí $a = 3009$ y $n = 24$, entonces $n - 2 = 22$ y $n - 4 = 20$, luego obtenemos la raíz

$$x = \frac{20+\sqrt{529584+400}}{44} = \frac{20+728}{44} = 17.$$

CAPÍTULO 8

DE LA EXTRACCIÓN DE LAS RAÍCES DE BINOMIOS

107.

Un *binomio* en álgebra es un número que consta de dos partes de las cuales una o dos contienen el signo de raíz cuadrada.

Entonces $3+\sqrt{5}$ es un binomio, también $\sqrt{8}+\sqrt{3}$, y no importa si estas dos partes estén conectadas con el signo $+$ o $-$. Por eso, tanto $3-\sqrt{5}$ como $3+\sqrt{5}$ se denominan binomios.

108.

Estos binomios son notables principalmente porque al resolver las ecuaciones cuadráticas siempre se obtienen tales expresiones si la resolución no puede ser efectuada.

Entonces, dada p. ej. la ecuación $xx = 6x - 4$, tendremos $x = 3+\sqrt{5}$. Por este motivo, tales expresiones aparecen con mucha frecuencia en los cálculos algebraicos, y ya hemos mostrado anteriormente cómo se realizan con ellas las operaciones habituales de suma, resta, multiplicación y división. Pero ahora ya estamos en posición de mostrar también cómo se pueden extraer las raíces cuadradas de tales expresiones, siempre y cuando tal extracción sea factible, y en el otro caso, solo se pone un signo de raíz, es decir, la raíz cuadrada de $3+\sqrt{2}$ es $\sqrt{3+\sqrt{2}}$.

109.

Ahora, en primer lugar, debe observarse que los cuadrados de tales binomios también son binomios, incluso de tal forma que una parte es racional.

Porque, el cuadrado de $a+\sqrt{b}$ es $(aa+b)+2a\sqrt{b}$. Entonces, al revés, si se busca la raíz cuadrada de esta expresión $(aa+b)+2a\sqrt{b}$, se encuentra $a+\sqrt{b}$, que sin duda se puede entender más claramente que si se hubiera puesto el signo $\sqrt{}$ en aquella expresión. De la misma manera, si se toma el cuadrado de esta expresión $\sqrt{a}+\sqrt{b}$, se obtiene $(a+b)+2\sqrt{ab}$, por lo tanto, también al revés, la raíz cuadrada de esta expresión $(a+b)+2\sqrt{ab}$ será $\sqrt{a}+\sqrt{b}$, que nuevamente es más comprensible que si se hubiera puesto el signo $\sqrt{}$ en aquella expresión.

110.

Por lo tanto, se trata de encontrar una señal que permita decidir en cada caso si una raíz cuadrada de esta forma se da o no. Para este fin, empezamos con una expresión sencilla y vemos si de este binomio $5+2\sqrt{6}$ se puede encontrar la raíz cuadrada de tal forma.

Entonces, suponemos que esta raíz sea $\sqrt{x}+\sqrt{y}$, de la cual el cuadrado es $(x+y)+2\sqrt{xy}$, por lo que este cuadrado tiene que ser igual a aquella expresión $5+2\sqrt{6}$; por lo tanto, la parte racional $x+y$ tiene que ser igual a 5 y la parte irracional $2\sqrt{xy}$ tiene que ser igual a $2\sqrt{6}$; por lo tanto, se obtiene $\sqrt{xy}=\sqrt{6}$ y tomando los cuadrados,

$xy = 6$. Ya que $x + y = 5$, entonces $y = 5 - x$, este valor sustituido en la ecuación $xy = 6$ da $5x - xx = 6$, o sea $xx = 5x - 6$, por lo tanto $x = \frac{5}{2} + \sqrt{\frac{25}{4} - \frac{24}{4}} = \frac{5}{2} + \frac{1}{2} = 3$; entonces $x = 3$ e $y = 2$, por eso, la raíz cuadrada de $5 + 2\sqrt{6}$ será $\sqrt{3} + \sqrt{2}$.

111.

Ya que aquí hemos obtenido estas dos ecuaciones

I.) $x + y = 5$ y II.) $xy = 6$,

mostraremos una forma especial de encontrar x e y, que consiste en lo siguiente.

Como $x + y = 5$, tómese el cuadrado $xx + 2xy + yy = 25$. Ahora hay que notar que $xx - 2xy + yy$ es el cuadrado de $x - y$; por eso, de aquella ecuación, es decir, de $xx + 2xy + yy = 25$, restamos el cuádruplo de $xy = 6$, o sea $4xy = 24$, se obtiene $xx - 2xy + yy = 1$, y la raíz cuadrada da $x - y = 1$. Entonces, porque $x + y = 5$, encontramos $x = 3$ e $y = 2$. Por lo tanto, la raíz cuadrada buscada de $5 + 2\sqrt{6}$ será $\sqrt{3} + \sqrt{2}$.

112.

Consideramos este binomio general $a + \sqrt{b}$, y su raíz cuadrada sea $\sqrt{x} + \sqrt{y}$, entonces obtenemos esta ecuación

$$(x + y) + 2\sqrt{xy} = a + \sqrt{b}, \text{ así}$$

$$x + y = a \quad \text{y} \quad 2\sqrt{xy} = \sqrt{b}, \text{ o sea } 4xy = b;$$

el cuadrado de aquella es $xx + 2xy + yy = aa$, de este restamos $4xy = b$, lo cual da $xx - 2xy + yy = aa - b$, cuya raíz cuadrada es $x - y = \sqrt{aa - b}$. Dado que $x + y = a$, encontramos

$$x = \frac{a + \sqrt{aa - b}}{2} \quad \text{y} \quad y = \frac{a - \sqrt{aa - b}}{2}$$

por lo tanto, la raíz cuadrada requerida de $a+\sqrt{b}$ será:

$$\sqrt{\frac{a+\sqrt{aa-b}}{2}}+\sqrt{\frac{a-\sqrt{aa-b}}{2}}.$$

113.

Pero esta expresión es más enredada que si se hubiera puesto simplemente el signo raíz $\sqrt{}$ en el binomio dado $a+\sqrt{b}$, es decir, $\sqrt{a+\sqrt{b}}$. Pero esta expresión puede ser mucho más fácil si los números a y b son tales que $aa-b$ se convierte en un cuadrado, porque entonces desaparece la $\sqrt{}$ en la $\sqrt{}$. De esto se reconoce que la raíz cuadrada del binomio $a+\sqrt{b}$ se puede sacar cómodamente solo en tales casos en que $aa-b=cc$, porque entonces la raíz cuadrada buscada será

$$\sqrt{\frac{a+c}{2}}+\sqrt{\frac{a-c}{2}};$$

pero si $aa-b$ no es un número cuadrado, la raíz cuadrada no se puede mostrar de manera más adecuada que colocando el signo $\sqrt{}$ en ella.

114.

Por lo tanto, obtenemos esta regla para expresar la raíz cuadrada de un binomio $a+\sqrt{b}$ de una manera más cómoda. Para ello se requiere que $aa-b$ sea un número cuadrado; si el mismo es $=cc$, entonces la raíz cuadrada requerida será $\sqrt{\frac{a+c}{2}}+\sqrt{\frac{a-c}{2}}$; donde además hay que notar que la raíz cuadrada de $a-\sqrt{b}$ será $\sqrt{\frac{a+c}{2}}-\sqrt{\frac{a-c}{2}}$. Porque si se toma el cuadrado de esta expresión, entonces se obtiene $a-2\sqrt{\frac{aa-cc}{4}}$; ya que $cc=aa-b$, tenemos $aa-cc=b$; por eso este cuadrado es

$$= a - 2\sqrt{\frac{b}{4}} = a - \frac{2\sqrt{b}}{2} = a - \sqrt{b}.$$

115.

Así que si hay que sacar la raíz cuadrada de dicho binomio $a \pm \sqrt{b}$, entonces del cuadrado de la parte racional aa se resta el cuadrado de la parte irracional b; del resto se saca la raíz cuadrada, que sea $= c$, entonces la raíz cuadrada requerida es

$$\sqrt{\frac{a+c}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-c}{2}}.$$

116.

Búsquese la raíz cuadrada de $2 + \sqrt{3}$, entonces son $a = 2$ y $b = 3$; por lo tanto, $aa - b = cc = 1$ y así también $c = 1$: entonces la raíz cuadrada requerida es

$$\sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}}.$$

Además, sea dado el binomio $11 + 6\sqrt{2}$, cuya raíz cuadrada se debe encontrar. Aquí son $a = 11$ y $\sqrt{b} = 6\sqrt{2}$; por lo tanto, $b = 36 \cdot 2 = 72$ y $aa - b = 49$, entonces $c = 7$. Por eso, la raíz cuadrada de $11 + 6\sqrt{2}$ será $\sqrt{9} + \sqrt{2} = 3 + \sqrt{2}$.

Búsquese la raíz cuadrada de $11 - 2\sqrt{30}$. Aquí son $a = 11$ y $\sqrt{b} = 2\sqrt{30}$, por lo tanto $b = 4 \cdot 30 = 120$ y $aa - b = 1$ y $c = 1$: entonces la raíz cuadrada que estamos buscando es $\sqrt{6} - \sqrt{5}$.

117.

Esta regla también incluso se aplica si hay números imaginarios o imposibles.

Así, dado este binomio $1+4\sqrt{-3}$, entonces $a=1$ y $\sqrt{b}=4\sqrt{-3}$; por eso $b=-48$ y $aa-b=49$. Por lo tanto, $c=7$ y, en consecuencia, la raíz cuadrada buscada es $\sqrt{4}+\sqrt{-3}=2+\sqrt{-3}$.

Además, sea dado $-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{-3}$. Aquí son $a=-\frac{1}{2}$, $\sqrt{b}=\frac{1}{2}\sqrt{-3}$ y $b=\frac{1}{4}\cdot-3=-\frac{3}{4}$, por lo tanto $aa-b=\frac{1}{4}+\frac{3}{4}=1$ y $c=1$: consecuentemente, la raíz cuadrada buscada es

$$\sqrt{\frac{1}{4}}+\sqrt{-\frac{3}{4}}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{-3}}{2} \quad \text{o sea} \quad \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{-3}.$$

También este ejemplo es notable, donde se debe buscar la raíz cuadrada de $2\sqrt{-1}$.

Debido a que aquí no hay una parte racional, $a=0$ y $\sqrt{b}=2\sqrt{-1}$, por lo tanto $b=-4$ y $aa-b=4$, es decir, $c=2$, por lo cual la raíz cuadrada buscada es $\sqrt{1}+\sqrt{-1}=1+\sqrt{-1}$, cuyo cuadrado es $1+2\sqrt{-1}-1=2\sqrt{-1}$.

118.

También si se tiene que resolver una ecuación como $xx=a\pm\sqrt{b}$ y sería $aa-b=cc$, entonces para x se obtendría este valor $x=\sqrt{\frac{a+c}{2}}\pm\sqrt{\frac{a-c}{2}}$, que puede ser útil en muchos casos.

Sea p. ej. $xx=17+12\sqrt{2}$, entonces $x=3+\sqrt{8}=3+2\sqrt{2}$.

119.

Esto ocurre en particular al resolver algunas ecuaciones de cuarto grado, como $x^4=2axx+d$. Porque, si aquí ponemos $xx = y$, entonces $x^4 = yy$, por lo tanto nuestra ecuación será $yy = 2ay + d$, de la cual se encuentra $y = a \pm \sqrt{aa+d}$; y para la primera ecuación será $xx = a \pm \sqrt{aa+d}$, de la cual todavía hay que extraer la raíz cuadrada. Ya que aquí ahora

$$\sqrt{b} = \sqrt{aa+d}, \text{ entonces } b = aa + d, \text{ así } aa - b = -d.$$

Ahora, si $-d$ fuera un cuadrado, es decir cc o sea $d = -cc$, entonces se podría mostrar la raíz; así que sea $d = -cc$, es decir, consideramos dada esta ecuación de cuarto grado $x^4 = 2axx - cc$, entonces el valor de x se expresa de la siguiente forma

$$x = \sqrt{\tfrac{a+c}{2}} \pm \sqrt{\tfrac{a-c}{2}}.$$

120.

Explicaremos esto con algunos ejemplos.

I. Primero, buscamos dos números cuyo producto sea 105, y si se suman sus cuadrados, la suma sea = 274.

Suponemos que estos números sean x e y, entonces inmediatamente tenemos estas dos ecuaciones:

$$\text{I.) } xy = 105 \quad \text{y} \quad \text{II.) } xx + yy = 274.$$

De la primera se encuentra $y = \frac{105}{x}$, sustituyendo este valor para y en la segunda ecuación da $xx + \frac{105^2}{xx} = 274$.

Multiplicada por xx será $x^4 + 105^2 = 274xx$, o sea $x^4 = 274xx - 105^2$.

Si se compara esta ecuación con la de arriba, entonces obtenemos $2a = 274$ y $-cc = -105^2$; por lo tanto, $c = 105$ y $a = 137$. Así encontramos:

$$x = \sqrt{\tfrac{137+105}{2}} \pm \sqrt{\tfrac{137-105}{2}} = 11 \pm 4;$$

en consecuencia, $x=15$, o $x=7$. En el primer caso es $y=7$, pero en el segundo, $y=15$. Por lo tanto, los dos números que estamos buscando son 15 y 7.

121.

Sin embargo, es bueno notar aquí que el cálculo se puede hacer mucho más fácil. Ya que $xx+2xy+yy$, y también $xx-2xy+yy$ son cuadrados, y además conocemos los valores tanto de $xx+yy$ como de xy, solo necesitamos tomar el último dos veces, sumarlo y restarlo al primero, como se puede ver aquí: $xx+yy=274$. Primero, $2xy=210$, sumado da $xx+2xy+yy=484$ y $x+y=22$; luego, $2xy$ restado da $xx-2xy+yy=64$ y $x-y=8$.

Entonces $2x=30$ y $2y=14$, de lo cual es evidente que $x=15$ e $y=7$.

De esta forma también se puede resolver esta cuestión general:

II. Búsquese dos números de los cuales el producto $=m$ y la suma de sus cuadrados $=n$.

Los números que estamos buscando sean x e y, entonces tenemos las siguientes dos ecuaciones

$$\text{I.)}\ xy=m, \qquad \text{II.)}\ xx+yy=n.$$

Pero ahora es $2xy=2m$. Primero sumamos $2xy$, se obtiene $xx+2xy+yy=n+2m$ y $x+y=\sqrt{n+2m}$; luego, restando $2xy$, da $xx-2xy+yy=n-2m$ y $x-y=\sqrt{n-2m}$, por lo tanto

$$x=\tfrac{1}{2}\sqrt{n+2m}+\tfrac{1}{2}\sqrt{n-2m} \quad \text{e} \quad y=\tfrac{1}{2}\sqrt{n+2m}-\tfrac{1}{2}\sqrt{n-2m}.$$

122.

III. Consideramos además la siguiente cuestión: buscar dos números cuyo producto sea $=35$ y la diferencia de sus cuadrados sea $=24$.

Sea x el número mayor y el menor y, entonces tenemos estas dos ecuaciones $xy = 35$ y $xx - yy = 24$. Dado que aquí no se dan las ventajas anteriores, procedemos de la forma habitual, y ahí la primera da $y = \frac{35}{x}$, sustituyendo este valor para y en la segunda ecuación, tenemos $xx - \frac{1225}{xx} = 24$, multiplicado por xx, se tiene $x^4 - 1225 = 24xx$ y $x^4 = 24xx + 1225$. Debido a que el último término aquí tiene el signo *más*, la ecuación de arriba no se puede aplicar, porque $cc = -1225$, y por lo tanto c sería imaginaria.

Por eso ponemos $xx = z$, así tenemos $zz = 24z + 1225$, de lo cual se obtiene $z = 12 \pm \sqrt{144 + 1225}$, o sea $z = 12 \pm 37$, por lo tanto $xx = 12 \pm 37$, es decir $xx = 49$ o $xx = -25$.

Según el primer valor, serán $x = 7$ e $y = 5$.

Pero según el segundo obtenemos

$$x = \sqrt{-25} \quad \text{e} \quad y = \frac{35}{\sqrt{-25}}, \text{ o sea } y = \sqrt{\frac{1225}{-25}}, \text{ o sea } y = \sqrt{-49}.$$

123.

Para finalizar este capítulo queremos agregar la siguiente pregunta.

IV. Se buscan dos números cuya suma, producto, y la diferencia de sus cuadrados sean iguales entre sí.

El número mayor sea x, el menor y, entonces estas tres expresiones tienen que ser iguales entre sí: I.) suma $x + y$, II.) producto xy, III.) diferencia de cuadrados $xx - yy$. Si se compara la primera con la segunda, se tiene $x + y = xy$, y de esto buscamos x. Entonces tendremos $y = xy - x$, o sea $y = x(y-1)$, y por lo tanto $x = \frac{y}{y-1}$; entonces $x + y = \frac{yy}{y-1}$ y $xy = \frac{yy}{y-1}$ y por eso la suma, de hecho, ya es igual al producto. No obstante, estos también tienen que ser iguales a la diferencia de los cuadrados; pero ahora tenemos:

$$xx - yy = \frac{yy}{yy-2y+1} - yy = \frac{-y^4+2y^3}{yy-2y+1}$$

que tienen que ser igual al valor anterior $\frac{yy}{y-1}$; por tanto, se obtiene $\frac{yy}{y-1} = \frac{-y^4+2y^3}{(y-1)^2}$; dividido entre yy da $\frac{1}{y-1} = \frac{-yy+2y}{(y-1)^2}$; multiplicando además por $y-1$, da $1 = \frac{-yy+2y}{y-1}$, multiplicando otra vez por $y-1$, da

$$y-1 = -yy+2y, \text{ por tanto } yy = y+1.$$

De esto se encuentra

$$y = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}+1} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{5}{4}} \quad \text{o sea} \quad y = \frac{1+\sqrt{5}}{2};$$

y por lo tanto obtenemos $x = \frac{1+\sqrt{5}}{\sqrt{5}-1}$. Para eliminar la irracionalidad del denominador, multiplicamos arriba y abajo por $\sqrt{5}+1$, entonces obtenemos $x = \frac{6+2\sqrt{5}}{4} = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$.

Respuesta. Entonces, el mayor de los números buscados es $x = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$, y el menor es $y = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Por lo tanto, su suma es $x+y = 2+\sqrt{5}$, además el producto es $xy = 2+\sqrt{5}$, y como $xx = \frac{7+3\sqrt{5}}{2}$ y $yy = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$, entonces la diferencia de los cuadrados será $xx - yy = 2+\sqrt{5}$.

124.

Esta resolución fue bastante laboriosa, pero se puede efectuar más fácilmente así; primero equiparamos la suma $x+y$ y la diferencia de los cuadrados $xx-yy$, entonces se tiene $x+y = xx-yy$. Aquí se puede dividir entre $x+y$ porque $xx-yy = (x+y)(x-y)$, y entonces se obtiene $1 = x-y$, o sea $x = y+1$; por lo tanto, $x+y = 2y+1$ y

$xx - yy = 2y + 1$; y esto además tiene que ser igual al producto $xy = yy + y$. Por lo tanto tenemos $yy + y = 2y + 1$, o sea $yy = y + 1$, de lo que encontramos $y = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, como arriba.

125.

V. Esto nos lleva a la siguiente pregunta: encontrar dos números cuya suma, producto y la suma de sus cuadrados sean iguales entre sí.

Los números buscados sean x e y, por lo que estas tres expresiones tienen que ser iguales entre sí I.) $x + y$, II.) xy y III.) $xx + yy$.

Si se equiparan la primera y la segunda, es decir $x + y = xy$, entonces se encuentra $x = \frac{y}{y-1}$ y $x + y = \frac{yy}{y-1}$, que también es igual a xy. Pero entonces $xx + yy = \frac{yy}{yy-2y+1} + yy$, que debe ser igual $\frac{yy}{y-1}$. Multiplicando por $yy - 2y + 1$, se obtiene $y^4 - 2y^3 + 2yy = y^3 - yy$, o sea $y^4 = 3y^3 - 3yy$, y dividido entre yy da $yy = 3y - 3$; por lo tanto $y = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - 3}$, luego $y = \frac{3+\sqrt{-3}}{2}$, luego $y - 1 = \frac{1+\sqrt{-3}}{2}$, por tanto $x = \frac{3+\sqrt{-3}}{1+\sqrt{-3}}$. Multiplíquese arriba y abajo por $1 - \sqrt{-3}$, entonces $x = \frac{6-2\sqrt{-3}}{4}$, o sea $x = \frac{3-\sqrt{-3}}{2}$.

Respuesta. Entonces los dos números buscados son

$$x = \frac{3-\sqrt{-3}}{2} \quad \text{y} \quad y = \frac{3+\sqrt{-3}}{2},$$

su suma es $x + y = 3$, el producto $xy = 3$, y como finalmente $xx = \frac{3-3\sqrt{-3}}{2}$ e $yy = \frac{3+3\sqrt{-3}}{2}$, entonces $xx + yy = 3$.

126.

Este cálculo puede ser facilitado bastante por un planteamiento especial que también se utiliza en otros casos. Él consiste en expresar los números buscados no con letras individuales, sino con la suma y diferencia de otras dos letras.

Entonces, en la pregunta anterior, ponemos uno de los números buscados igual a $p+q$ y el otro $p-q$, entonces la suma de estos será $2p$, su producto $pp-qq$ y la suma de sus cuadrados $2pp+2qq$, estas tres piezas tienen que ser iguales entre sí. Equiparamos la primera y la segunda, de modo que $2p=pp-qq$ y entonces $qq=pp-2p$. Ponemos este valor en la tercera expresión, en lugar de qq, entonces obtenemos $4pp-4p$. Equiparando esta expresión con la primera, da $2p=4pp-4p$. Súmese $4p$, así será $6p=4pp$, dividido entre p da $6=4p$ y por lo tanto $p=\frac{3}{2}$.

De esto $qq=-\frac{3}{4}$ y $q=\frac{\sqrt{-3}}{2}$; en consecuencia, nuestros números buscados son $p+q=\frac{3+\sqrt{-3}}{2}$ y el otro $p-q=\frac{3-\sqrt{-3}}{2}$, que también habíamos encontrado antes.

CAPÍTULO 9

DE LA NATURALEZA DE LAS ECUACIONES CUADRÁTICAS

127.

De lo anterior se ha visto suficientemente que las ecuaciones cuadráticas permiten dos soluciones, propiedad que por supuesto merece ser tomada en cuenta porque explica bastante bien la naturaleza de las ecuaciones superiores. Por lo tanto, investigaremos en detalle de dónde viene que toda ecuación cuadrática permita dos soluciones porque esto indudablemente contiene una propiedad muy esencial de estas ecuaciones.

128.

Ya se ha visto que esta doble resolución se origina en el hecho de que la raíz cuadrada de cualquier número podría tomarse tanto negativa como positiva: pero esta razón no sería aplicable a ecuaciones superiores, por lo que sería bueno poner a la vista la razón de esto de otra forma. Por lo tanto, es necesario explicar de dónde viene que una ecuación cuadrática como p. ej. $xx = 12x - 35$ se pueda resolver de dos maneras, es decir, que se puedan indicar dos valores para x que satisfagan ambas la ecuación, como en este ejemplo donde para x se puede poner tanto 5 como 7, ya que en ambos casos xx y $12x - 35$ serán iguales entre sí.

129.

Para explicar la razón de esto con más claridad, es útil llevar todos los términos de la ecuación a un lado, de modo que 0 esté en el otro. Por lo tanto, la ecuación anterior será $xx - 12x + 35 = 0$, donde se trata de que se encuentre tal número que si se pone por x, la expresión $xx - 12x + 35$ realmente se convierta en nada; y luego también se tiene que mostrar la causa por qué esto puede suceder de dos maneras.

130.

Aquí todo depende de mostrar claramente que una expresión como $xx - 12x + 35$ puede verse como un producto de dos factores; de hecho, esta expresión consta de estos dos factores $(x-5)\cdot(x-7)$. Por lo tanto, si aquella expresión debe ser 0, entonces este producto también tiene que ser $(x-5)\cdot(x-7) = 0$. Pero un producto, no importa cuántos factores tenga, siempre será 0 si solo uno de sus factores es 0. Entonces, por grande que sea el producto de los otros factores, cuando se multiplica por 0, el resultado siempre es 0, lo cual es un principio básico que debe tenerse en cuenta para las ecuaciones superiores.

131.

De esto se entiende muy bien que este producto $(x-5)\cdot(x-7)$ puede convertirse en 0 de dos maneras: primero, si el primer factor es $x-5=0$, y luego también si el otro factor es $x-7=0$. Lo primero ocurre si $x=5$, pero el otro si $x=7$. De ello se comprende la verdadera razón por la que una ecuación como $xx-12x+35=0$ permite dos soluciones, es decir, que se pueden encontrar dos valores para x que ambos satisfagan la ecuación.

La razón es que la expresión $xx-12x+35$ se puede representar como un producto de dos factores.

132.

Exactamente lo mismo sucede en todas las ecuaciones cuadráticas. Porque, si todos los términos se llevan a un lado, siempre se obtiene una expresión como $xx-ax+b=0$; y esta expresión también puede verse como un producto de dos factores, que representamos como $(x-p)(x-q)$, sin preocuparnos por saber cuáles números puedan ser p y q. Ya que nuestra ecuación ahora requiere que este producto sea igual a 0, es evidente que esto puede pasar de dos formas: primero, si $x=p$, y segundo, si $x=q$, que son los dos valores de x que satisfacen la ecuación.

133.

Veamos ahora cuál tiene que ser la naturaleza de estos dos factores para que su producto dé justamente nuestra expresión $xx-ax+b$. Multiplicamos los dos factores realmente, y obtenemos $xx-(p+q)x+pq$. Dado que esto debe ser lo mismo que $xx-ax+b$, está claro que tiene que ser $p+q=a$ y $pq=b$, de donde reconocemos esta maravillosa propiedad: que de tal ecuación $xx-ax+b=0$, ambos valores de x son de tal naturaleza que, en primer lugar, su suma es igual al número a y su producto es igual al número b. Por lo tanto, en cuanto se conozca un valor, es fácil encontrar el otro también.

134.

Este fue el caso cuando ambos valores de x son positivos, ya que el segundo término de la ecuación tiene el signo –, pero el tercero tiene el signo +. Entonces, también consideraremos los casos en los que uno de los dos o ambos valores de x se vuelven negativos. Aquello sucede cuando los dos factores de la ecuación son de la forma: $(x-p)(x+q)$, de donde se originan estos dos valores para x, primero $x=p$ y segundo $x=-q$. Pero entonces la ecuación misma es $xx+(q-p)x-pq=0$, donde el segundo término tiene el signo + si q es mayor que p, pero si q fuera menor que p, tendría el signo –; pero aquí el tercer término siempre es negativo.

Pero si los dos factores fueran $(x+p)(x+q)$, entonces ambos valores para x serían negativos, es decir, $x=-p$ y $x=-q$ y la ecuación misma sería $xx+(p+q)x+pq=0$, donde tanto el segundo como el tercer término tienen el signo +.

135.

Por eso, reconocemos la naturaleza de las raíces de cualquier ecuación cuadrática viendo el signo del segundo y tercer término. Sea la ecuación $xx\cdots ax\cdots b=0$; si el segundo y tercer término tienen el signo +, ambos valores son negativos; si el segundo término es – pero el tercer término es +, ambos valores son positivos; pero si el tercer término es negativo, entonces un valor es positivo. Pero en todos los casos, el segundo término contiene la suma de los dos valores y el tercero su producto.

136.

Ahora es muy fácil plantear ecuaciones cuadráticas que contengan dos valores dados arbitrariamente: p. ej. se pide una ecuación tal que un valor de x debe ser 7, pero el otro -3. De ello se forman estas ecuaciones sencillas $x = 7$ y $x = -3$; entonces luego estas $x - 7 = 0$ y $x + 3 = 0$, que serán los factores de la ecuación requerida; de modo que la ecuación será: $xx - 4x - 21 = 0$, de la cual aquellos dos valores para x justamente se encuentran según la regla anterior. Porque, como $xx = 4x + 21$, entonces $x = 2 \pm \sqrt{25}$, luego, $x = 2 \pm 5$, luego, o $x = 7$ o $x = -3$.

137.

También puede suceder que ambos valores de x sean iguales entre sí; para ver eso, búsquese una ecuación donde ambos valores de x sean $x = 5$; los dos factores serán entonces $(x-5)(x-5)$ y la ecuación tiene la siguiente forma $xx - 10x + 25 = 0$, que parece tener un solo valor porque se obtiene doblemente $x = 5$, como muestra la resolución habitual. Porque, como $xx = 10x - 25$, entonces $x = 5 \pm \sqrt{0}$, o sea $x = 5 \pm 0$ y por lo tanto $x = 5$ y $x = 5$.

138.

En particular, debe tenerse en cuenta aquí que ambos valores de x a veces se vuelven imaginarios o imposibles, en cuyo caso es absolutamente imposible mostrar un valor de x que satisfaga la ecuación, lo cual p. ej. sucede cuando el número 10 debe partirse en dos partes cuyo producto sea 30; porque sea una parte $= x$, entonces la otra será $10 - x$ y por lo tanto su producto $10x - xx = 30$, en consecuencia $xx = 10x - 30$ y $x = 5 \pm \sqrt{-5}$, que es un número imaginario o imposible e indica que la pregunta es imposible.

139.

Por eso es muy importante encontrar una señal con la cual se pueda ver inmediatamente si una ecuación cuadrática es posible o no. Consideramos esta ecuación general:

$$xx - ax + b = 0, \text{ luego } xx = ax - b \text{ y } x = \tfrac{1}{2}a \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}aa - b};$$

de lo cual es evidente que si el número b es mayor que $\frac{1}{4}aa$, o sea si $4b$ es mayor que aa, entonces los dos valores [de x] son imposibles porque habría que extraer la raíz cuadrada de un número negativo. Sin embargo, siempre que b sea menor que $\frac{1}{4}aa$, o incluso menor que 0, es decir, negativo, ambos valores son siempre posibles. No obstante, los dos valores, ya sean posibles o imposibles, siempre se pueden expresar de esta manera, y siempre tienen la propiedad de que su suma $= a$ y su producto $= b$, como se puede ver en este ejemplo $xx - 6x + 10 = 0$, donde la suma de los dos valores para x tiene que ser $= 6$ y el producto $= 10$. De hecho, se encuentran estos dos valores:

$$\text{I.)} \quad x = 3 + \sqrt{-1} \qquad \text{y} \qquad \text{II.)} \quad x = 3 - \sqrt{-1},$$

cuya suma es $= 6$ y su producto es $= 10$.

140.

Se puede expresar esta característica de una manera más general que también se puede aplicar a tales ecuaciones como $fxx \pm gx + h = 0$: porque de esta se obtiene $xx = \mp \frac{gx}{f} - \frac{h}{f}$, por lo tanto

$$x = \mp \frac{g}{2f} \pm \sqrt{\frac{gg}{4ff} - \frac{h}{f}}, \quad \text{o sea} \quad x = \frac{\mp g \pm \sqrt{gg - 4fh}}{2f},$$

de esto se puede ver que ambos valores se vuelven imaginarios, o sea la ecuación se vuelve imposible, si $4fh$

es mayor que *gg*, o cuando en esta ecuación $fxx \pm gx + h = 0$, cuatro veces el producto del primer y último término es mayor que el cuadrado del segundo término. Porque el producto cuádruple del primer término y el último es 4*fhxx*, pero el cuadrado del término de en medio es *ggxx*: si ahora 4*fhxx* es mayor que *ggxx*, entonces 4*fh* también es mayor que *gg* y, por lo tanto, la ecuación es imposible. En todos los demás casos, sin embargo, la ecuación es posible y los dos valores de *x* se pueden dar realmente, aunque a menudo se vuelvan irracionales, en cuyo caso uno puede acercarse cada vez más a su verdadero valor, como se señaló anteriormente; por otro lado, no tiene lugar ninguna aproximación con expresiones imaginarias como $\sqrt{-5}$, ya que 100 está tan lejos de él como 1 o cualquier otro número.

141.

También se recordar que cualquier expresión de segundo grado $xx \pm ax \pm b$ necesariamente siempre se puede resolver en dos factores como

$$(x \pm p)(x \pm q).$$

Porque si se quisieran tomar tres de esos factores, se llegaría al tercer grado, y con solo un factor no se llegaría al segundo grado. Por eso está claro que toda ecuación de segundo grado contiene necesariamente dos valores para *x*, y que no pueden ser ni más ni menos.

142.

Ya hemos visto que si se encontraron estos dos factores, de ellos también se pueden indicar los dos valores para *x*; porque si se equipara cada factor con 0, se obtiene un valor para *x*. Esto también ocurre al revés, de modo que tan pronto como se encuentra un valor para *x*, se reconoce un factor de la ecuación cuadrática. Porque si $x = p$ es un valor para *x* en una ecuación cuadrática, entonces $x - p$ también es un factor de la misma, es decir, si todos los términos se llevan a un lado la ecuación se puede dividir entre $x-p$, y el cociente da el otro factor.

143.

Para explicar esto, sea dada esta ecuación:

$$xx+4x-21=0,$$

de la cual sabemos que $x=3$ es un valor para x porque

$$3\cdot 3+4\cdot 3-21=0$$

y por lo tanto podemos concluir con certeza que $x-3$ es un factor de esta ecuación, es decir, que $xx+4x-21$ se puede dividir entre $x-3$, como se puede ver en esta división:

$$\begin{array}{rlll} x-3) & xx+4x-21 & & (x+7 \\ & \underline{xx-3x} & & \\ & \quad\;\; 7x-21 & & \\ & \quad\;\; \underline{7x-21} & & \\ & \qquad\quad 0 & & \end{array}$$

Entonces el otro factor es $x+7$ y nuestra ecuación es representada por este producto $(x-3)(x+7)=0$, del cual los dos valores para x se aclaran inmediatamente, porque del primer factor sale $x=3$, y del otro sale $x=-7$.

CAPÍTULO 10

DE LA RESOLUCIÓN DE LAS ECUACIONES CÚBICAS PURAS

144.

Una ecuación cúbica se llama *pura* si el cubo del número desconocido se iguala a un número conocido, es decir, que ni el cuadrado del número desconocido ni el número desconocido mismo aparecen en ella.

Una de estas ecuaciones es $x^3 = 125$, o de manera general, $x^3 = a$, o $x^3 = \frac{a}{b}$.

145.

Es obvio como se puede encontrar el valor *x* de tal ecuación, ya que solo es necesario extraer la raíz cúbica en ambos lados.

Entonces de la ecuación $x^3 = 125$ se encuentra $x = 5$, y de la ecuación $x^3 = a$ se obtiene $x = \sqrt[3]{a}$; pero de $x^3 = \frac{a}{b}$ se tiene

$$x = \sqrt[3]{\frac{a}{b}} \quad \text{o} \quad x = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}.$$

Por lo tanto, habiendo aprendido a extraer la raíz cúbica de un número dado, también se pueden resolver tales ecuaciones.

146.

De tal manera solo se obtiene un valor para *x*; ya que cada ecuación cuadrática tiene dos valores, por lo que se tienen razones para sospechar que una ecuación cúbica también tiene que tener más de un valor, por lo que valdrá la pena el esfuerzo de investigar este asunto más de cerca, y en el caso de que tal ecuación tuviera más valores para *x*, de encontrarlos también.

147.

Consideremos p. ej. esta ecuación $x^3 = 8$, de la cual se deben encontrar todos los números cuyo cubo sea igual a 8; ya que ahora uno de estos números es indiscutiblemente $x = 2$, la expresión $x^3 - 8 = 0$ se tiene que poder dividir necesariamente entre $x - 2$, según el capítulo anterior. Por lo tanto efectuamos esta división como sigue:

$$
\begin{array}{rl}
x-2) & x^3-8 \quad (xx+2x+4 \\
& \underline{x^3-2xx} \\
& \qquad 2xx-8 \\
& \qquad \underline{2xx-4x} \\
& \qquad\qquad 4x-8 \\
& \qquad\qquad \underline{4x-8} \\
& \qquad\qquad\quad 0
\end{array}
$$

Entonces nuestra ecuación $x^3-8=0$ puede ser representada por estos factores:

$$(x-2)(xx+2x+4)=0.$$

148.

Ya que la pregunta es cuál número tenga que ponerse para x para que $x^3=8$, o que $x^3-8=0$, está claro que esto sucede si el producto encontrado es igual a 0; pero este será 0 no solo si el primer factor es $x-2=0$, lo cual da $x=2$, sino también si el otro factor es $xx+2x+4=0$. Entonces ponemos $xx+2x+4=0$, así tenemos $xx=-2x-4$ y por lo tanto será:

$$x=-1\pm\sqrt{-3}.$$

149.

Así que, además del caso $x=2$ en el que se satisface la ecuación $x^3=8$, tenemos otros dos valores para x cuyos cubos también son 8, y que tienen esta forma:

I.) $x=-1+\sqrt{-3}$ y II.) $x=-1-\sqrt{-3}$,

lo cual queda fuera de duda calculando sus cubos como sigue:

$$
\begin{array}{lcl}
-1+\sqrt{-3} & & -1-\sqrt{-3} \\
\underline{-1+\sqrt{-3}} & & \underline{-1-\sqrt{-3}} \\
1-\sqrt{-3} & & 1+\sqrt{-3} \\
\underline{-\sqrt{-3}-3} & & \underline{+\sqrt{-3}-3} \\
-2-2\sqrt{-3} & \text{cuadrado} & -2+2\sqrt{-3} \\
\underline{-1+\sqrt{-3}} & & \underline{-1-\sqrt{-3}} \\
2+2\sqrt{-3} & & 2-2\sqrt{-3} \\
\underline{-2\sqrt{-3}+6} & & \underline{+2\sqrt{-3}+6} \\
8 & \text{cubo} & 8
\end{array}
$$

Estos dos valores son imaginarios o imposibles, pero sin embargo merecen ser tomados en cuenta.

150.

Esto también sucede en general para cualquier ecuación cúbica de la forma $x^3 = a,$ donde, además del valor $x = \sqrt[3]{a},$ también hay otros dos. Para abreviar, ponemos $\sqrt[3]{a} = c,$ de modo que $a = c^3,$ y nuestra ecuación adquiere la forma $x^3 - c^3 = 0,$ la cual puede dividirse entre $x - c$ como se puede ver en esta división:

$$
\begin{array}{lll}
x-c) & x^3-c^3 & (xx+cx+cc \\
 & \underline{x^3-cxx} & \\
 & \quad cxx-c^3 & \\
 & \quad \underline{cxx-ccx} & \\
 & \qquad ccx-c^3 & \\
 & \qquad \underline{ccx-c^3} & \\
 & \qquad\quad 0 &
\end{array}
$$

por lo tanto, nuestra ecuación es representado por este producto

$$(x-c)(xx+cx+cc) = 0,$$

que en realidad es 0 no solo cuando $x-c=0$, o sea $x=c$, sino también cuando $xx+cx+cc=0$, pero esto da $xx=-cx-cc$, y por lo tanto

$$x=-\frac{c}{2}\pm\sqrt{\frac{cc}{4}-cc} \quad \text{o sea} \quad x=\frac{-c\pm\sqrt{-3cc}}{2},$$

esto es

$$x=\frac{-c\pm c\sqrt{-3}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}\cdot c,$$

fórmula que contiene otros dos valores para x.

151.

Dado que ahora se ha escrito c en lugar de $\sqrt[3]{a}$, llegamos a la conclusión de que para cada ecuación cúbica de esta forma $x^3=a$ se pueden encontrar tres tipos de valores para x que se expresan así:

$$\text{I.)}\ x=\sqrt[3]{a}, \qquad \text{II.)}\ x=\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\cdot\sqrt[3]{a}, \qquad \text{III.)}\ x=\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\cdot\sqrt[3]{a}$$

lo que aclara que cualquier raíz cúbica tiene tres valores diferentes, de los cuales solo el primero es posible, pero los otros dos son imposibles. Esto aquí es muy notable porque ya hemos visto arriba que cada raíz cuadrática tiene dos valores diferentes, y abajo se mostrará que cada raíz del cuarto grado tiene cuatro valores diferentes, del quinto grado cinco de ellos, y así sucesivamente.

En los cálculos comunes, solo se usa el primero de estos 3 valores, porque los otros dos son imposibles, y queremos agregar algunos ejemplos más sobre ello.

152.

I. Pregunta. Buscamos un número cuyo cuadrado multiplicado por $\frac{1}{4}$ del número dé 432.

Este número sea x, entonces xx multiplicado por $\frac{1}{4}x$ tiene que ser igual al número 432: por lo tanto $\frac{1}{4}x^3 = 432$, multiplicando por 4, se obtiene $x^3 = 1728$, y sacada la raíz cúbica, da $x = 12$.

Respuesta. El número buscado es 12, porque su cuadrado es 144, multiplicado por $\frac{1}{4}$ de él, que es 3, da 432.

153.

II. Pregunta. Búsquese un número cuya cuarta potencia dividida entre su mitad y sumando $14\frac{1}{4}$ resulte 100.

El número sea x, entonces su cuarta potencia es x^4, dividida entre su mitad $\frac{1}{2}x$ da $2x^3$, sumando $14\frac{1}{4}$ debe dar 100; entonces se tiene $2x^3+14\frac{1}{4}=100$, restando $14\frac{1}{4}$ da $2x^3 = \frac{343}{4}$, dividido entre 2 da $x^3 = \frac{343}{8}$, y sacando la raíz cúbica obtenemos $x = \frac{7}{2}$.

154.

III. Pregunta. Algunos capitanes están en campaña, cada uno tiene tres veces más jinetes y 20 veces más soldados de a pie que el número de capitanes; y un jinete recibe como paga mensual tantos florines como indica el número de capitanes, pero un soldado de a pie recibe la mitad. El salario mensual en total es de 13.000 florines. ¿Cuántos capitanes había?

Suponemos que había x capitanes, por lo que uno tenía $3x$ jinetes y $20x$ soldados de a pie. Entonces, el número de todos los jinetes fue $3xx$ y el de los de a pie $20xx$. Dado que un jinete obtiene x florines y un soldado de a pie obtiene $\frac{1}{2}x$ florines, entonces los salarios mensuales de los jinetes son $3x^3$ florines, pero los salarios de los soldados de a pie son $10x^3$ florines, por lo tanto en total reciben $13x^3$ florines número que tiene que ser igual a 13000, es decir, $13x^3 = 13000$, así $x^3 = 1000$ y $x = 10$.

Este es el número de capitanes.

155.

IV. Pregunta. Varios comerciantes se asocian y cada uno invierte 100 veces más que el número de socios; con esta cantidad envían un representante a Venecia, el cual de cada 100 florines logra ganar tantos flo. como indica el doble número de socios; a su regreso la ganancia asciende a 2662 florines. La pregunta es, ¿cuántos comerciantes hay?

Suponemos que hayan sido x comerciantes, entonces cada uno invirtió $100x$ florines y el capital total fue $100xx$ florines. Dado que con 100 florines se ganaron $2x$ florines, la ganancia fue $2x^3$, que debe ser igual al número 2662: entonces $2x^3 = 2662$, por lo tanto $x^3 = 1331$ y consecuentemente $x = 11$, ese es el número de comerciantes que había.

156.

V. Pregunta. Una campesina cambia quesos por gallinas, da 2 quesos por cada 3 gallinas; las gallinas ponen huevos, cada una pone tantos como $\frac{1}{3}$ del número de gallinas. Ella los lleva al mercado, da 9 huevos por tantos peniques como una gallina ha puesto huevos, y gana 72 peniques. ¿Cuántos quesos cambió la campesina?

Suponemos que el número de quesos haya sido x, entonces ellos fueron cambiados por $\frac{3}{2}x$ gallinas; dado que una gallina pone $\frac{1}{2}x$ huevos, el número de todos los huevos es $\frac{3}{4}xx$. Ahora se venden 9 huevos por $\frac{1}{2}x$ peniques, así que la ganancia total es de $\frac{1}{24}x^3$, que tiene que ser igual a 72. Por lo tanto $\frac{1}{24}x^3 = 72$, entonces $x^3 = 24 \cdot 72 = 8 \cdot 3 \cdot 8 \cdot 9$, o sea $x^3 = 8 \cdot 8 \cdot 27$, por lo tanto $x = 12$, y ese es el números de quesos que tenía la campesina, los cuales fueron cambiados por 18 gallinas.

CAPÍTULO 11

DE LA RESOLUCIÓN DE LAS ECUACIONES CÚBICAS COMPLETAS

157.

Una ecuación cúbica se llama *completa* si en ella aparecen, además del cubo del número desconocido, también este número desconocido mismo y su cuadrado, por lo tanto, la forma general de tales ecuaciones es:

$$ax^3 \pm bx^2 \pm cx \pm d = 0$$

si se han llevado todos los términos a un lado. En este capítulo se mostrará cómo se pueden encontrar los valores de x en dichas ecuaciones, que también se denominan raíces de la ecuación; ahora aquí ya se puede suponer que tal ecuación siempre tiene tres raíces, porque esto ya se mostró en el capítulo anterior de las ecuaciones puras de este grado.

158.

Para empezar, consideramos esta ecuación:

$$x^3 - 6xx + 11x - 6 = 0,$$

y dado que una ecuación cuadrática puede verse como un producto de dos factores, esta ecuación cúbica puede verse como un producto de tres factores, que en este caso son:

$$(x-1)(x-2)(x-3) = 0$$

ya que multiplicados entre sí producen la ecuación anterior. Porque $(x-1)\cdot(x-2)$ da $xx-3x+2$, y esto multiplicado por $x-3$ da $x^3-6xx+11x-6$, que es la forma anterior, que debe ser $=0$. Entonces esto sucede si este producto $(x-1)(x-2)(x-3)$ se convierte en nada, lo que ya sucede cuando solo uno de los tres factores sea $= 0$, y por lo tanto en tres casos, primero cuando $x-1=0$ o $x=1$, segundo cuando $x-2=0$ o $x=2$, y tercero cuando $x-3=0$ o $x=3$.

También se puede ver de inmediato que si se pone cualquier otro número para x, ninguno de estos tres factores se convierte en 0 y, por lo tanto, tampoco el producto. Por eso nuestra ecuación no tiene más raíces que estas tres.

159.

Si en cualquier otro caso se pudieran indicar los tres factores de tal ecuación, se tendrían las tres raíces de la misma. Para este fin consideramos tres de estos factores de manera general, suponiendo que sean $x-p$, $x-q$, $x-r$; entonces buscamos su producto, y ya que el primero multiplicado por el segundo da

$$xx-(p+q)x+pq,$$

entonces este producto, multiplicado también por $x-r$, da la siguiente expresión:

$$x^3-(p+q+r)xx+(pq+pr+qr)x-pqr.$$

Si esta expresión ahora debe ser igual a 0, esto sucede en tres casos; primero si $x-p=0$ o $x=p$, segundo si $x-q=0$ o $x=q$, y tercero si $x-r=0$ o $x=r$.

160.

Ahora expresamos esta ecuación de la siguiente forma

$$x^3-axx+bx-c=0,$$

y si las raíces de ella son

$$\text{I.)}\ x = p, \quad \text{II.)}\ x = q, \quad \text{III.)}\ x = r,$$

entonces primero tiene que ser $a = p + q + r$, y luego en segundo lugar $b = pq + pr + qr$ y en tercer lugar $c = pqr$, de lo cual vemos que el segundo término contiene la suma de las tres raíces , el tercer término es la suma de los productos de dos raíces y finalmente el último término es el producto de todas las tres raíces multiplicadas entre sí.

Esta última propiedad nos da inmediatamente esta importante ventaja de que una ecuación cúbica ciertamente no puede tener otras raíces racionales que aquellas entre las que se puede dividir el último término: porque él es el producto de las tres raíces, entonces tiene que ser divisible entre cada una de ellas. Por eso se sabe inmediatamente con cuáles números se debe hacer la prueba si se quiere adivinar una raíz.

Para explicar esto, consideramos esta ecuación $x^3 = x + 6$, o sea $x^3 - x - 6 = 0$. Dado que no puede tener raíces racionales distintas a tales que sean divisores del último término 6, entonces solo es necesario probar estos números 1, 2, 3, 6, cuyas pruebas son:

$$\begin{aligned} &\text{I.)}\ \text{si } x = 1 \text{ entonces} && 1 - 1 - 6 = -6. \\ &\text{II.)}\ \text{si } x = 2 \text{ entonces} && 8 - 2 - 6 = 0. \\ &\text{III.)}\ \text{si } x = 3 \text{ entonces} && 27 - 3 - 6 = 18. \\ &\text{III.)}\ \text{si } x = 6 \text{ entonces} && 216 - 6 - 6 = 204. \end{aligned}$$

De ello vemos que $x = 2$ es una raíz de la ecuación dada, de la cual ahora es fácil encontrar las otras dos. Porque, como $x = 2$ es una raíz, entonces $x - 2$ es un factor de la ecuación, por lo que solo se tiene que buscar el otro, lo que se realiza mediante la siguiente división

$$
\begin{array}{r|l}
x-2) & x^3 - x - 6 \quad (xx + 2x + 3 \\
 & \underline{x^3 - 2xx \qquad\qquad} \\
 & \qquad 2xx - \quad x - 6 \\
 & \qquad \underline{2xx - 4x \qquad} \\
 & \qquad\qquad 3x - 6 \\
 & \qquad\qquad \underline{3x - 6} \\
 & \qquad\qquad\quad 0
\end{array}
$$

Ya que ahora nuestra expresión es representada por este producto:

$$(x-2)(xx+2x+3),$$

entonces el mismo será 0 no solo si $x-2=0$, sino también si

$$xx+2x+3=0.$$

Pero de esto obtenemos $xx=-2x-3$ y por lo tanto $x=-1\pm\sqrt{-2}$, que son las otras dos raíces de nuestra ecuación, y que obviamente son son imposibles o imaginarias.

161.

Pero lo dicho solo se aplica si el primer término de la ecuación x^3 se multiplica por 1, y los demás se multiplican por números enteros. Pero si hay fracciones en ella, se tiene una manera de convertir la ecuación en otra libre de fracciones, y entonces se puede hacer la prueba anterior.

Consideramos, por ejemplo, esta ecuación $x^3-3xx+\frac{11}{4}x-\frac{3}{4}=0$; porque aquí solo hay cuartos, ponemos $x=\frac{y}{2}$, entonces se obtiene

$$\frac{y^3}{8}-\frac{3yy}{4}+\frac{11y}{8}-\frac{3}{4}=0,$$

que multiplicada por 8 da $y^3 - 6yy + 11y - 6 = 0$, cuyas raíces son $y = 1$, $y = 2$, $y = 3$, como vimos anteriormente, por eso para nuestra ecuación obtenemos

$$\text{I.)}\ x = \frac{1}{2}, \quad \text{II.)}\ x = 1, \quad \text{III.)}\ x = \frac{3}{2}.$$

162.

Ahora suponemos que el primer término esté multiplicado por un número y el último término sea 1, como en esta ecuación $6x^3 - 11xx + 6x - 1 = 0$, dividiéndola entre 6 sale $x^3 - \frac{11}{6}xx + x - \frac{1}{6} = 0$, la cual podría ser liberada de las fracciones de acuerdo con la regla anterior poniendo $x = \frac{y}{6}$, entonces se obtiene $\frac{y^3}{216} - \frac{11yy}{216} + \frac{y}{6} - \frac{1}{6} = 0$, y esto multiplicado por 216 da $y^3 - 11yy + 36y - 36 = 0$. Aquí sería laborioso hacer la prueba con todos los divisores del número 36; pero como en nuestra primera ecuación el último término es 1, ponemos $x = \frac{1}{z}$, entonces obtenemos $\frac{6}{z^3} - \frac{11}{z^2} + \frac{6}{z} - 1 = 0$, la cual, multiplicada por z^3, se convierte en $6 - 11z + 6z^2 - z^3 = 0$, y llevando todos los términos al otro lado da $z^3 - 6zz + 11z - 6 = 0$, cuyas raíces son $z = 1$, $z = 2$, $z = 3$; por lo tanto, para nuestra ecuación obtenemos $x = 1$, $x = \frac{1}{2}$, $x = \frac{1}{3}$.

163.

De lo anterior se puede ver que si todas las raíces son números positivos, en la ecuación los signos *más* y *menos* tienen que alternarse, de manera que la ecuación toma la forma: $x^3 - axx + bx - c = 0$, donde ocurren tres alternancias, es decir, tantas como el número de raíces positivas. Pero si todas las tres raíces hubieran sido negativas y estos tres factores $x + p$, $x + q$, $x + r$ hubieran sido multiplicados, entonces todos los términos tendrían el signo *más*, y la ecuación habría obtenido esta forma $x^3 + axx + bx + c = 0$, donde se suceden tres veces dos signos idénticos, es decir, tantos como el número de raíces negativas.

Ahora, de esto se ha sacado la conclusión de que cuantas veces los signos se alternen, tantas raíces positivas tiene la ecuación, pero cuantas veces se sucedan signos iguales, tantas raíces negativas tiene la ecuación. Esta observación es de gran importancia para saber si se tiene que tomar el signo negativo o positivo en los divisores del último término cuando se haga la prueba.

164.

Para explicar esto con un ejemplo, consideremos esta ecuación:

$$x^3 + xx - 34x + 56 = 0,$$

en la cual hay dos alternancias de signos y solo una secuencia del mismo signo, por lo que se concluye que esta ecuación tiene dos raíces positivas y una negativa, que tienen que ser ser los divisores del último término 56 y por lo tanto están dentro de los números ± 1, 2, 4, 7, 8, 14, 28, 56.

Si ahora se pone $x = 2$, entonces $8 + 4 - 68 + 56 = 0$, de lo cual vemos que $x = 2$ es una raíz positiva y por lo tanto $x - 2$ es un divisor de nuestra ecuación, a partir de la cual las dos raíces restantes se pueden encontrar fácilmente dividiendo la ecuación entre $x - 2$ de la siguiente manera

$$\begin{array}{lrrrrl}
x-2) & x^3 & +\ xx & -34x & +56 & (xx + 3x - 28 \\
 & x^3 & -\ 2xx & & & \\
\cline{2-5}
 & & 3xx & -34x & +56 & \\
 & & 3xx & -\ 6x & & \\
\cline{3-5}
 & & & -28x & +56 & \\
 & & & -28x & +56 & \\
\cline{4-5}
 & & & & 0 &
\end{array}$$

Ponemos este cociente $xx+3x-28=0$, de lo cual entonces se encuentran las otras dos raíces, que serán $x=-\frac{3}{2}\pm\frac{11}{2}$, luego estas otras dos raíces son $x=4$ y $x=-7$, a las cuales hay que agregar la de arriba, $x=2$.

De donde está claro que realmente hay dos raíces positivas y una sola raíz negativa; además, quisiéramos explicar esto con los siguientes ejemplos.

165.

I. Pregunta. Hay dos números, su diferencia es 12, si se multiplica su producto por su suma, se obtiene 14560, ¿cuáles son estos números?

El menor sea x, entonces el mayor es $x+12$, su producto es $xx+12x$, este multiplicado por su suma $2x+12$ da $2x^3+36xx+144x=14560$, dividido entre 2 da $x^3+18xx+72x=7280$.

Ahora, ya que el último término 7280 es demasiado grande para realizar la prueba con todos sus divisores, pero el mismo es divisible entre 8, entonces ponemos $x=2y$, porque entonces sale: $8y^3+72yy+144y=7280$, esta ecuación dividida entre 8 es $y^3+9yy+18y=910$, y así solo hay que probar con los divisores del número 910 que son 1, 2, 5, 7, 10, 13 etc. Pero ahora los primeros, 1, 2, 5, son obviamente demasiado pequeños, pero si se toma $y=7$, se obtiene $343+441+126$, justamente $=910$; entonces una de las raíces es $y=7$, por lo tanto $x=14$; si se desea conocer las otras dos raíces de y, se divide $y^3+9yy+18y-910$ entre $y-7$ de la siguiente manera:

$$
\begin{array}{lll}
y-7) & y^3+9yy+18y-910 & (yy+16y+130 \\
 & \underline{y^3-7yy} & \\
 & \quad 16yy+\ 18y-910 & \\
 & \quad \underline{16yy-112y} & \\
 & \qquad\quad 130y-910 & \\
 & \qquad\quad \underline{130y-910} & \\
 & \qquad\qquad 0 &
\end{array}
$$

Si ahora se pone este cociente $yy+16y+130=0$, se obtiene $yy=-16y-130$ y, por lo tanto, $y=-8\pm\sqrt{-66}$, por lo que las otras dos raíces son imposibles.

Respuesta. Los dos números que estamos buscando son 14 y 26, su producto es 364, este multiplicado por su suma 40 da 14560.

166.

II. Pregunta. Buscamos dos números con una diferencia de 18 tales que si se multiplica la diferencia de sus cubos por la suma de los números, se obtenga 275184. ¿Cuáles son estos números?

Sea x el número menor, entonces el mayor es $x+18$, pero el cubo del menor es x^3 y el cubo del mayor $=x^3+54xx+972x+5832$, así que su diferencia es $54xx+972x+5832=54(xx+18x+108)$, la cual debe multiplicarse por la suma de los números, $2x+18=2(x+9)$; pero el producto es $108(x^3+27xx+270x+972)=275184$; dividido entre 108 resulta $x^3+27xx+270x+972=2548$, o sea $x^3+27xx+270x=1576$. Los divisores del número 1576 son 1, 2, 4, 8, etc., donde 1 y 2 son demasiado pequeños, pero poniendo 4 para x, se satisface esta ecuación; si se quisieran encontrar las otras dos raíces, se tendría que dividir la ecuación entre $x-4$ de la siguiente manera:

$$
\begin{array}{lll}
x-4) & x^3+27xx+270x-1576 & (xx+31x+394 \\
 & \underline{x^3-\ \ 4xx\qquad\qquad} & \\
 & \qquad 31xx+270x & \\
 & \qquad \underline{31xx-124x\qquad\qquad} & \\
 & \qquad\qquad 394x-1576 & \\
 & \qquad\qquad \underline{394x-1576} & \\
 & \qquad\qquad\qquad 0 &
\end{array}
$$

Del cociente obtenemos $xx=-31x-394$ y de esto $x=-\frac{31}{2}\pm\sqrt{\frac{961}{4}-\frac{1576}{4}}$, las dos raíces son imaginarias o imposibles.

Respuesta. Entonces, los números buscados son 4 y 22.

167.

III. Pregunta. Busco dos números cuya diferencia sea 720; si multiplico la raíz cuadrada del número más grande por el número más pequeño, resulta 20736. ¿Qué números son?

El menor sea $=x$, entonces el mayor es $x+720$ y debe ser

$$x\sqrt{x+720}=20736=8\cdot 8\cdot 4\cdot 81.$$

Ahora tomamos los cuadrados de ambos lados y tenemos:

$$xx(x+720)=x^3+720xx=8^2\cdot 8^2\cdot 4^2\cdot 81^2.$$

Ponemos $x=8y$, entonces será

$$8^3y^3+720\cdot 8^2y^2=8^2\cdot 8^2\cdot 4^2\cdot 81^2,$$

dividido entre 8^3, da $y^3+90y^2=8\cdot 4^2\cdot 81^2$; ahora sea $y=2z$, entonces $8z^3+4\cdot 90zz=8\cdot 4^2\cdot 81^2$, dividiendo entre 8 obtenemos $z^3+45zz=4^2\cdot 81^2$. Además, ponemos $z=9$u de modo que $9^3u^3+45\cdot 9^2uu=4^2\cdot 9^4$, dividido entre 9^3 es

$u^3 + 5uu = 4^2 \cdot 9$, o sea $uu(u+5) = 16 \cdot 9 = 144$. Aquí se puede ver claramente que $u = 4$: porque $uu = 16$ y $u + 5 = 9$; ya que ahora $u = 4$, entonces son $z = 36$, $y = 72$, y $x = 576$, que fue el número menor, pero el número mayor 1296, cuya raíz cuadrada 36 multiplicada por el número más pequeño 576 da 20736.

168.

Nota. Esta pregunta se puede resolver más cómodamente de la siguiente manera; ya que el número mayor tiene que ser un cuadrado, porque si no su raíz multiplicada por el menor no produciría el número dado, suponemos que el número mayor sea xx, entonces el menor es $xx - 720$, que multiplicado por la raíz cuadrada de aquel, es decir, por x, da $x^3 - 720x = 20736 = 64 \cdot 27 \cdot 12$; pone-mos $x = 4y$, entonces $64y^3 - 720 \cdot 4y = 64 \cdot 27 \cdot 12$, dividido entre 64 da $y^3 - 45y = 27 \cdot 12$; además ponemos $y = 3z$, entonces $27z^3 - 135z = 27 \cdot 12$, dividido entre 27 da $z^3 - 5z = 12$, o sea $z^3 - 5z - 12 = 0$.

Los divisores de 12 son 1, 2, 3, 4, 6, 12, de los cuales 1 y 2 son demasiado pequeños, pero si ponemos $z = 3$, sale $27 - 15 - 12 = 0$; por lo tanto tenemos $z = 3$, $y = 9$, $x = 36$; entonces el número mayor es $xx = 1296$ y el menor $xx - 720 = 576$, como arriba.

169.

IV. Pregunta. Hay 2 números cuya diferencia es 12. Si se multiplica esta diferencia por la suma de sus cubos, se obtiene 102144. ¿Qué números son?

Sea x el menor, así el mayor es $x + 12$, el cubo del primero es x^3, pero el del otro da $x^3 + 36xx + 432x + 1728$, cuya suma multiplicada por 12 es

$$12(2x^3 + 36xx + 432x + 1728) = 102144;$$

dividido entre 12 será $2x^3+36xx+432x+1728=8512$, dividido entre 2 da $x^3+18xx+216x+864=4256$, o sea $x^3+18xx+216x=3392=8\cdot 8\cdot 53$. Ponemos $x=2y$ e inmediatamente dividimos entre 8, entonces obtenemos $y^3+9yy+54y=8\cdot 53=424$.

Los factores del último término son 1, 2, 4, 8, 53, etc., de los cuales 1 y 2 son demasiado pequeños; pero si se pone $y=4$, tenemos $64+144+216=424$. Entonces $y=4$ y $x=8$; por lo tanto, los dos números son 8 y 20.

170.

V. Pregunta. Varias personas establecen una sociedad, cada socio invierte diez veces más florines que personas. Con 100 florines cada socio gana 6 florines más de lo que indica el número de socios. Ahora se da que la ganancia total asciende a 392 florines. ¿Cuántos socios había?

Suponemos que hayan sido x socios, entonces uno invierte $10x$ florines, pero todos juntos invierten $10xx$ florines, y con 100 florines ganan 6 florines más de lo que indica su número. Entonces con 100 florines ganan $x+6$ florines y con todo el capital ganan $\frac{x^3+6xx}{10}=392$. Multiplicando por 10 se obtiene $x^3+6xx=3920$. Si ponemos $x=2y$, obtenemos $8y^3+24yy=3920$, que dividido entre 8 da $y^3+3yy=490$. Los divisores del último término son 1, 2, 5, 7, 10, etc. de los cuales 1, 2 y 5 son demasiado pequeños. Pero poniendo $y=7$ se obtiene $343+147=490$, entonces $y=7$ y $x=14$.

Respuesta. Había 14 socios y cada uno invirtió 140 florines.

171.

VI. Pregunta. Algunos comerciantes juntos tienen un capital de 8240 tál., adicionalmente, cada uno pone 40 veces más tál. de lo que indica el número de socios. Con toda esta suma ganan tanto por ciento como indica el número de socios; luego se reparten la ganancia y allí se dan cuenta que, después de haber tomado cada uno diez veces más táleros de lo que indica el número de socios, todavía quedan 224 tál. ¿Cuántos socios había?

El número de socios sea $= x$, entonces cada uno agrega $40x$ tál. al capital de 8240 tál., así que todos juntos agregan $40xx$ tál., por lo que el total fue $40xx + 8240$, con esto ganan x tál por cada 100 tál., por lo tanto la ganacia total será: $\frac{40x^3}{100} + \frac{8240x}{100} = \frac{4}{10}x^3 + \frac{824}{10}x = \frac{2}{5}x^3 + \frac{412}{5}x.$ De esta, cada uno toma $10x$ tál. y todos juntos $10xx$ tál., y todavía quedan 224 tál., de lo cual se puede ver que la ganancia fue: $10xx + 224$, de donde surge esta ecuación $\frac{2}{5}x^3 + \frac{412}{5}x = 10xx + 224$, que multiplicada por 5 y dividida entre 2 da

$$x^3 + 206x = 25xx + 560, \quad \text{o} \quad x^3 - 25xx + 206x - 560 = 0.$$

Pero para hacer las pruebas, la primera forma será más conveniente; aquí los divisores del último término son: 1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 14, 16, etc. los cuales tienen que tomarse positivos, porque en la última ecuación hay tres alternancias de signos, de las cuales se puede concluir con seguridad que las tres raíces son positivas. Si se intenta ahora con $x = 1$ o $x = 2$, es evidente que la primera parte se vuelve mucho más pequeña que la segunda. Por eso probamos los siguientes: si $x = 4$, entonces será $64 + 824 = 400 + 560$, lo cual no se cumple; si $x = 5$, entonces será $125 + 1030 = 625 + 560$, lo cual no se cumple; cuando $x = 7$, entonces será $343 + 1442 = 1225 + 560$, lo cual se cumple: por lo tanto, $x = 7$ es una raíz de nuestra ecuación. Para encontrar las otras dos, divídase la última forma entre $x - 7$ de la siguiente manera:

$$
\begin{array}{lll}
x-7) & x^3-25xx+206x-560 & (xx-18x+80 \\
 & \underline{x^3-\ \ 7xx\qquad\qquad} & \\
 & \quad -18xx+206x & \\
 & \quad \underline{-18xx+126x\qquad\quad} & \\
 & \qquad\qquad\quad 80x-560 & \\
 & \qquad\qquad\quad \underline{80x-560} & \\
 & \qquad\qquad\qquad\quad 0 &
\end{array}
$$

Entonces ponemos el cociente igual a 0, así obtenemos

$$xx-18x+80=0 \quad \text{o} \quad xx=18x-80,$$

por lo tanto $x=9\pm 1$, entonces las otras dos raíces son $x=8$ y $x=10$.

Respuesta. Hay tres respuestas a esta pregunta: según la primera el número de comerciantes fue 7, según la segunda el mismo fue 8, según la tercera 10, como indica la prueba añadida aquí.

	I.	II.	III.
El número de comerciantes	7	8	10
Cada uno invierte $40x$....................	280	320	400
así todos juntos invierten $40xx$	1960	2560	4000
el capital antiguo fue	8240	8240	8240
el capital total es $40xx+8240$........	10200	10800	12240
con él se gana tanto por ciento como el número de socios........................	714	864	1224
de esto cada uno quita $10x$.............	70	80	100
entonces todos juntos $10xx$.............	490	640	1000
entonces quedan	224	224	224

CAPÍTULO 12

DE LA REGLA DE CARDANO O DE SCIPIONE FERRO

172.

Si una ecuación cúbica se reduce a números enteros, como se mostró anteriormente, y ningún divisor del último término es una raíz de la ecuación, esto es una señal segura de que la ecuación no tiene raíz en números enteros, pero tampoco en fracciones, lo cual se demuestra como sigue.

Consideramos la ecuación $x^3 - axx + bx - c = 0$, donde a, b y c son números enteros, entonces si p. ej. ponemos $x = \frac{3}{2}$, obtenemos $\frac{27}{8} - \frac{9}{4}a + \frac{3}{2}b - c$; aquí el primer término solo tiene 8 como denominador. Los demás solo se dividen entre 4 y 2 o son números enteros, que por lo tanto, junto con el primero, no pueden convertirse en 0, y esto también se aplica a todas las demás fracciones.

173.

Dado que en estos casos las raíces de la ecuación no son números enteros ni fracciones, entonces son irracionales y a menudo incluso imaginarias. Cómo se van a expresar y qué tipos de signos de raíz aparecen es un asunto de gran importancia cuya solución se atribuyó a CARDANO o más bien a SCIPIONE FERRO hace unos cientos de años, que por lo tanto merece ser explicado aquí con toda dedicación.

174.

Para este propósito hay que considerar detalladamente la naturaleza de un cubo cuya raíz es un binomio:

Sea la raíz $a + b$, entonces su cubo es $a^3 + 3aab + 3abb + b^3$, que consta primero del cubo de cada parte y además de estos también contiene dos términos intermedios, es decir, $3aab+3abb$, que ambos tienen $3ab$ como factor, pero el otro factor es $a+b$. Porque $3ab$ multiplicado por $a+b$ da $3aab+3abb$. Estos dos términos contienen el triple del producto de las dos partes a y b multiplicado por su suma.

175.

Ahora ponemos $x=a+b$ y tomamos el cubo en ambos lados, entonces $x^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$. Como $a+b=x$, tenemos la ecuación cúbica $x^3=a^3+b^3+3abx$, o sea, $x^3=3abx+a^3+b^3$, de la cual sabemos que una raíz es $x=a+b$. Por lo tanto, siempre que ocurra una ecuación de este tipo, podemos mostrar una raíz de ella.

Sean p. ej. $a=2$ y $b=3$, entonces se obtiene esta ecuación $x^3=18x+35$, de la cual sabemos con certeza que $x=5$ es una raíz.

176.

Ahora además también ponemos $a^3=p$ y $b^3=q$, entonces $a=\sqrt[3]{p}$ y $b=\sqrt[3]{q}$, por lo tanto $ab=\sqrt[3]{pq}$; por eso, si se da esta ecuación cúbica

$$x^3=3x\sqrt[3]{pq}+p+q,$$

entonces $\sqrt[3]{p}+\sqrt[3]{q}$ será una raíz de ella.

Pero siempre se pueden determinar p y q de tal manera que tanto $3\sqrt[3]{pq}$ como $p+q$ sean iguales a cualquier número dado, lo que permite resolver cualquier ecuación cúbica de este tipo.

177.

Por eso consideramos esta ecuación cúbica general $x^3=fx+g$. Aquí f tiene que compararse con $3\sqrt[3]{pq}$, y g

con $p+q$; es decir, se tienen que determinar p y q de tal manera que $3\sqrt[3]{pq}$ sea igual al número f, y $p+q$ sea igual al número g, y entonces sabemos que una raíz de nuestra ecuación será $x=\sqrt[3]{p}+\sqrt[3]{q}$.

178.

Entonces se tienen que resolver estas dos ecuaciones

$$\text{I.)}\ 3\sqrt[3]{pq}=f \quad \text{y} \quad \text{II.)}\ p+q=g.$$

De la primera se tiene $\sqrt[3]{pq}=\frac{f}{3}$ y $pq=\frac{f^3}{27}=\frac{1}{27}f^3$ y $4pq=\frac{4}{27}f^3$; cuadrando la segunda ecuación resulta $pp+2pq+qq=gg$; de esta se resta $4pq=\frac{4}{27}f^3$, obtenemos $pp-2pq+qq=gg-\frac{4}{27}f^3$, cuya raíz cuadrada es $p-q=\sqrt{gg-\frac{4}{27}f^3}$. Como ahora $p+q=g$, entonces serán $2p=g+\sqrt{gg-\frac{4}{27}f^3}$ y $2q=g-\sqrt{gg-\frac{4}{27}f^3}$, por lo tanto obtenemos

$$p=\frac{g+\sqrt{gg-\frac{4}{27}f^3}}{2} \quad \text{y} \quad q=\frac{g-\sqrt{gg-\frac{4}{27}f^3}}{2}.$$

179.

Por lo tanto, si se da una ecuación cúbica de la forma $x^3=fx+g$, donde los números f y g pueden ser de la naturaleza que quieran, entonces una raíz de ella siempre será

$$x=\sqrt[3]{\frac{g+\sqrt{gg-\frac{4}{27}f^3}}{2}}+\sqrt[3]{\frac{g-\sqrt{gg-\frac{4}{27}f^3}}{2}};$$

de donde es evidente que esta irracionalidad incluye no solo el signo de la raíz cuadrada, sino también el signo de la raíz cúbica, y esta fórmula es la que se suele llamar la regla de CARDANO.

180.

Quisiéramos explicar la regla con algunos ejemplos.

Sea $x^3 = 6x + 9$, entonces aquí son $f = 6$ y $g = 9$, luego $gg = 81$, $f^3 = 216$ y $\frac{4}{27} f^3 = 32$. Por lo tanto, $gg - \frac{4}{27} f^3 = 49$ y $\sqrt{gg - \frac{4}{27} f^3} = 7$; por lo tanto, una raíz de la ecuación dada será $x = \sqrt[3]{\frac{9+7}{2}} + \sqrt[3]{\frac{9-7}{2}}$, esto es $x = \sqrt[3]{\frac{16}{2}} + \sqrt[3]{1} = \sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{1}$, o sea $x = 2 + 1 = 3$. Entonces $x = 3$ es una raíz de la ecuación dada.

181.

Además, consideramos dada esta ecuación $x^3 = 3x + 2$, entonces $f = 3$ y $g = 2$, luego $gg = 4$, $f^3 = 27$ y $\frac{4}{27} f^3 = 4$; por eso la raíz cuadrada de $gg - \frac{4}{27} f^3$ es $= 0$; por lo tanto una raíz será

$$x = \sqrt[3]{\frac{2+0}{2}} + \sqrt[3]{\frac{2-0}{2}} = 1 + 1 = 2.$$

182.

Aunque una ecuación de este tipo tenga una raíz racional, a menudo sucede que la misma no se puede encontrar mediante esta regla, a pesar de que esté contenida en ella.

Suponemos dada esta ecuación $x^3 = 6x + 40$, donde $x = 4$ es una raíz. Aquí tenemos $f = 6$ y $g = 40$, luego $gg = 1600$ y $\frac{4}{27} f^3 = 32$, por lo tanto $gg - \frac{4}{27} f^3 = 1568$ y

$\sqrt{gg-\frac{4}{27}f^3}=\sqrt{1568}=\sqrt{4\cdot 4\cdot 49\cdot 2}=28\sqrt{2}$; entonces una raíz será

$$x=\sqrt[3]{\frac{40+28\sqrt{2}}{2}}+\sqrt[3]{\frac{40-28\sqrt{2}}{2}} \quad \text{o sea}$$

$$x=\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}},$$

expresión que de hecho da 4, aunque no salte a la vista.

Porque dado que el cubo de $2+\sqrt{2}$ es $20+14\sqrt{2}$, entonces, al revés, la raíz cúbica de $20+14\sqrt{2}$ es igual a $2+\sqrt{2}$, y así también

$$\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}=2-\sqrt{2},$$

por lo tanto nuestra raíz será $x=2+\sqrt{2}+2-\sqrt{2}=4$.

183.

Se puede objetar a esta regla que no se extiende a todas las ecuaciones cúbicas, porque no contiene el cuadrado de x, o porque falta el segundo término. Pero debe notarse que cualquier ecuación completa siempre se puede transformar en otra en la que falte el segundo término y a la que entonces se puede aplicar esta regla. Para mostrar esto, suponemos dada esta ecuación cúbica completa $x^3-6xx+11x-6=0$. Ahora tomamos la tercera parte del número 6 en el segundo término y ponemos $x-2=y$, entonces $x=y+2$, y el resto del cálculo es como sigue:
ya que

$$x=y+2,$$

$$xx=yy+4y+4,$$

$$x^3=y^3+6yy+12y+8,$$

entonces tenemos

$$\begin{array}{rrrrr} & x^3 = y^3 & +6yy & +12y & +\ 8 \\ & -6xx = & -6yy & -24y & -24 \\ & +11x = & & +11y & +22 \\ & -6 = & & & -\ 6 \\ \hline x^3-6xx+11x-6 = y^3 & & & -\ y. & \end{array}$$

Por eso obtenemos la ecuación $y^3 - y = 0$, cuya resolución salta a la vista inmediatamente, porque tenemos los factores

$$y(yy-1) = y(y+1)(y-1) = 0.$$

Si igualamos cada uno de los factores a 0, obtenemos:

$$\text{I. } \begin{cases} y = 0, \\ x = 2, \end{cases} \qquad \text{II. } \begin{cases} y = -1, \\ x = \ \ 1, \end{cases} \qquad \text{III. } \begin{cases} y = 1, \\ x = 3, \end{cases}$$

que son las tres raíces ya encontradas arriba [§ 158].

184.

Consideramos esta ecuación cúbica general:

$$x^3 + axx + bx + c = 0,$$

de la cual se tiene que eliminar el segundo término.

Para este fin a x se le agrega la tercera parte del número del segundo término y para la suma se escribe una nueva letra, por ejemplo y. Según esta regla tendremos $x + \frac{1}{3}a = y$, luego $x = y - \frac{1}{3}a$, de lo cual surge el siguiente cálculo:

$$x = y - \tfrac{1}{3}a,$$

$$xx = yy - \tfrac{2}{3}ay + \tfrac{1}{9}aa, \quad \text{además}$$

$$x^3 = y^3 - ayy + \tfrac{1}{3}aay - \tfrac{1}{27}a^3;$$

entonces

$$
\begin{array}{rl}
x^3 = & y^3 - ayy + \frac{1}{3}aay - \frac{1}{27}a^3 \\
axx = & \quad + ayy - \frac{2}{3}aay + \frac{1}{9}a^3 \\
bx = & \qquad\qquad + by \quad - \frac{1}{3}ab \\
c = & \qquad\qquad\qquad\quad + c \\
\hline
\multicolumn{2}{l}{y^3 - \left(\frac{1}{3}aa - b\right)y + \frac{2}{27}a^3 - \frac{1}{3}ab + c = 0,}
\end{array}
$$

ecuación en la cual falta el segundo término.

185.

Ahora la regla de CARDANO se puede aplicar fácilmente a este caso. Porque dado que arriba teníamos la ecuación $x^3 = fx + g$, o sea $x^3 - fx - g = 0$, en nuestro caso son $f = \frac{1}{3}aa - b$ y $g = -\frac{2}{27}a^3 + \frac{1}{3}ab - c$. De estos valores encontrados para las letras f y g obtenemos como arriba:

$$y = \sqrt[3]{\frac{g + \sqrt{gg - \frac{4}{27}f^3}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{g - \sqrt{gg - \frac{4}{27}f^3}}{2}},$$

y ya que así se ha encontrado y, entonces para la ecuación dada tendremos: $x = y - \frac{1}{3}a$.

186.

Con la ayuda de esta transformación, ahora somos capaces de encontrar las raíces de todas las ecuaciones cúbicas, lo cual queremos mostrar con el siguiente ejemplo. Sea la ecuación dada como sigue

$$x^3 - 6xx + 13x - 12 = 0.$$

Para eliminar el segundo término aquí, se pone $x - 2 = y$, entonces tendremos:

$$x = y + 2, \quad xx = yy + 4y + 4, \quad \text{además}$$

$$x^3 = y^3 + 6yy + 12y + 8,$$

por lo tanto

$$\begin{array}{rl} x^3 = & y^3 + 6yy + 12y + \ \ 8 \\ -6xx = & \quad -6yy - 24y - 24 \\ +13x = & \qquad\qquad +13y + 26 \\ -\ \ 12 = & \qquad\qquad\qquad\quad -12 \\ \hline & y^3 + y - 2 = 0 \end{array}$$

o sea $y^3 = -y + 2$, que comparada con la fórmula $x^3 = fx + g$ da $f = -1$, $g = 2$; así $gg = 4$ y $\frac{4}{27} f^3 = -\frac{4}{27}$. Entonces $gg - \frac{4}{27} f^3 = 4 + \frac{4}{27} = \frac{112}{27}$; por lo tanto obtenemos $\sqrt{gg - \frac{4}{27} f^3} = \sqrt{\frac{112}{27}} = \frac{4\sqrt{21}}{9}$, de lo que resulta

$$y = \sqrt[3]{\frac{2 + \frac{4\sqrt{21}}{9}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{2 - \frac{4\sqrt{21}}{9}}{2}},\ \text{o sea}$$

$$y = \sqrt[3]{1 + \frac{2\sqrt{21}}{9}} + \sqrt[3]{1 - \frac{2\sqrt{21}}{9}},\ \text{o sea}$$

$$y = \sqrt[3]{\frac{9 + 2\sqrt{21}}{9}} + \sqrt[3]{\frac{9 - 2\sqrt{21}}{9}},\ \text{o sea}$$

$$y = \sqrt[3]{\frac{27 + 6\sqrt{21}}{27}} + \sqrt[3]{\frac{27 - 6\sqrt{21}}{27}},\ \text{o sea}$$

$$y = \frac{1}{3}\sqrt[3]{27 + 6\sqrt{21}} + \frac{1}{3}\sqrt[3]{27 - 6\sqrt{21}};$$

y luego se obtiene $x = y + 2$.

187.

En la resolución de este ejemplo nos hemos topado con una doble irracionalidad, pero no se tiene que concluir en absoluto que la raíz es irracional, ya que por suerte podría suceder que los binomios $27 \pm 6\sqrt{21}$ realmente sean cubos. Esto también se da aquí, porque dado que el cubo de $\frac{3+\sqrt{21}}{2}$

es igual a $\frac{216+48\sqrt{21}}{8}=27+6\sqrt{21}$, entonces la raíz cúbica de $27+6\sqrt{21}$ es $\frac{3+\sqrt{21}}{2}$ y la raíz cúbica de $27-6\sqrt{21}$ es $\frac{3-\sqrt{21}}{2}$. Por ello el valor anterior de y será $y=\frac{1}{3}\left(\frac{3+\sqrt{21}}{2}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{3-\sqrt{21}}{2}\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$. Ya que ahora $y=1$, obtenemos $x=3$, que es una raíz de la ecuación dada. Si se quisiera encontrar las otras dos también, se tendría que dividir la ecuación entre $x-3$ como sigue:

$$\begin{array}{lll}
x-3) & x^3-6xx+13x-12 & (xx-3x+4 \\
 & \underline{x^3-3xx} & \\
 & \quad -3xx+13x & \\
 & \quad \underline{-3xx+\ \ 9x} & \\
 & \qquad\quad +4x-12 & \\
 & \qquad\quad \underline{+4x-12} & \\
 & \qquad\qquad\ 0 &
\end{array}$$

y ponemos este cociente $xx-3x+4=0$, de modo que $xx=3x-4$ y $x=\frac{3}{2}\pm\sqrt{\frac{9}{4}-\frac{16}{4}}=\frac{3}{2}\pm\sqrt{-\frac{7}{4}}$, o $x=\frac{3\pm\sqrt{-7}}{2}$. Estas son ahora las otras dos raíces, que son ambas imaginarias.

188.

Pero aquí fue solamente suerte que realmente se pudiera extraer la raíz cúbica de los binomios encontrados, lo que solo ocurre en aquellos casos en los que la ecuación tiene una raíz racional, la cual se puede encontrar mucho más fácil según las reglas del capítulo anterior; pero si una raíz no es racional, no hay otra manera de expresarla que según la regla de CARDANO, por lo que no se puede abreviar más, como pasa por ejemplo en esta ecuación $x^3=6x+4$, donde $f=6$ y $g=4$. Por lo tanto, se encuentra

$$x = \sqrt[3]{2+2\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{2-2\sqrt{-1}},$$

que no se puede expresar de otra manera.

CAPÍTULO 13

DE LA RESOLUCIÓN DE LAS ECUACIONES DE CUARTO GRADO, TAMBIEN LLAMADAS ECUACIONES BICUADRÁTICAS

189.

Si la potencia más alta del número x aumenta al cuarto grado, entonces tales ecuaciones se llaman *de cuarto grado* o *bicuadráticas*, de las cuales la forma general será:

$$x^4 + ax^3 + bxx + cx + d = 0.$$

Consideramos primero las denominadas ecuaciones bicuadráticas *puras*, cuya forma es $x^4 = f$, de la cual se encuentra la raíz inmediatamente sacando la raíz cuarta en ambos lados, ya que entonces se obtiene $x = \sqrt[4]{f}$.

190.

Dado que x^4 es el cuadrado de xx, el cálculo se explica bastante, si primero se extrae sólo la raíz cuadrada, ya que entonces se obtiene $xx = \sqrt{f}$; luego se saca la raíz cuadrada una vez más, así que se obtiene $x = \sqrt{\sqrt{f}}$, de modo que $\sqrt[4]{f}$ no es otra cosa que la raíz cuadrada de la raíz cuadrada de f.

Si por ejemplo tuviéramos esta ecuación $x^4 = 2401$, entonces primero se encuentra $xx = 49$ y luego $x = 7$.

191.

Pero de tal forma solo se puede encontrar una raíz, y como siempre hay tres raíces cúbicas, no hay duda de que debería haber cuatro raíces, que ahora también se pueden hallar de esta manera. Porque dado que del último ejemplo resulta no solo $xx = 49$ sino también $xx = -49$, entonces de la primera ecuación obtenemos estas dos raíces $x = 7$, $x = -7$, pero de la segunda obtenemos también: $x = \sqrt{-49} = 7\sqrt{-1}$ y $x = -\sqrt{-49} = -7\sqrt{-1}$, que son las cuatro raíces cuartas de 2401. Y así es con todos los demás números.

192.

En su debido orden, después de estas ecuaciones puras siguen aquellas en las que faltan el segundo y cuarto término, o sea que tienen esta forma:

$$x^4 + fxx + g = 0,$$

que se puede resolver según la regla de las ecuaciones cuadráticas. Porque si ponemos $xx = y$, entonces se tiene

$$yy + fy + g = 0, \quad \text{o sea} \quad yy = -fy - g,$$

de la cual se encuentra:

$$y = -\tfrac{1}{2} f \pm \sqrt{\tfrac{1}{4} ff - g} = \frac{-f \pm \sqrt{ff - 4g}}{2}.$$

Como ahora $xx = y$, entonces resulta $x = \pm\sqrt{\dfrac{-f \pm \sqrt{ff-4g}}{2}}$, donde los signos ambiguos $\pm$ indican todas las cuatro raíces.

193.

Pero si todos los términos aparecen en la ecuación, ella siempre puede verse como un producto de cuatro factores. Porque si estos cuatro factores $(x-p)(x-q)(x-r)(x-s)$

se multiplican entre sí, entonces se encuentra el producto siguiente

$$x^4 - (p+q+r+s)x^3 + (pq+pr+ps+qr+qs+rs)xx$$
$$- (pqr+pqs+prs+qrs)x + pqrs,$$

expresión que no puede ser igual a 0 de otro modo que cuando uno de los cuatro factores anteriores sea = 0. Esto puede suceder de cuatro formas diferentes,

I.) si $x=p$, II.) $x=q$, III.) $x=r$, IV.) $x=s$,

que son las cuatro raíces de esta ecuación.

194.

Si miramos más de cerca esta forma, encontramos que en el segundo término aparece la suma de las cuatro raíces, la cual se multiplica por $-x^3$, en el tercer término está la suma de los productos de dos raíces multiplicadas entre sí, que se multiplica por xx, en el cuarto término vemos la suma de los productos de tres raíces multiplicadas entre sí, que se multiplica por $-x$, y finalmente el quinto y último término contiene el producto de todas las cuatro raíces multiplicadas entre sí.

195.

Dado que el último término contiene el producto de todas las raíces, dicha ecuación bicuadrática no puede tener otras raíces racionales que las que sean a la vez divisores del último término, de modo que por esta razón todas las raíces racionales, si existen, pueden ser encontrados fácilmente si se pone cada divisor del último término para x paso a paso, y prueba cuál satisface la ecuación; pero si ya se ha encontrado una sola raíz, p. ej. $x=p$, entonces solo se necesita dividir la ecuación entre $x-p$ después de que todos los términos se hayan llevado a un lado, e igualar el cociente a 0, lo que dará una ecuación cúbica que se puede resolver según las reglas anteriores.

196.

Pero ahora para esto se requiere inevitablemente que todos los términos consten de números enteros, y que el primero esté solo, es decir, que se multiplique solo por 1; entonces, si hay fracciones en algunos términos, estas tienen que eliminarse de antemano, lo cual se puede lograr siempre si en lugar de x se escribe y dividida entre un número que incluya los denominadores de las fracciones:

si se diera esta ecuación

$$x^4 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{3}xx - \frac{3}{4}x + \frac{1}{18} = 0,$$

entonces, como los denominadores contienen 2 y 3 junto con sus potencias, ponemos

$$x = \frac{y}{6}, \quad \text{luego} \quad \frac{y^4}{6^4} - \frac{\frac{1}{2}y^3}{6^3} + \frac{\frac{1}{3}yy}{6^2} - \frac{\frac{3}{4}y}{6} + \frac{1}{18} = 0,$$

que multiplicado por 6^4 da

$$y^4 - 3y^3 + 12yy - 162y + 72 = 0.$$

Si se quisiera averiguar si esta ecuación tiene raíces racionales, en lugar de y se tendría que escribir los divisores del número 72 paso a paso para ver en cuáles casos la expresión realmente se convierte en 0.

197.

Pero como las raíces pueden ser tanto negativas como positivas, habría que hacer dos pruebas con cada divisor, la primera tomándolo positivo, y la otra tomándolo negativo. Pero aquí nuevamente hay que notar que cuantas veces los dos signos + y – se alternan entre sí, tantas raíces positivas tiene la ecuación; pero cuantas veces haya signos iguales consecutivos, tantas raíces negativas tiene que haber. Dado que ahora hay 4 alternancias en nuestro ejemplo, y ningunos signos iguales consecutivos, todas las raíces son positivas y, por lo tanto, no es necesario tomar negativo ningún divisor del último término.

198.

Por ejemplo, consideramos dada esta ecuación $x^4+2x^3-7xx-8x+12=0$. Ahora hay dos alternancias de los signos, y también dos sucesiones, de lo cual se puede concluir con certeza que esta ecuación tiene dos raíces positivas y dos raíces negativas, y todas tienen que ser divisores del número 12. Ya que estos divisores son 1, 2, 3, 4, 6, 12, primero probamos $x=+1$, el resultado es realmente 0, por lo que una raíz es $x=1$. Si además ponemos $x=-1$, resulta $+1-2-7+8+12=21-9=12$, y por eso $x=-1$ no es una raíz. Si además también se pone $x=2$, entonces nuestra expresión nuevamente es = 0, y por lo tanto $x=2$ es una raíz; pero $x=-2$ también funciona. Si se pone $x=3$, entonces sale $81+54-63-24+12=60$, por lo tanto no funciona; pero si se pone $x=-3$, esto da $81-54-63+24+12=0$, consecuentemente $x=-3$ es una raíz; así que las cuatro raíces son racionales y tienen los siguientes valores

I.) $x=1$, II.) $x=2$, III.) $x=-2$, IV.) $x=-3$,

de los cuales dos son positivos y dos son negativos, como lo indica la regla anterior.

199.

Pero si ninguna raíz es racional, tampoco se puede encontrar ninguna de esta manera; por eso se han buscado caminos para poder expresar las raíces irracionales en estos casos. Afortunadamente se han descubierto dos caminos diferentes para llegar al conocimiento de tales raíces, sea como sea la ecuación bicuadrática.

Pero antes de exponer estos métodos generales, será conveniente resolver algunos casos especiales que a menudo se pueden aplicar con utilidad.

200.

Si la ecuación es tal que los números en los términos van de la misma manera tanto hacia atrás como hacia adelante, como sucede en esta ecuación:

$$x^4 + mx^3 + nxx + mx + 1 = 0,$$

la cual se puede generalizar un poco más:

$$x^4 + max^3 + naaxx + ma^3x + a^4 = 0,$$

entonces tal forma siempre se puede considerar como un producto de dos factores que son expresiones cuadráticas, y que se pueden determinar fácilmente: porque para esta ecuación planteamos el siguiente producto

$$(xx + pax + aa)(xx + qax + aa) = 0,$$

donde se tienen que buscar p y q tales que resulte la ecuación de arriba. Pero efectuando la multiplicación se encuentra

$$x^4 + (p+q)ax^3 + (pq+2)aaxx + (p+q)a^3x + a^4 = 0;$$

para que esta ecuación sea la misma que la dada, se requieren las siguientes dos cosas: I.) que $p+q=m$ y II.) que $pq+2=n$, o sea $pq=n-2$.

La primera de estas dos ecuaciones al cuadrado da $pp+2pq+qq=mm$, la otra se toma cuatro veces, es decir, $4pq=4n-8$, y restándola queda

$$pp - 2pq + qq = mm - 4n + 8,$$

de la cual la raíz cuadrada es: $p-q=\sqrt{mm-4n+8}$. Como $p+q=m$, sumándolas obtenemos

$$2p = m + \sqrt{mm-4n+8} \quad \text{o sea} \quad p = \frac{m+\sqrt{mm-4n+8}}{2};$$

pero restándolas obtenemos

$$2q = m - \sqrt{mm-4n+8} \quad \text{o sea} \quad q = \frac{m-\sqrt{mm-4n+8}}{2}.$$

Si ahora se han encontrado p y q, solo se necesita poner cada uno de los factores $=0$ para encontrar los valores de x. El primer factor da $xx+pax+aa=0$, o sea $xx=-pax-aa$, de donde se encuentra

$$x=-\frac{pa}{2}\pm\sqrt{\frac{ppaa}{4}-aa} \quad \text{o sea} \quad x=-\frac{pa}{2}\pm a\sqrt{\frac{pp}{4}-1}$$

$$\text{o sea} \quad x=-\tfrac{1}{2}\,pa\pm\tfrac{1}{2}\,a\sqrt{pp-4};$$

el segundo factor da

$$x=-\tfrac{1}{2}\,qa\pm\tfrac{1}{2}\,a\sqrt{qq-4}$$

y así tenemos las cuatro raíces de la ecuación dada.

201.

Para explicar esto, sea dada esta ecuación

$$x^4-4x^3-3xx-4x+1=0.$$

Aquí es $a=1$, $m=-4$, $n=-3$, por tanto $mm-4n+8=36$ y la raíz cuadrada de esto es $=6$; por lo tanto obtenemos $p=\frac{-4+6}{2}=1$ y $q=\frac{-4-6}{2}=-5$, así que las cuatro raíces serán:

$$\text{I.) y II.)} \quad x=-\tfrac{1}{2}\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{-3}=\tfrac{-1\pm\sqrt{-3}}{2};$$

y además

$$\text{III.) y IV.)} \quad x=\tfrac{5}{2}\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{21}=\tfrac{5\pm\sqrt{21}}{2};$$

entonces las cuatro raíces de la ecuación dada son las siguientes

$$\text{I.)}\ x=\frac{-1+\sqrt{-3}}{2},\qquad \text{II.)}\ x=\frac{-1-\sqrt{-3}}{2},$$
$$\text{III.)}\ x=\frac{5+\sqrt{21}}{2},\qquad \text{IV.)}\ x=\frac{5-\sqrt{21}}{2},$$

las dos primeras de ellas son imaginarias o imposibles, pero las otras dos son posibles porque $\sqrt{21}$ se puede indicar con la precisión que se desee expresando la raíz con fracciones decimales. Porque como 21 es tanto como 21,00000000, se saca la raíz cuadrada de la siguiente manera:

$$\begin{array}{ll}
 & 21|00|00|00|00 \quad (4,5825 \\
 & 16| \\ \hline
85 & |500 \\
 & |425 \\ \hline
908 & |7500 \\
 & |7264 \\ \hline
9162 & |23600 \\
 & |18324 \\ \hline
91645 & |527600 \\
 & |458225 \\ \hline
 & \quad 69375
\end{array}$$

Ya que $\sqrt{21}=4,5825$, entonces la tercera raíz [de la ecuación] es $x=4,7912$ con bastante precisión, y la cuarta $x=0,2087$, que podrían haberse calculado fácilmente con mayor precisión.

Debido a que la cuarta raíz se acerca bastante a $\frac{2}{10}$, o sea $\frac{1}{5}$, entonces este valor también satisfará la ecuación con bastante exactitud; poniendo luego $x=\frac{1}{5}$, obtenemos $\frac{1}{625}-\frac{4}{125}-\frac{3}{25}-\frac{4}{5}+1=\frac{31}{625}$, que debería ser $=0$, lo que se cumple con bastante precisión.

202.

El segundo caso, donde procede una resolución similar, es igual al anterior respecto a los números, solo que el segundo y cuarto término tienen signos distintos; tal ecuación es por lo tanto:

$$x^4 + max^3 + naaxx - ma^3x + a^4 = 0,$$

la cual puede representarse por el siguiente producto

$$(xx + pax - aa)(xx + qax - aa) = 0.$$

Porque efectuando la multiplicación se obtiene

$$x^4 + (p+q)ax^3 + (pq-2)aaxx - (p+q)a^3x + a^4,$$

que será igual a la expresión dada, si primero $p+q=m$ y luego $pq-2=n$, o sea $pq=n+2$; porque los cuartos términos se convierten iguales automáticamente; cuadramos la primera ecuación como antes, obteniendo $pp+2pq+qq=mm$, de esto se resta el otro tomado cuatro veces, o sea $4pq=4n+8$, entonces se obtiene $pp-2pq+qq=mm-4n-8$, cuya raíz cuadrada es $p-q=\sqrt{mm-4n-8}$, y por lo tanto obtenemos

$$p = \frac{m+\sqrt{mm-4n-8}}{2} \quad \text{y} \quad q = \frac{m-\sqrt{mm-4n-8}}{2}.$$

Si ahora se han encontrado p y q, entonces el primer factor da estas dos raíces

$$x = -\tfrac{1}{2}pa \pm \tfrac{1}{2}a\sqrt{pp+4},$$

y el segundo factor da estas

$$x = -\tfrac{1}{2}qa \pm \tfrac{1}{2}a\sqrt{qq+4},$$

y así se tienen las cuatro raíces de la ecuación dada.

203.

Por ejemplo, sea dada esta ecuación

$$x^4 - 3\cdot 2x^3 + 3\cdot 8x + 16 = 0,$$

aquí $a = 2$ y $m = -3$ y $n = 0$, entonces $\sqrt{mm - 4n - 8} = 1$, por lo tanto $p = \frac{-3+1}{2} = -1$, y $q = \frac{-3-1}{2} = -2$, por lo cual las dos primeras raíces serán $x = 1 \pm \sqrt{5}$ y las dos últimas $x = 2 \pm \sqrt{8}$, tal que las cuatro raíces buscadas serán

$$\text{I.)}\ x = 1 + \sqrt{5}, \qquad \text{II.)}\ x = 1 - \sqrt{5},$$
$$\text{III.)}\ x = 2 + \sqrt{8}, \qquad \text{IV.)}\ x = 2 - \sqrt{8}.$$

Por lo tanto, los cuatro factores que forman nuestra ecuación serán:

$$\left(x - 1 - \sqrt{5}\right)\left(x - 1 + \sqrt{5}\right)\left(x - 2 - \sqrt{8}\right)\left(x - 2 + \sqrt{8}\right),$$

que, efectuando la multiplicación, tienen que dar nuestra ecuación. Porque el primero y el segundo multiplicados entre sí dan $xx - 2x - 4$ y los otros dos dan $xx - 4x - 4$, y estos dos productos multiplicados entre sí dan $x^4 - 6x^3 + 24x + 16$, que es la ecuación dada justamente.

CAPÍTULO 14

DE LA REGLA DE BOMBELLI PARA REDUCIR LA RESOLUCIÓN DE ECUACIONES BICUADRÁTICAS A ECUACIONES CÚBICAS

204.

Dado que ya se ha mostrado arriba cómo se pueden resolver las ecuaciones cúbicas con la ayuda de la regla de CARDANO, lo principal de las ecuaciones bicuadráticas es saber cómo reducirlas a ecuaciones cúbicas. Porque sin la ayuda de las ecuaciones cúbicas no es posible resolver la bicuadrática de forma general: porque aunque se haya encontrado una raíz, las raíces restantes requieren una ecuación cúbica. De lo cual se puede ver de inmediato que también las ecuaciones de un grado superior presuponen la resolución de todas las inferiores.

205.

Hace varios cientos de años, un italiano llamado BOMBELLI dio una regla para esto, la cual queremos exponer en este capítulo.

Entonces, sea dada la ecuación bicuadrática general

$$x^4 + ax^3 + bxx + cx + d = 0,$$

donde las letras a, b, c, d pueden significar números cualesquiera; ahora nos imaginamos que esta ecuación sea la misma que la siguiente

$$(xx + \tfrac{1}{2}ax + p)^2 - (qx + r)^2 = 0,$$

donde solo se trata de determinar las letras p, q y r de tal manera que salga la ecuación dada. Si ahora se ordena esta última ecuación, el resultado es

$$\begin{aligned} x^4 + ax^3 + \tfrac{1}{4}aaxx &+ apx + pp \\ +\ 2pxx &- 2qrx - rr \\ -\ qqxx & \end{aligned}$$

Aquí los dos primeros términos ya son iguales a nuestra ecuación; para el tercer término tiene que plantearse $\frac{1}{4}aa + 2p - qq = b$, o sea $qq = \frac{1}{4}aa + 2p - b$, para el cuarto término tiene que ponerse $ap - 2qr = c$, de la cual se tiene $2qr = ap - c$, pero para el último término ponemos $pp - rr = d$, por lo cual $rr = pp - d$. En base a estas tres ecuaciones tienen que determinarse las tres letras p, q y r.

206.

Para hacer esto de la manera más fácil, tomamos la primera cuatro veces, que será $4qq = aa + 8p - 4b$, multiplicamos esto por la última $rr = pp - d$, entonces obtenemos

$$4qqrr = 8p^3 + (aa - 4b)pp - 8dp - d(aa - 4b);$$

ahora cuadramos la segunda ecuación:

$$4qqrr = aapp - 2acp + cc;$$

así que tenemos dos valores para $4qqrr$ que igualados dan esta ecuación

$$8p^3 + (aa - 4b)pp - 8dp - d(aa - 4b) = aapp - 2acp + cc;$$

y llevando todos los términos a un lado, obtenemos

$$8p^3 - 4bpp + (2ac - 8d)p - aad + 4bd - cc = 0,$$

que es una ecuación cúbica, de la cual el valor de p tiene que determinarse en cada caso según las reglas dadas anteriormente.

207.

Si ahora de los números dados a, b, c, d se han encontrado los tres valores de la letra p, para lo cual es suficiente haber descubierto solo uno de ellos, entonces se obtienen inmediatamente las otras dos letras q y r. Porque de la primera ecuación obtenemos $q = \sqrt{\frac{1}{4}aa + 2p - b}$ y de la segunda obtenemos $r = \frac{ap-c}{2q}$. Pero si estas tres letras se han encontrado para cualquier caso, entonces todas las cuatro raíces de la ecuación dada pueden ser determinadas de la siguiente manera.

Dado que hemos puesto la ecuación dada en esta forma

$$(xx + \tfrac{1}{2}ax + p)^2 - (qx + r)^2 = 0,$$

entonces es $(xx+\frac{1}{2}ax+p)^2=(qx+r)^2$, sacando la raíz cuadrada se obtiene

$$xx+\frac{1}{2}ax+p=qx+r, \quad \text{o también} \quad xx+\frac{1}{2}ax+p=-qx-r.$$

La primera ecuación da

$$xx=(q-\frac{1}{2}a)x-p+r,$$

de la cual se encuentran dos raíces; pero las otras dos se encuentran de la segunda ecuación, que toma la forma

$$xx=-(q+\frac{1}{2}a)x-p-r.$$

208.

Para explicar esta regla con un ejemplo, suponemos dada esta ecuación

$$x^4-10x^3+35xx-50x+24=0,$$

que comparada con nuestra fórmula general da $a=-10$, $b=35$, $c=-50$, $d=24$, de lo cual surge la siguiente ecuación para determinar la letra p:

$$8p^3-140pp+808p-1540=0,$$

que dividida entre cuatro da

$$2p^3-35pp+202p-385=0.$$

Los divisores del último número son 1, 5, 7, 11, etc., de los cuales 1 no procede; pero si se pone $p=5$, entonces $250-875+1010-385=0$, en consecuencia $p=5$; si también se quiere poner $p=7$, entonces $686-1715+1414-385=0$, así $p=7$ es la segunda raíz. Para encontrar la tercera, dividimos la ecuación entre 2, así se obtiene $p^3-\frac{35}{2}pp+101p-\frac{385}{2}=0$, y dado que el número $\frac{35}{2}$ en el segundo término es la suma de las tres raíces, y las dos primeras juntas suman 12, entonces la tercera tiene que ser $\frac{11}{2}$. Así que tenemos todas las tres raíces. Pero bastaría con conocer solo una, porque de cada una tienen que salir las cuatro raíces de nuestra ecuación bicuadrática.

209.

Para demostrar esto, primero sea $p = 5$, entonces tendremos

$$q = \sqrt{25 + 10 - 35} = 0 \quad y \quad r = \frac{-50+50}{0} = \frac{0}{0}.$$

Dado que nada está determinado por esto, tomamos la tercera ecuación $rr = pp - d = 25 - 24 = 1$, y por lo tanto $r = 1$. Por eso nuestras dos ecuaciones cuadráticas serán:

$$\text{I.)}\ xx = 5x - 4, \qquad \text{II.)}\ xx = 5x - 6;$$

la primera da estas dos raíces $x = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}}$, o sea $x = \frac{5 \pm 3}{2}$, en consecuencia o $x = 4$ o $x = 1$. Pero la segunda da $x = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}}$, así que $x = \frac{5 \pm 1}{2}$; esto nos da o $x = 3$ o $x = 2$.

Pero si se desea poner $p = 7$, entonces serán

$$q = \sqrt{25 + 14 - 35} = 2 \quad y \quad r = \frac{-70+50}{4} = -5,$$

de donde surgen estas dos ecuaciones cuadráticas

$$\text{I.)}\ xx = 7x - 12, \qquad \text{II.)}\ xx = 3x - 2;$$

la primera da $x = \frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}}$, entonces $x = \frac{7 \pm 1}{2}$, por lo tanto $x = 4$ y $x = 3$; la segunda ecuación da esta raíz $x = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}}$, entonces $x = \frac{3 \pm 1}{2}$, por lo tanto $x = 2$ y $x = 1$; que son precisamente las cuatro raíces que ya se encontraron antes.

Y estas mismas también salen del tercer valor $p = \frac{11}{2}$. Porque en este caso tenemos $q = \sqrt{25 + 11 - 35} = 1$ y

$r=\frac{-55+50}{2}=-\frac{5}{2}$, por lo cual las dos ecuaciones cuadráticas serán

$$\text{I.)}\ \ xx=6x-8, \qquad \text{II.)}\ \ xx=4x-3;$$

de la primera se obtiene $x=3\pm\sqrt{1}$, entonces $x=4$ y $x=2$; pero de la segunda obtenemos $x=2\pm\sqrt{1}$, o sea $x=3$ y $x=1$, que son las cuatro raíces ya encontradas.

210.

Además, sea dada esta ecuación $x^4-16x-12=0$, en la cual $a=0$, $b=0$, $c=-16$, $d=-12$; por lo tanto, nuestra ecuación cúbica será $8p^3+96p-256=0$, es decir $p^3+12p-32=0$, ecuación que se vuelve aún más fácil si se pone $p=2t$; porque entonces será

$$8t^3+24t-32=0 \quad \text{o sea} \quad t^3+3t-4=0.$$

Los divisores del último término son 1, 2, 4, de los cuales $t=1$ es una raíz, de esto $p=2$ y además $q=\sqrt{4}=2$ y $r=\frac{16}{4}=4$. Entonces las dos ecuaciones cuadráticas son $xx=2x+2$ y $xx=-2x-6$, por lo tanto las raíces serán $x=1\pm\sqrt{3}$ y $x=-1\pm\sqrt{-5}$.

211.

Para que la resolución anterior sea aún más clara, queremos repetirla por completo en el siguiente ejemplo:

entonces, sea dada esta ecuación

$$x^4-6x^3+12xx-12x+4=0,$$

que debe estar contenida en esta fórmula

$$(xx-3x+p)^2-(qx+r)^2=0,$$

donde en la primera parte se puso $-3x$ porque -3 es la mitad del número -6 en el segundo término de la ecuación. Pero desarrollando esta forma obtenemos

$$x^4-6x^3+(2p+9-qq)xx-(6p+2qr)x+pp-rr=0,$$

ahora se compara esta forma con nuestra ecuación, entonces se obtiene

I.) $2p+9-qq=12$, II.) $6p+2qr=12$, III.) $pp-rr=4$;

de la primera obtenemos $qq=2\mathrm{p}-3$, de la segunda $2qr=12-6p$ o $qr=6-3p$, de la tercera $rr=pp-4$; ahora multiplicamos rr y qq entre sí, entonces obtenemos $qqrr=2p^3-3pp-8p+12.$ Pero si se eleva al cuadrado el valor de qr, se tiene $qqrr=36-36p+9pp$; por lo tanto obtenemos esta ecuación:

$$2p^3-3pp-8p+12=9pp-36p+36,$$

o sea $2p^3-12pp+28p-24=0$, o dividida entre 2 da $p^3-6pp+14p-12=0$, de la cual la raíz es $p=2$; de esto obtenemos $qq=1$, $q=1$ y $qr=r=0$. Por lo tanto, nuestra ecuación será: $(xx-3x+2)^2=xx$, cuya raíz cuadrada es $xx-3x+2=\pm x$; si se aplica el signo superior, entonces se tiene $xx=4x-2$, pero para el signo inferior se tiene $xx=2x-2$, de eso se encuentran estas cuatro raíces $x=2\pm\sqrt{2}$ y $x=1\pm\sqrt{-1}.$

CAPÍTULO 15

DE UNA NUEVA RESOLUCIÓN DE LAS ECUACIONES BICUADRÁTICAS

212.

Así como la regla anterior de BOMBELLI resuelve las ecuaciones bicuadráticas con la ayuda de una cúbica, también se ha encontrado desde entonces otra forma de lograr esto, que es completamente diferente a la anterior y merece una explicación propia.

213.

Planteamos que la raíz de una ecuación bicuadrática tenga esta forma

$$x = \sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r},$$

donde las letras p, q y r indican las tres raíces de una ecuación cúbica como sigue

$$z^3 - fzz + gz - h = 0,$$

así que serán

$$p + q + r = f, \quad pq + pr + qr = g \quad y \quad pqr = h;$$

suponiendo esto, cuadramos la forma asumida de la raíz $x = \sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r}$, el resultado es

$$xx = p + q + r + 2\sqrt{pq} + 2\sqrt{pr} + 2\sqrt{qr}.$$

Dado que $p + q + r = f$, entonces

$$xx - f = 2\sqrt{pq} + 2\sqrt{pr} + 2\sqrt{qr};$$

ahora tomamos los cuadrados de nuevo, así obtenemos

$$x^4 - 2fxx + ff = 4pq + 4pr + 4qr$$
$$+ 8\sqrt{ppqr} + 8\sqrt{pqqr} + 8\sqrt{pqrr}.$$

Dado que ahora $4pq+4pr+4qr=4g,$ tendremos

$$x^4-2fxx+ff-4g=8\sqrt{pqr}\cdot\left(\sqrt{p}+\sqrt{q}+\sqrt{r}\right);$$

pero como $\sqrt{p}+\sqrt{q}+\sqrt{r}=x$ y $pqr=h,$ o sea $\sqrt{pqr}=\sqrt{h},$ llegamos a esta ecuación bicuadrática

$$x^4-2fxx-8x\sqrt{h}+ff-4g=0,$$

de la cual la raíz con certeza es

$$x=\sqrt{p}+\sqrt{q}+\sqrt{r},$$

y donde p, q y r son tres raíces de la ecuación cubica de arriba:

$$z^3-fzz+gz-h=0.$$

214.

La ecuación bicuadrática obtenida puede considerarse general aunque falte el segundo término x^3. Porque siempre se puede transformar cualquier ecuación completa en otra donde falte el segundo término, como mostraremos más adelante.

Sea dada esta ecuación bicuadrática:

$$x^4-axx-bx-c=0,$$

de la cual se debe encontrar una raíz. Comparamos la ecuación con la forma encontrada para determinar las letras f, g y h. Para esto se requiere que

I.) $2f=a,$ así $f=\frac{a}{2},$

II.) $8\sqrt{h}=b,$ así $h=\frac{bb}{64},$

III.) $ff-4g=-c,$ o sea $\frac{aa}{4}-4g+c=0,$ o $\frac{1}{4}aa+c=4g,$

en consecuencia $g=\frac{1}{16}aa+\frac{1}{4}c.$

215.

De la ecuación dada $x^4 - axx - bx - c = 0$ hemos encontrado que las letras *f*, *g* y *h* están determinadas así:

$$f = \tfrac{1}{2}a, \quad g = \tfrac{1}{16}aa + \tfrac{1}{4}c \quad y \quad h = \tfrac{1}{64}bb \ \text{ o } \ \sqrt{h} = \tfrac{1}{8}b;$$

de ellas formamos esta ecuación cúbica:

$$z^3 - fzz + gz - h = 0,$$

de la cual hay que buscar las tres raíces según la regla anterior. Estas sean ahora I.) $z = p$, II.) $z = q$, III.) $z = r$; de las cuales, una vez que se hayan encontrado, saldrá una raíz de nuestra ecuación bicuadrática:

$$x = \sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r}.$$

216.

Si bien es cierto que parece que de esta manera solo se encuentra una raíz de nuestra ecuación, esta forma contiene incluso todas las cuatro raíces, ya que cada signo de raíz cuadrada puede tomarse tanto negativo como positivo.

Si se aceptaran todos los cambios en los signos, entonces saldrían 8 valores diferentes para *x*, de los cuales solo 4 pueden ser válidos. Pero debe notarse que el producto de estos tres términos, es decir, $\sqrt{pqr}$, tiene que ser igual a $\sqrt{h} = \frac{1}{8}b$; por lo tanto, si $\frac{1}{8}b$ es positivo, el producto de las partes también tiene que ser positivo, en cuyo caso sólo se aplican estos cuatro cambios.

$$\begin{aligned}
\text{I.)}\ x &= \sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r},\\
\text{II.)}\ x &= \sqrt{p} - \sqrt{q} - \sqrt{r},\\
\text{III.)}\ x &= -\sqrt{p} + \sqrt{q} - \sqrt{r},\\
\text{IV.)}\ x &= -\sqrt{p} - \sqrt{q} + \sqrt{r},
\end{aligned}$$

pero si $\frac{1}{8}b$ es negativo, los 4 valores de x son los siguientes:

$$\begin{aligned}
\text{I.)}\quad x &= \sqrt{p}+\sqrt{q}-\sqrt{r},\\
\text{II.)}\quad x &= \sqrt{p}-\sqrt{q}+\sqrt{r},\\
\text{III.)}\quad x &= -\sqrt{p}+\sqrt{q}+\sqrt{r},\\
\text{IV.)}\quad x &= -\sqrt{p}-\sqrt{q}-\sqrt{r}.
\end{aligned}$$

Con la ayuda de esta nota, las cuatro raíces se pueden determinar en cualquier caso, como se puede ver en el siguiente ejemplo.

217.

Sea dada esta ecuación bicuadrática en la que falta el segundo término

$$x^4-25xx+60x-36=0,$$

que en comparación con la fórmula anterior da $a=25$, $b=-60$ y $c=36$, de lo cual además se obtiene

$$f=\frac{25}{2},\quad g=\frac{625}{16}+9=\frac{769}{16}\quad \text{y}\quad h=\frac{225}{4};$$

entonces nuestra ecuación cúbica es

$$z^3-\frac{25}{2}zz+\frac{769}{16}z-\frac{225}{4}=0.$$

Para eliminar las fracciones aquí, ponemos $z=\frac{u}{4}$, por lo tanto será

$$\frac{u^3}{64}-\frac{25}{2}\cdot\frac{uu}{16}+\frac{769}{16}\cdot\frac{u}{4}-\frac{225}{4}=0,$$

que multiplicando por 64 da

$$u^3-50uu+769u-3600=0,$$

de la cual deben encontrarse las tres raíces, todas las tres siendo positivas, y de las cuales una raíz es $u=9$; para encontrar las otras, se divide $u^3 - 50uu + 769u - 3600$ entre $u - 9$, y se obtiene esta nueva ecuación $uu - 41u + 400 = 0$, o sea $uu = 41u - 400$, de la cual obtenemos $u = \frac{41}{2} \pm \sqrt{\frac{1681}{4} - \frac{1600}{4}} = \frac{41 \pm 9}{2}$; entonces las tres raíces son $u = 9$, $u = 16$, $u = 25$, por lo tanto obtenemos:

$$\text{I.)}\ z = \frac{9}{4}, \quad \text{II.)}\ z = 4, \quad \text{III.)}\ z = \frac{25}{4}.$$

Ahora estos son los valores de las letras p, q y r, de modo que

$$p = \frac{9}{4}, \quad q = 4, \quad r = \frac{25}{4};$$

ya que ahora $\sqrt{pqr} = \sqrt{h} = -\frac{15}{2}$ y este valor $= \frac{1}{8}b$ es negativo, a esto tienen que ajustarse los signos de las raíces $\sqrt{p}, \sqrt{q}, \sqrt{r}$: tiene que haber o solo un *menos* o tres *menos*; como

$$\sqrt{p} = \frac{3}{2}, \quad \sqrt{q} = 2 \quad \text{y} \quad \sqrt{r} = \frac{5}{2},$$

entonces las cuatro raíces de nuestra ecuación dada serán:

$$\text{I.)}\ x = \frac{3}{2} + 2 - \frac{5}{2} = 1,$$

$$\text{II.)}\ x = \frac{3}{2} - 2 + \frac{5}{2} = 2,$$

$$\text{III.)}\ x = -\frac{3}{2} + 2 + \frac{5}{2} = 3,$$

$$\text{IV.)}\ x = -\frac{3}{2} - 2 - \frac{5}{2} = -6,$$

de donde surgen estos cuatro factores de la ecuación

$$(x-1)(x-2)(x-3)(x+6) = 0,$$

de los cuales los dos primeros dan $xx - 3x + 2$, pero los dos últimos dan $xx + 3x - 18$, y estos dos productos multiplicados entre sí producen justamente nuestra ecuación.

218.

Ahora queda por demostrar cómo se puede transformar una ecuación bicuadrática en la que está presente el segundo término en otra que no contenga el segundo término, para lo cual sirve la siguiente regla.

Sea dada esta ecuación general

$$y^4 + ay^3 + byy + cy + d = 0.$$

Aquí a y se le agrega la cuarta parte del número del segundo término, o sea $\frac{1}{4}a$, y para ello se escribe una nueva letra x, así que $y + \frac{1}{4}a = x$, por tanto $y = x - \frac{1}{4}a$; entonces será

$$yy = xx - \frac{1}{2}ax + \frac{1}{16}aa, \quad \text{además}$$

$$y^3 = x^3 - \frac{3}{4}axx + \frac{3}{16}aax - \frac{1}{64}a^3,$$

y de eso finalmente:

$$\begin{array}{rcl}
y^4 & = & x^4 - ax^3 + \frac{3}{8}aaxx - \frac{1}{16}a^3x + \frac{1}{256}a^4 \\
+ay^3 & = & + ax^3 - \frac{3}{4}aaxx + \frac{3}{16}a^3x - \frac{1}{64}a^4 \\
+byy & = & \qquad\qquad + \; bxx - \frac{1}{2}abx + \frac{1}{16}aab \\
+cy & = & \qquad\qquad\qquad\qquad + \; cx - \frac{1}{4}ac \\
+d & = & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + \; d \\
\hline
\end{array}$$

$$\left.\begin{array}{r}
x^4 + 0 - \frac{3}{8}aaxx + \frac{1}{8}a^3x - \frac{3}{256}a^4 \\
+ \; bxx - \frac{1}{2}abx + \frac{1}{16}aab \\
+ \; cx - \frac{1}{4}ac \\
+ \; d
\end{array}\right\} = 0$$

En esta ecuación, como puede verse, se canceló el segundo término, es decir que ahora puede aplicarse la regla dada y determinarse las cuatro raíces de x, de las cuales resultan automáticamente los cuatro valores de y, porque $y = x - \frac{1}{4}a$.

219.

Tan lejos se ha llegado hasta ahora con la resolución de las ecuaciones algebraicas, es decir, hasta el cuarto grado, y todos los esfuerzos para resolver las ecuaciones de quinto grado y superiores de la misma manera, o al menos para llevarlas a grados más bajos, han sido infructuosos, es decir que uno es incapaz de dar reglas generales mediante las cuales se puedan encontrar las raíces de ecuaciones superiores.

Todo lo que se ha logrado en eso funciona sólo en casos muy especiales, de los cuales el más importante es cuando haya una raíz racional, la que se puede encontrar fácilmente por ensayo y error, porque se sabe que siempre tiene que ser un divisor del último término; y eso es tal como ya lo hemos enseñado con las ecuaciones de tercer y cuarto grado.

220.

Aún será necesario aplicar esta regla a una ecuación cuyas raíces no sean racionales.

Ahora una ecuación de este tipo es la siguiente

$$y^4 - 8y^3 + 14yy + 4y - 8 = 0.$$

Aquí, ante todo, hay que deshacerse del segundo término, así que a la raíz y se le suma la cuarta parte del número del segundo término, es decir $y - 2 = x$, entonces será

$$y = x + 2 \quad \text{y} \quad yy = xx + 4x + 4, \quad \text{además}$$

$$y^3 = x^3 + 6xx + 12x + 8$$

y por lo tanto

$$\begin{array}{rl} y^4 = & x^4 + 8x^3 + 24xx + 32x + 16 \\ -\ 8y^3 = & \quad -8x^3 - 48xx - 96x - 64 \\ +14yy = & \qquad\qquad +14xx + 56x + 56 \\ +\ 4y\ = & \qquad\qquad\qquad\quad +\ 4x +\ 8 \\ -\ 8\quad = & \qquad\qquad\qquad\qquad\quad -\ 8 \\ \hline & x^4 + 0 \quad -10xx - \ 4x + \ 8 = 0, \end{array}$$

que en comparación con nuestra forma general da $a = 10$, $b = 4$, $c = -8$; de lo cual concluimos $f = 5$, $g = \frac{17}{4}$, $h = \frac{1}{4}$ y $\sqrt{h} = \frac{1}{2}$. De esto vemos que el producto $\sqrt{pqr}$ será positivo. Por lo tanto, la ecuación cúbica será $z^3 - 5zz + \frac{17}{4}z - \frac{1}{4} = 0$, y de esta ecuación cubica se tienen que buscar las tres raíces p, q y r.

221.

Aquí primero hay que eliminar las fracciones, por eso ponemos $z = \frac{u}{2}$, entonces $\frac{u^3}{8} - \frac{5uu}{4} + \frac{17}{4} \cdot \frac{u}{2} - \frac{1}{4} = 0$, multiplicado por 8 da $u^3 - 10uu + 17u - 2 = 0$, donde todas las raíces son positivas. Como los divisores del último término son 1 y 2, primero sea $u = 1$, entonces será $1 - 10 + 17 - 2 = 6$ y no 0, pero si $u = 2$, entonces $8 - 40 + 34 - 2 = 0$, se satisface la ecuación. De ahí una raíz es $u = 2$; para encontrar las otras se divide entre $u - 2$ de la siguiente manera:

$$\begin{array}{lll} u-2) & u^3 - 10uu + 17u - 2 & (uu - 8u + 1 \\ & \underline{u^3 - \ 2uu} & \\ & \quad -\ 8uu + 17u & \\ & \quad \underline{-\ 8uu + 16u} & \\ & \qquad\qquad u - 2 & \\ & \qquad\qquad \underline{u - 2} & \\ & \qquad\qquad\quad 0 & \end{array}$$

y de eso se obtiene $uu - 8u + 1 = 0$, o sea $uu = 8u - 1$, por lo cual las dos raíces restantes son $u = 4 \pm \sqrt{15}$. Dado que $z = \frac{1}{2}u$, las tres raíces de la ecuación cúbica son:

$$\text{I.)}\ z = p = 1, \quad \text{II.)}\ z = q = \tfrac{4+\sqrt{15}}{2}, \quad \text{III.)}\ z = r = \tfrac{4-\sqrt{15}}{2}.$$

222.

Ahora que hemos encontrado p, q y r, sus raíces cuadradas serán

$$\sqrt{p} = 1, \quad \sqrt{q} = \tfrac{\sqrt{8+2\sqrt{15}}}{2}, \quad \sqrt{r} = \tfrac{\sqrt{8-2\sqrt{15}}}{2}.$$

Pero arriba [§ 113-115] se ha demostrado que si $\sqrt{aa-b} = c$, la raíz cuadrada de $(a \pm \sqrt{b})$ se puede expresar así

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\tfrac{a+c}{2}} \pm \sqrt{\tfrac{a-c}{2}},$$

entonces para nuestro caso son $a = 8$ y $\sqrt{b} = 2\sqrt{15}$, o sea $b = 60$ y por lo tanto $c = 2$, de esto obtenemos

$$\sqrt{8+2\sqrt{15}} = \sqrt{5} + \sqrt{3} \quad y \quad \sqrt{8-2\sqrt{15}} = \sqrt{5} - \sqrt{3}.$$

Dado que ahora hemos encontrado $\sqrt{p} = 1$, $\sqrt{q} = \frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{2}$ y $\sqrt{r} = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2}$, y sabiendo que su producto tiene que ser positivo, entonces los cuatro valores para x serán de la siguiente forma:

$$\text{I.)}\ x = \sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r} = 1 + \tfrac{\sqrt{5}+\sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2} = 1 + \sqrt{5}$$

$$\text{II.)}\ x = \sqrt{p} - \sqrt{q} - \sqrt{r} = 1 - \tfrac{\sqrt{5}+\sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2} = 1 - \sqrt{5}$$

$$\text{III.)}\ x = -\sqrt{p} + \sqrt{q} - \sqrt{r} = -1 + \tfrac{\sqrt{5}+\sqrt{3}-\sqrt{5}+\sqrt{3}}{2} = -1 + \sqrt{3}$$

$$\text{IV.)}\ x = -\sqrt{p} - \sqrt{q} + \sqrt{r} = -1 - \tfrac{\sqrt{5}+\sqrt{3}-\sqrt{5}+\sqrt{3}}{2} = -1 - \sqrt{3}.$$

Como para la ecuación dada planteamos $y = x + 2$, entonces las cuatro raíces de la misma son

$$\begin{aligned} \text{I.)}\quad & y = 3 + \sqrt{5}, \\ \text{II.)}\quad & y = 3 - \sqrt{5}, \\ \text{III.)}\quad & y = 1 + \sqrt{3}, \\ \text{IV.)}\quad & y = 1 - \sqrt{3}. \end{aligned}$$

CAPÍTULO 16

DE LA RESOLUCIÓN DE LAS ECUACIONES POR APROXIMACIÓN

223.

Si las raíces de una ecuación no son racionales, puedan expresarse mediante signos radicales o no, como es el caso de las ecuaciones superiores, hay que conformarse con determinar su valor mediante aproximaciones, de tal manera que uno se acerca más y más al valor verdadero, hasta que el error finalmente pueda considerarse nada. Se han inventado varios métodos para este fin, aquí explicaremos los más importantes.

224.

El primer método se basa en que uno ya haya investigado bastante bien el valor de una raíz, es decir, que se sepa que p. ej. es mayor que 4 y a la vez menor que 5. Entonces se pone el valor de la raíz $= 4 + p$, y ahí p ciertamente significará una fracción; pero si p es una fracción y por lo tanto es menor que 1, entonces el cuadrado de p, el cubo y cualquier potencia superior son aún mucho más pequeños, por lo que ellos pueden ser omitidos del cálculo porque todo lo que importa es una aproximación. Si ahora se ha determinado solo aproximadamente esta fracción p, entonces se conoce la raíz $4+p$ con mayor precisión; a partir de ésta se investiga un valor aún más exacto de la misma manera, y se continúa del mismo modo hasta que uno se haya acercado a la verdad tanto como se desea.

225.

Explicaremos esto primero con un ejemplo sencillo y determinaremos la raíz de esta ecuación $xx = 20$ mediante aproximaciones.

Aquí se puede ver que x es mayor que 4 y además menor que 5, por eso ponemos $x = 4+p$, entonces $xx = 16+8p+pp = 20$; pero debido a que pp es muy pequeño, se omite este término obteniendo esta ecuación $16+8p = 20$, o sea $8p = 4$, de esto salen $p = \frac{1}{2}$ y $x = 4\frac{1}{2}$, que ya está mucho más cerca de la verdad; por lo tanto, se pone $x = 4\frac{1}{2}+p$, entonces se está seguro de que p será una fracción aún más pequeña que antes; por lo tanto pp ahora se puede omitir con mayor razón. Entonces tendremos $xx = 20\frac{1}{4}+9p = 20$, o sea $9p = -\frac{1}{4}$, y así $p = -\frac{1}{36}$, en consecuencia $x = 4\frac{1}{2}-\frac{1}{36} = 4\frac{17}{36}$. Si se desea acercarse más a la verdad, se tiene que poner $x = 4\frac{17}{36}+p$, entonces se obtiene $xx = 20\frac{1}{1296}+8\frac{34}{36}p = 20$; luego $8\frac{34}{36}p = -\frac{1}{1296}$, multiplicado por 36 sale $322p = -\frac{36}{1296} = -\frac{1}{36}$, y de esto sale $p = -\frac{1}{36 \cdot 322} = -\frac{1}{11592}$, en consecuencia $x = 4\frac{17}{36}-\frac{1}{11592} = 4\frac{5473}{11592}$, este valor se acerca tanto a la verdad que el error ciertamente puede considerarse nada.

226.

Para hacer esto más general, consideramos la ecuación $xx = a$ y suponemos que ya sabemos que x es mayor que n pero menor que $n+1$; entonces ponemos $x = n + p$, así que p tiene que ser una fracción, y por lo tanto pp puede descartarse por ser muy pequeño; de esto se obtiene

$$xx = nn + 2np = a,$$

entonces $2np = a - nn$ y $p = \frac{a-nn}{2n}$, por lo tanto $x = n + \frac{a-nn}{2n} = \frac{nn+a}{2n}$. Si n se acercaba a la verdad, este nuevo valor $\frac{nn+a}{2n}$ se acerca aún mucho más a la verdad. Este se pone para n, entonces uno se acercará aún más a la verdad, y si se pone este valor reciente otra vez para n, entonces se estará aún más cerca; y de esta manera se puede continuar hasta donde se quiera.

Sea p. ej. $a = 2$, es decir, se pide saber la raíz cuadrada de 2. Si ya se ha encontrado un valor bastante cercano, denominado n, entonces $\frac{nn+2}{2n}$ dará un valor aún más cercano. Por eso planteamos:

I.) $n = 1$, entonces será $x = \frac{3}{2}$,

II.) $n = \frac{3}{2}$, entonces será $x = \frac{17}{12}$,

III.) $n = \frac{17}{12}$, entonces será $x = \frac{577}{408}$,

el último valor se acerca tanto a $\sqrt{2}$ que su cuadrado $= \frac{332929}{166464}$ es solo $\frac{1}{166464}$ más que 2.

227.

Se puede proceder de la misma manera, si se debe encontrar la raíz cúbica o una raíz aún mayor por aproximación.

Sea dada la ecuación cúbica $x^3 = a$, es decir, se pide encontrar $\sqrt[3]{a}$; la cual sea aproximadamente $= n$ y planteamos $x = n + p$; entonces, si se omiten pp y las potencias superiores, se obtiene:

$$x^3 = n^3 + 3nnp = a,$$

por lo tanto $3nnp = a - n^3$ y $p = \frac{a-n^3}{3nn}$, consecuentemente $x = \frac{2n^3+a}{3nn}$. Entonces, si n ya se acerca a $\sqrt[3]{a}$, esta expresión se acerca aún mucho más. Si ahora se pone este nuevo valor para n, esta fórmula se acercará aún más a la verdad, y se puede continuar hasta donde uno desee. Sea p. ej. $x^3 = 2$, es decir, se pide encontrar $\sqrt[3]{2}$, a la cual el número n ya se acerca bastante, entonces esta fórmula $x = \frac{2n^3+2}{3nn}$ se acercará aún más; así que se plantea:

I.) $n = 1$, entonces será $x = \frac{4}{3}$,

II.) $n = \frac{4}{3}$, entonces será $x = \frac{91}{72}$,

III.) $n = \frac{91}{72}$, entonces será $x = \frac{1126819}{894348}$.

228.

Este método se puede utilizar de la misma manera para encontrar la raíz de todas las ecuaciones mediante aproximaciones. Para este fin, sea dada la siguiente ecuación cúbica general

$$x^3 + axx + bx + c = 0,$$

donde n se acerca bastante a una raíz de ella; por lo tanto, planteamos $x = n - p$ y dado que p será una fracción, omitimos pp y sus potencias superiores; de esta manera se obtiene $xx = nn - 2np$ y $x^3 = n^3 - 3nnp$, de lo cual surge esta ecuación:

$$n^3 - 3nnp + ann - 2anp + bn - bp + c = 0, \quad \text{o sea}$$
$$n^3 + ann + bn + c = 3nnp + 2anp + bp = (3nn + 2an + b)p;$$

por lo tanto, $p = \frac{n^3+ann+bn+c}{3nn+2an+b}$ y consecuentemente para x obtenemos el siguiente valor más exacto $x = n - \left(\frac{n^3+ann+bn+c}{3nn+2an+b}\right) = \frac{2n^3+ann-c}{3nn+2an+b}$. Si ponemos esto como nuevo valor para n, entonces se obtiene uno que se acerca aún más a la verdad.

229.

Sea p. ej. $x^3 + 2xx + 3x - 50 = 0$, donde $a = 2$, $b = 3$ y $c = -50$, por lo tanto, si n está cerca de una raíz, un valor aún más cercano será $x = \frac{2n^3+2nn+50}{3nn+4n+3}$. Pero ahora el valor $x = 3$ se acerca bastante a la verdad; por eso ponemos $n = 3$, se obtiene $x = \frac{61}{21}$. Si se quisiera escribir este valor otra vez para n, se obtendría un nuevo valor que se acerca ría aún más a la verdad.

230.

De las ecuaciones superiores solo queremos agregar este ejemplo $x^5 = 6x + 10$, o sea $x^5 - 6x - 10 = 0$, donde es fácil ver que 1 es demasiado pequeño y 2 demasiado grande. Pero sea $x = n$ un valor ya cercano y ponemos $x = n + p$, entonces

$$x^5 = n^5 + 5n^4p \quad \text{y así} \quad n^5 + 5n^4p = 6n + 6p + 10, \quad \text{o sea}$$

$$5n^4p - 6p = 6n + 10 - n^5 \quad \text{y entonces} \quad p = \frac{6n+10-n^5}{5n^4-6},$$

$$\text{y por lo tanto} \quad x = \frac{4n^5+10}{5n^4-6}.$$

Ahora ponemos $n = 1$, entonces $x = \frac{14}{-1} = -14$, que es un valor completamente desacertado, lo que se debe al hecho de que el valor cercano n era demasiado pequeño. Por eso ponemos $n = 2$, entonces $x = \frac{138}{74} = \frac{69}{37}$, que ya se acerca mucho más a la verdad. Si uno quisiera tomarse la molestia de escribir esta fracción $\frac{69}{37}$ para n, se llegaría a un valor de la raíz x que es aún mucho más preciso.

231.

Esta es la manera más conocida de encontrar las raíces de la ecuación mediante aproximaciones, que también se puede aplicar con éxito en todos los casos.

Sin embargo, queremos indicar otro método que merece nuestra atención por la facilidad de cálculo. El método se basa en buscar para cada ecuación una serie de números, como a, b, c, etc., que son de tal naturaleza que cada término dividido entre el anterior muestra el valor de la raíz con mayor precisión, cuando se avance en esta serie de números.

Supongamos que ya hemos llegado a los términos p, q, r, s, t, etc., de modo que entonces $\frac{q}{p}$ tiene que indicar la raíz x con bastante precisión, o sea $\frac{q}{p} = x$ aproximadamente.

De la misma manera también se tendrá $\frac{r}{q} = x$, multiplicando entonces obtenemos $\frac{r}{p} = xx$. Dado que igualmente $\frac{s}{r} = x$, entonces también $\frac{s}{p} = x^3$, y como además $\frac{t}{s} = x$, entonces será $\frac{t}{p} = x^4$, y así sucesivamente.

232.

Para explicar esto, empezamos con esta ecuación cuadrática $xx = x + 1$, y suponemos que en la serie de números considerada arriba estén estos términos *p*, *q*, *r*, *s*, *t*, etc. Ya que $\frac{q}{p} = x$ y $\frac{r}{p} = xx$, , obtenemos esta ecuación: $\frac{r}{p} = \frac{q}{p} + 1$, o sea $q + p = r$. De la misma manera serán $s = r + q$ y $t = s + r$; de lo que podemos ver que cada término de nuestra serie de números es la suma de los dos anteriores, por lo que la serie puede continuarse fácilmente hasta donde se quiera, siempre y cuando que se tengan los dos primeros términos; estos se pueden escoger arbitrariamente. Entonces ponemos 0, 1 para ellos, así nuestra serie será: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, etc., donde cada uno de los términos más avanzados dividido entre el anterior mostrará el valor de *x* con mayor precisión a medida que se continúe la serie. Bien es cierto que al principio el error es muy grande, pero disminuye cuanto más se avance. Estos valores de *x*, que se acercan cada vez más a la verdad, progresan de la siguiente manera:

$$x = \frac{1}{0}, \frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \frac{13}{8}, \frac{21}{13}, \frac{34}{21}, \frac{55}{34}, \frac{89}{55}, \frac{144}{89}, \text{etc.,}$$

de los cuales p. ej. $x = \frac{21}{13}$ da $\frac{441}{169} = \frac{21}{13} + 1 = \frac{442}{169}$, donde el error es solo $\frac{1}{169}$, pero las siguientes fracciones se acercan cada vez más a la verdad.

233.

Consideremos también esta ecuación $xx = 2x + 1$, y porque siempre $x = \frac{q}{p}$ y $xx = \frac{r}{p}$, entonces obtenemos $\frac{r}{p} = \frac{2q}{p} + 1$, o sea $r = 2q + p$; de eso se puede ver que cualquier término tomado dos veces más el término anterior da el sucesor. Si otra vez empezamos con 0, 1, obtenemos la siguiente serie:

$$0, 1, 2, 5, 12, 29, 70, 169, 408, \text{etc.},$$

por eso el valor buscado de x es expresado cada vez con más precisión por las siguientes fracciones:

$$x = \frac{1}{0}, \frac{2}{1}, \frac{5}{2}, \frac{12}{5}, \frac{29}{12}, \frac{70}{29}, \frac{169}{70}, \frac{408}{169}, \text{etc.},$$

las cuales por lo tanto se acercan más y más al valor verdadero $x = 1 + \sqrt{2}$. Si ahora se resta 1, entonces las siguientes fracciones dan el valor de $\sqrt{2}$ con cada vez mayor precisión:

$$\frac{1}{0}, \frac{1}{1}, \frac{3}{2}, \frac{7}{5}, \frac{17}{12}, \frac{41}{29}, \frac{99}{70}, \frac{239}{169}, \text{etc.},$$

de las cuales consideramos $\frac{99}{70}$, cuyo cuadrado es $\frac{9801}{4900}$, que es solo $\frac{1}{4900}$ mayor que 2.

234.

Este método también se aplica a ecuaciones superiores, como por ejemplo a esta ecuación cúbica: $x^3 = xx + 2x + 1$, ponemos $x = \frac{q}{p}$, $xx = \frac{r}{p}$ y $x^3 = \frac{s}{p}$, obteniendo $s = r + 2q + p$, de lo cual se ve como de los tres términos p, q, r se debe encontrar el término siguiente s; como antes, aquí se puede comenzar arbitrariamente, entonces una de estas series será:

$$0, 0, 1, 1, 3, 6, 13, 28, 60, 129, \text{etc.},$$

de la cual salen las siguientes fracciones que indican el valor para x con más y más precisión:

$$x = \frac{0}{0}, \frac{1}{0}, \frac{1}{1}, \frac{3}{1}, \frac{6}{3}, \frac{13}{6}, \frac{28}{13}, \frac{60}{28}, \frac{129}{60}, \text{etc.},$$

de los cuales los primeros fallan de forma atroz, pero este $x = \frac{60}{28} = \frac{15}{7}$, puesto en la ecuación, da $\frac{3375}{343} = \frac{225}{49} + \frac{30}{7} + 1$ $= \frac{3388}{343}$, donde el error es $\frac{13}{343}$.

235.

Aquí hay que tomar nota que no todas las ecuaciones son de tal naturaleza que este método se pueda aplicar a ellas; en particular, si el segundo término está ausente, no se puede utilizar este método. Porque sea p. ej. $xx = 2$ y quisiéramos poner $x = \frac{q}{p}$ y $xx = \frac{r}{p}$, entonces obtendríamos $\frac{r}{p} = 2$, o sea $r = 2p$, que es $r = 0q + 2p$, de donde surgiría esta serie de números:

1, 1, 2, 2, 4, 4, 8, 8, 16, 16, 32, 32, etc.,

de la cual no se puede sacar ninguna conclusión, porque cada término, dividido entre el anterior, da o $x = 1$, o $x = 2$. Pero se puede superar este inconveniente poniendo $x = y - 1$: entonces se obtiene $yy - 2y + 1 = 2$, y si aquí se plantea $y = \frac{q}{p}$ y $yy = \frac{r}{p}$, entonces se obtiene la aproximación ya dada arriba.

236.

Lo mismo ocurre con esta ecuación $x^3 = 2$, para la cual no se puede encontrar una serie de números que nos muestre el valor de $\sqrt[3]{2}$. Pero solo se necesita poner $x = y - 1$, para obtener esta ecuación $y^3 - 3yy + 3y - 1 = 2$, o sea $y^3 = 3yy - 3y + 3$. Para la serie de números ahora planteamos $y = \frac{q}{p}$, $yy = \frac{r}{p}$, $y^3 = \frac{s}{p}$; entonces será $s = 3r - 3q + 3p$, de lo cual se puede ver cómo de tres términos se puede determinar el término siguiente. Así que tomamos los tres primeros términos arbitrariamente, como p. ej. 0, 0, 1, entonces se obtiene esta serie:

$$0, 0, 1, 3, 6, 12, 27, 63, 144, 324, \text{etc.},$$

de la cual los dos últimos términos dan $y = \frac{324}{144}$ y $x = \frac{5}{4}$, esta fracción también se acerca bastante a la raíz cúbica de 2, porque el cubo de $\frac{5}{4}$ es $\frac{125}{64}$, en cambio $2 = \frac{128}{64}$.

237.

Respecto a este método también debe tenerse en cuenta que si la ecuación tiene una raíz racional y se plantea el comienzo de la serie de tal forma que de él resulte esta raíz, entonces cada término de la serie, dividido entre el anterior, dará exactamente esta misma raíz.

Para mostrar esto, sea dada esta ecuación $xx = x + 2$, de la cual una raíz es $x = 2$; ya que ahora se tiene esta fórmula para la serie $r = q + 2p$, entonces, poniendo al comienzo 1,2, se obtiene esta serie:

$$1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, \text{etc.},$$

que es una progresión geométrica cuya razón es = 2.

Lo mismo también se aclara con esta ecuación cúbica $x^3 = xx + 3x + 9$, de la cual una raíz es $x = 3$. Si ahora se plantea 1, 3, 9 para el comienzo de la serie, entonces de la fórmula $s = r + 3q + 9p$ sale esta serie:

$$1, 3, 9, 27, 81, 243, 729, \text{etc.},$$

que es nuevamente una progresión geométrica cuya razón = 3.

238.

Pero si el comienzo de la serie difiere de esta raíz, esto no implica que con ello uno se acerque a esta misma raíz: si la ecuación tiene más raíces, esta serie solo se acerca a la raíz más grande y para obtener una de las más pequeñas no hay otra manera que plantear el comienzo adecuadamente. Esto quedará claro con un ejemplo. Sea la ecuación $xx = 4x - 3$, cuyas dos raíces son $x = 1$ y $x = 3$. Ahora la fórmula para la serie de números es $r = 4q - 3p$ y si se pone 1, 1 en el comienzo de la serie para la raíz más pequeña, entonces la serie completa será 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, etc. Pero si se plantea el comienzo 1, 3, que contiene la raíz más grande, entonces la serie será 1, 3, 9, 27, 81, 243, 729, etc., donde todos los términos indican la raíz 3 exactamente. Pero si se plantea el comienzo de manera diferente, arbitrariamente, solo que la raíz más pequeña no esté incluida exactamente, entonces la serie siempre se acerca a la raíz más grande 3, como se puede ver en las siguientes series:

el comienzo sea	0,	1,	4,	13,	40,	121,	364, etc.			
además	1,	2,	5,	14,	41,	122,	365, etc.			
además	2,	3,	6,	15,	42,	123,	366,	1095, etc.		
además	2,	1,	-2,	-11,	-38,	-119,	-362,	-1091,	-3278, etc.	

donde los últimos términos divididos entre los anteriores, siempre se acercan a la raíz más grande 3, pero nunca a la raíz más pequeña.

239.

Este método se puede aplicar incluso a ecuaciones que continúan hasta el infinito; esta ecuación servirá como ejemplo:

$$x^{\infty} = x^{\infty-1} + x^{\infty-2} + x^{\infty-3} + x^{\infty-4} + \text{ etc.},$$

para lo cual la serie de números tiene que ser tal que cada término sea igual a la suma de todos los números anteriores, de donde surge esta serie

$$1, 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, \text{etc.},$$

de donde se puede ver que la mayor raíz de esta ecuación es exactamente $x = 2$; lo que también se puede mostrar de la siguiente manera. Se divide la ecuación entre x^{∞}, así se obtiene $1 = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4}$ etc., cuya suma resulta ser $= \frac{1}{x-1}$, de manera que $1 = \frac{1}{x-1}$; multiplicado por $x-1$ da $x-1=1$ y $x=2$.

240.

Además de estos dos métodos para encontrar la raíz de la ecuación por aproximación, uno de vez en cuando se encuentra con otros, pero estos son o demasiado laboriosos, o no generales. Pero de todos los métodos, el primero arriba explicado merece la preferencia, porque se aplica a todos los tipos de ecuaciones con el éxito deseado; en cambio, el segundo a menudo requiere una cierta preparación en la ecuación, sin la cual ni siquiera puede usarse, como hemos expuesto aquí con varios ejemplos.

FIN DE LA PRIMERA SECCIÓN
DE LAS ECUACIOES ALGEBRAICAS
Y SU RESOLUCIÓN

SEGUNDA SECCIÓN DE LA SEGUNDA PARTE

DE LA ANALÍTICA INDETERMINADA

CAPÍTULO 1

DE LA RESOLUCIÓN DE ECUACIONES SENCILLAS CON MÁS DE UN NÚMERO DESCONOCIDO

1.

De lo anterior se puede ver cómo un número desconocido se puede determinar mediante una ecuación; dos números desconocidos mediante dos ecuaciones; 3 por medio de 3; 4 se pueden determinar con 4 y así sucesivamente; es decir, que siempre se requieren tantas ecuaciones como números desconocidos a encontrar; dicho de otra manera, la pregunta misma está determinada.

Pero si de la pregunta se pueden sacar menos ecuaciones que la cantidad de supuestos números desconocidos, entonces algunos números quedan indefinidos y podemos disponer de ellos arbitrariamente; por eso tales preguntas se llaman *indeterminadas* y constituyen una parte separada de la analítica, por lo que se suele llamar *analítica indeterminada*.

2.

Como en estos casos se pueden poner uno o más números desconocidos a nuestro antojo, así de hecho hay muchas soluciones.

Pero comúnmente se añade la condición de que los números buscados sean números enteros, incluso positivos, o al menos racionales; por lo que el número de todas las soluciones posibles es reducido enormemente, de modo que a menudo quedan solo unas pocas, a veces también un número infinito, pero que no saltan a la vista fácilmente, de vez en cuando hasta ni siquiera una sola es posible. Por eso, esta parte de la analítica muchas veces requiere técnicas muy especiales, y sirve bastante para iluminar la comprensión de los principiantes y enseñarles una mayor habilidad en el cálculo.

3.

Empezamos con una de las preguntas más fáciles y buscamos dos números, cuya suma debe ser 10, donde se sobreentiende que estos números deben ser enteros y positivos.

Estos números sean ahora x e y, de modo que $x+y=10$, de lo cual encontramos $x=10-y$, así que y solo está determinada por la condición de ser un número entero y positivo; por lo tanto, se podrían asumir para y todos los números enteros desde 1 hasta infinito, pero como x también tiene que ser positivo, no se puede suponer que y sea mayor que 10, porque de lo contrario x sería negativo; y si tampoco se permite 0, entonces y se puede poner como máximo 9, porque de lo contrario sería $x=0$; por lo tanto solo proceden las siguientes soluciones:

si $\qquad y = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,$
entonces $\qquad x = 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1.$

Pero de estas nueve soluciones, las últimas cuatro son las mismas que las primeras cuatro, por lo que en total solo hay cinco soluciones diferentes.

Si se requieren tres números cuya suma sea 10, solo se necesita partir uno de los dos números encontrados aquí en dos partes, de lo cual se obtendría un conjunto mayor de soluciones.

4.

Dado que esto no tiene ninguna dificultad, pasemos a cuestiones algo más difíciles.

I. Pregunta. Se debe partir 25 en dos partes, tal que una de ellas se pueda dividir entre 2, pero la otra entre 3.

Una de las partes sea $2x$, la otra $3y$, entonces tiene que ser $2x+3y=25$. Por lo tanto, $2x=25-3y$. Dividiendo entre 2 sale $x=\frac{25-3y}{2}$, de lo que primero vemos que $3y$ tiene que ser menor que 25 y por lo tanto y no debe ser mayor que 8. Quitamos la mayor cantidad de enteros posible, es decir, dividimos el numerador $25-3y$ entre el denominador 2, así $x=12-y+\frac{1-y}{2}$, entonces $1-y$, o también $y-1$, tienen que ser divisibles entre 2. Por eso ponemos $y-1=2z$, por lo tanto $y=2z+1$, luego $x=12-2z-1-z=11-3z$; debido a que y no puede ser mayor que 8, solo se pueden suponer números para z para los que $2z+1$ no sea mayor que 8. En consecuencia, z tiene que ser menor que 4, por lo que z no puede ser tomar mayor que 3, de donde salen estas soluciones:

Si se pone	$z=\ 0,$	$z=1,$	$z=2,$	$z=3,$
entonces será	$y=\ 1,$	$y=3,$	$y=5,$	$y=7,$
además	$x=11,$	$x=8,$	$x=5,$	$x=2,$

por lo tanto, las dos partes de 25 que estamos buscando serán:

I.) $22+3$, II.) $16+9$, III.) $10+15$, IV.) $4+21$.

5.

II. Pregunta. Divídase 100 en dos partes, tal que la primera se pueda dividir entre 7, pero la segunda entre 11.

Así, la primera parte sea $7x$ y la segunda $11y$, entonces tiene que ser

$$7x+11y=100;\ \text{por eso}\ x=\frac{100-11y}{7}=\frac{98+2-7y-4y}{7},$$

entonces $x=14-y+\frac{2-4y}{7}$; entonces $2-4y$, o sea $4y-2$, tiene que ser divisible entre 7. Pero si $4y-2$ es divisible entre 7, entonces la mitad $2y-1$ también tiene que ser divisible entre 7, por lo tanto ponemos $2y-1=7z$, o sea $2y=7z+1$, entonces será $x=14-y-2z$; pero como tiene que ser $2y=7z+1=6z+z+1$, se tiene $y=3z+\frac{z+1}{2}$. Ahora ponemos $z+1=2u$, o sea $z=2u-1$, así $y=3z+u$. Por tanto, para u se puede tomar cualquier número entero, para el cual ni x ni y se vuelvan negativos, y luego se obtiene: $y=7u-3$ y $x=19-11u$.

Según la primera fórmula, $7u$ tiene que ser mayor que 3, pero según la otra, $11u$ tiene que ser menor que 19, o sea u menor que $\frac{19}{11}$, de modo que u ni siquiera puede ser 2, ya que ahora u no puede ser 0, solamente queda un valor, que es $u=1$, de esto obtenemos $x=8$, además $y=4$; por lo tanto, las dos partes buscadas de 100 serán I.) 56 y II.) 44.

6.

III. Pregunta. Divídase 100 en dos partes, tal que la primera dividida entre 5 deje como resto 2, y la segunda dividida entre 7 deje 4.

Como la primera parte, dividida entre 5, deja como resto 2, la ponemos $5x+2$, y porque la segunda parte, dividida entre 7, deja 4, la ponemos $7y+4$. Entonces

$$5x+7y+6=100, \quad \text{o sea} \quad 5x=94-7y=90+4-5y-2y,$$

de esto $x=18-y-\frac{2y-4}{5}$; por lo tanto, $4-2y$, y $2y-4$, y la mitad $y-2$ tienen que ser divisibles entre 5. Por eso ponemos $y-2=5z$, o sea $y=5z+2$, entonces será $x=16-7z$; de lo cual es evidente que $7z$ tiene que ser menor que 16, por lo tanto z menor que $\frac{16}{7}$ y por eso no mayor que 2. Así que aquí tenemos tres soluciones.

I.) $z=0$, da $x=16$ e $y=2$; por eso las dos partes buscadas de 100 serán $82+18$.

II.) $z = 1$, da $x = 9$ e $y = 7$; por eso las dos partes buscadas de 100 serán $47 + 53$.

III.) $z = 2$, da $x = 2$ e $y = 12$; por eso las dos partes buscadas de 100 son $12 + 88$.

7.

IV. Pregunta. Dos campesinas juntas tienen 100 huevos, la primera dice: si cuento los míos de 8 en 8, quedan 7, la otra dice: si cuento los míos de 10 en 10, también me quedan 7. ¿Cuántos huevos han tenido cada una?

Debido a que el número de la primera dividido entre 8 deja como resto 7, pero el número de la otra dividido entre 10 también deja 7, entonces ponemos el número de la primera $8x + 7$, pero el de la otra $10y + 7$, así que $8x + 10y + 14 = 100$, o $8x = 86 - 10y$, o $4x = 43 - 5y = 40 + 3 - 4y - y$; por eso ponemos $y - 3 = 4z$, entonces $y = 4z + 3$ y $x = 10 - 4z - 3 - z = 7 - 5z$, por lo tanto $5z$ tiene que ser menor que 7, y por lo tanto z menor que 2, de donde surgen estas dos soluciones:

I.) $z = 0$, da $x = 7$ e $y = 3$; por eso la primera campesina tenía 63 huevos, pero la segunda 37.

II.) $z = 1$, da $x = 2$ e $y = 7$; por eso la primera campesina tenía 23 huevos, pero la segunda 77.

8.

V. Pregunta. Un grupo de hombres y mujeres consumieron juntos 1000 copecas en una fonda. Un hombre pagó 19 copecas, una mujer pagó 13. ¿Cuántos hombres y mujeres había?

Sea el número de hombres $= x$, pero el de las mujeres $= y$, entonces se obtiene esta ecuación $19x + 13y = 1000$. Esto da $13y = 1000 - 19x$, o sea $13y = 988 + 12 - 13x - 6x$, entonces $y = 76 - x + \frac{12-6x}{13}$; así que $12 - 6x$, o sea $6x - 12$, y también la sexta parte $x - 2$ tienen que ser divisibles entre

13. Por eso ponemos $x-2=13z$, entonces será $x=13z+2$, además $y=76-13z-2-6z$, o sea $y=74-19z$; por lo que z tiene que ser menor que $\frac{74}{19}$, y en consecuencia, menor que 4, por eso se dan las siguientes cuatro soluciones:

I.) $z=0$, da $x=2$ e $y=74$. Por lo tanto había 2 hombres y 74 mujeres; aquellos consumieron 38 copecas, y estas 962 copecas.

II.) $z=1$, da el número de hombres $x=15$ y el número de mujeres $y=55$; aquellos pagaron 285 copecas, y estas 715 copecas.

III.) $z=2$, da el número de hombres $x=28$ y el número de mujeres $y=36$; aquellos consumieron 532 copecas, y estas 468 copecas.

IV.) $z=3$, da el número de hombres $x=41$ y el número de mujeres $y=17$; aquellos consumieron 779 copecas, y estas 221 copecas.

9.

VI. Pregunta. Un corregidor compra caballos y bueyes por 1770 táleros en total. Paga 31 tál. por un caballo, pero 21 tál. por un buey. ¿Cuántos caballos y bueyes había?

El número de caballos sea $=x$, pero el de bueyes $=y$, por lo que tiene que ser: $31x+21y=1770$, o sea $21y=1770-31x=1764+6-21x-10x$, y por lo tanto $y=84-x+\frac{6-10x}{21}$; entonces, $10x-6$ y luego también la mitad $5x-3$ tienen que ser divisibles entre 21. Así que ponemos $5x-3=21z$, por lo tanto $5x=21z+3$, de modo que $y=84-x-2z$. Como $x=\frac{21z+3}{5}$, o sea $x=4z+\frac{z+3}{5}$, ponemos $z+3=5u$. Así obtenemos

$$z=5u-3, \quad x=21u-12, \quad \text{además}$$

$$y=84-21u+12-10u+6=102-31u;$$

por lo tanto, u tiene que ser mayor que 0 y aún menor que 4, de donde obtenemos estas tres soluciones:

I.) $u = 1$, da el número de caballos $x = 9$ y el de bueyes $y = 71$; aquellos costaron 279 tál., y estos 1491 tál., en total 1770 tál.

II.) $u = 2$, da el número de caballos $x = 30$ y el de bueyes $y = 40$; aquellos costaron 930 tál., y estos 840 tál., en total 1770 tál.

III.) $u = 3$, da el número de caballos $x = 51$ y el de bueyes $y = 9$; aquellos costaron 1581 tál., y estos 189 tál., en total 1770 tál.

10.

Las preguntas consideradas hasta ahora conducen a una ecuación de la forma $ax + by = c$, donde a, b y c significan números enteros y positivos, y también se requieren números enteros y positivos para x, y.

Pero si b es negativo, y la ecuación toma la forma $ax = by + c$, entonces las preguntas son de un tipo completamente diferente y permiten un número infinito de soluciones, cuyo método se explicará en este capítulo. Las preguntas más fáciles de este tipo son como esta: si p. ej. se buscan dos números cuya diferencia sea 6, entonces ponemos el número menor $= x$, el mayor $= y$, entonces tiene que ser $y - x = 6$, por lo tanto, $y = 6 + x$. Aquí no hay impedimento de que no se puedan tomar todos los números enteros posibles para x, no importa cuál se escoja, el número y siempre será 6 más grande. Si p. ej. tomamos $x = 100$, entonces sería $y = 106$; de lo que queda muy claro que hay una infinidad de soluciones.

11.

Después de eso, siguen las preguntas donde $c = 0$ y ax simplemente debe ser igual a by. Por ejemplo, se busca un número que se pueda dividir tanto entre 5 como entre 7, y si este número $= N$, entonces primero tiene que ser $N = 5x$, porque el número N tiene que ser divisible entre 5; después también tiene que ser $N = 7y$, porque este número también se puede dividir entre 7; por lo tanto, obtenemos $5x = 7y$ y así $x = \frac{7y}{5}$; dado que 7 no se puede dividir entre 5, entonces y tiene que ser divisible entre 5. Por eso ponemos $y = 5z$, entonces $x = 7z$, por lo tanto el número buscado es $N = 35z$, donde se puede poner cualquier número entero para z, de manera que se pueden dar infinitamente muchos números para N, que son:

35, 70, 105, 140, 175, 210, etc.

Si se quisiera que el número N sea divisible también entre 9, entonces primero sería $N = 35z$, luego también tendría que ser $N = 9u$, por lo tanto $35z = 9u$, y de esto $u = \frac{35z}{9}$; de lo que está claro que z tiene que ser divisible entre 9. Por eso sea $z = 9s$, entonces $u = 35s$ y el número buscado es $N = 315s$.

12.

Es más difícil si el número c no es 0, como en la ecuación $5x = 7y + 3$, la cual surge si se busca un número N tal que sea divisible entre 5, pero si se divide entre 7, que quede como resto 3. Porque entonces tiene que ser $N = 5x$, pero además $N = 7y + 3$, y por eso $5x = 7y + 3$, por lo tanto

$$x = \frac{7y+3}{5} = \frac{5y+2y+3}{5} = y + \frac{2y+3}{5}.$$

Ponemos $2y + 3 = 5z$, luego $x = y + z$; pero ya que $2y + 3 = 5z$, o sea $2y = 5z - 3$, entonces tenemos $y = \frac{5z-3}{2}$, o sea $y = 2z + \frac{z-3}{2}$. Ahora ponemos $z - 3 = 2u$, de modo que $z = 2u + 3$, además $y = 5u + 6$, y $x = y + z = 7u + 9$; en consecuencia, el número buscado es $N = 35u + 45$, donde para u se pueden tomar todos los números enteros, incluso negativos, siempre y cuando N sea positivo, lo que sucede aquí si $u = -1$, porque entonces será $N = 10$, los valores que siguen se obtienen sumando siempre 35, por eso los números buscados son

$$10, 45, 80, 115, 150, 185, 220, \text{etc.}$$

13.

La resolución de tales cuestiones depende de la relación de los dos números entre los que se tenga que dividir, y según la naturaleza de la misma, la resolución es a veces más corta, a veces más extensa; la siguiente pregunta permite una resolución breve.

VII. Pregunta. Buscamos un número que, dividido entre 6, deje como resto 2, pero dividido entre 13 deje 3.

Sea este número N, entonces primero tiene que ser $N = 6x + 2$, pero luego $N = 13x + 3$; entonces

$$6x + 2 = 13x + 3 \quad \text{y} \quad 6x = 13x + 1, \text{ por eso}$$
$$x = \frac{13y+1}{6} = 2y + \frac{y+1}{6}.$$

Por lo tanto ponemos $y + 1 = 6z$, entonces $y = 6z - 1$ y $x = 2y + z = 13z - 2$; en consecuencia, el número buscado será $N = 78z - 10$. Así que tales números son los siguientes: 68, 146, 224, 302, 380, etc., que proceden como una progresión aritmética, cuya diferencia es $78 = 6 \cdot 13$. Entonces, si solo se conoce uno de estos números, todos los demás se pueden encontrar fácilmente, solo teniendo que sumarles 78, o restarles 78 mientras sea posible.

14.

Un ejemplo más difícil puede ser el siguiente.

VIII. Pregunta. Se busca un número N que dividido entre 39 deje como resto 16, y dividido entre 56 deje 27.

Primero tiene que ser $N = 39p + 16$, pero luego $N = 56q + 27$; por eso será $39p + 16 = 56q + 27$, o sea $39p = 56q + 11$ y $p = \frac{56q+11}{39}$, o sea $p = q + \frac{17q+11}{39} = q + r$; así que $r = \frac{17q+11}{39}$; por lo tanto $39r = 17q + 11$ y

$q=\frac{39r-11}{17}=2r+\frac{5r-11}{17}=2r+s$; de modo que $s=\frac{5r-11}{17}$, o sea $17s=5r-11$, por eso será $r=\frac{17s+11}{5}=3s+\frac{2s+11}{5}$ $=3s+t$; así que $t=\frac{2s+11}{5}$, o sea $5t=2s+11$, y así será $s=\frac{5t-11}{2}=2t+\frac{t-11}{2}=2t+u$; de modo que $u=\frac{t-11}{2}$ y $t=2u+11$. Como ya no hay una fracción, se puede poner u arbitrariamente, y de esto, procediendo al revés, obtenemos las siguientes determinaciones:

$$\begin{aligned}
t &= 2u+11\\
s &= 2t+u = 5u+22\\
r &= 3s+t = 17u+77\\
q &= 2r+s = 39u+176\\
p &= q+r = 56u+253
\end{aligned}$$

y finalmente $N=39\cdot 56u+9883$. Para encontrar el número más pequeño para N ponemos $u=-4$, entonces $N=1147$; si se pone $u=x-4$, entonces

$$N=2184x-8736+9893,\ \text{ o sea }\ N=2184x+1147.$$

Por lo tanto estos números forman una progresión aritmética, cuyo primer término es 1147 y cuya diferencia es = 2184. Entonces estos números son:

1147, 3331, 5515, 7699, 9883, etc.

15.

Para practicar, agregamos algunas preguntas más.

IX. Pregunta. Un grupo de hombres y mujeres está en una fonda; un hombre consume 25 copecas, una mujer consume 16 copecas y resulta que las mujeres en total consumieron una copeca más que los hombres; ¿cuántos hombres y mujeres había?

El número de mujeres sea $=p$, pero el de los hombres $=q$, entonces las mujeres consumieron $16p$, pero los hombres $25q$; por eso tiene que ser $16p = 25q + 1$ y por lo tanto $p = \frac{25q+1}{16} = q + \frac{9q+1}{16} = q + r$; así que $r = \frac{9q+1}{16}$, o sea $9q = 16r - 1$; por eso $q = \frac{16r-1}{9} = r + \frac{7r-1}{9} = r + s$, de modo que $s = \frac{7r-1}{9}$, o sea $9s = 7r - 1$; por lo tanto $r = \frac{9s+1}{7} = s + \frac{2s+1}{7} = s + t$, así que $t = \frac{2s+1}{7}$, o sea $7t = 2s + 1$; por eso será $s = \frac{7t-1}{2} = 3t + \frac{t-1}{2} = 3t + u$, así que $u = \frac{t-1}{2}$, o sea $2u = t - 1$, por eso $t = 2u + 1$. Procediendo al revés, de esto ahora obtenemos:

$$\begin{aligned} t &= 2u + 1 \\ s &= 3t + u = 7u + 3 \\ r &= s + t = 9u + 4 \\ q &= r + s = 16u + 7 \\ p &= q + r = 25u + 11 \end{aligned}$$

Por lo tanto, el número de mujeres fue $25u + 11$, pero el de los hombres $16u + 7$, donde se puede tomar cualquier número entero para u. Entonces, los números más pequeños, junto con los que siguen, son como dice aquí:

número de mujeres: $= 11,\ 36,\ 61,\ 86,\ 111,$ etc.
de hombres: $= 7,\ 23,\ 39,\ 55,\ 71,$ etc.

Según la primera solución, con los números más pequeños, las mujeres consumieron 176 copecas, pero los hombres 175; así que las mujeres consumieron una copeca más que los hombres.

16.

X. Pregunta. Alguien compra caballos y bueyes, paga 31 tál. por un caballo, pero 20 tál. por un buey, y resulta que los bueyes en total costaron 7 tál. más que los caballos; ¿cuántos bueyes y caballos había?

Sea el número de bueyes $= p$, pero el número de caballos $= q$, entonces tiene que ser

$$20p = 31q + 7, \quad \text{por eso} \quad p = \frac{31q+7}{20} = q + \frac{11q+7}{20} = q + r, \ \text{así}$$

$$20r = 11q + 7, \quad \text{y} \quad q = \frac{20r-7}{11} = r + \frac{9r-7}{11} = r + s, \ \text{así}$$

$$11s = 9r - 7, \quad \text{y} \quad r = \frac{11s+7}{9} = s + \frac{2s+7}{9} = s + t, \ \text{así}$$

$$9t = 2s + 7, \quad \text{y} \quad s = \frac{9t-7}{2} = 4t + \frac{t-7}{2} = 4t + u, \ \text{así}$$

$$2u = t - 7, \quad \text{y} \quad t = 2u + 7$$

$$s = 4t + u = 9u + 28$$

$$r = s + t = 11u + 35$$

$$q = r + s = 20u + 63 \quad \text{número de caballos}$$

$$p = q + r = 31u + 98 \quad \text{número de bueyes}$$

De esto se encuentran los números positivos más pequeños para p y q, si se pone $u = -3$; los mayores crecen en progresión aritmética de la siguiente manera:

número de bueyes $p = 5, 36, 67, 98, 129, 160, 191, 222, 253$, etc.

número de caballos $q = 3, 23, 43, 63, 83, 103, 123, 143, 163$, etc.

17.

Si, en este ejemplo, consideramos cómo las letras p y q están determinadas por las letras que siguen, es fácil ver que esto se basa en la razón de los números 31 y 20, es decir, en aquella mediante la cual se suele encontrar el máximo común divisor de estos dos números, como se aclara en lo que sigue:

$$\begin{array}{r|r|l} 20 & 31 & 1 \\ & 20 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|r|l} 11 & 20 & 1 \\ & 11 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|r|l} 9 & 11 & 1 \\ & 9 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|r|l} 2 & 9 & 4 \\ & 8 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|r|l} 1 & 2 & 2 \\ & 2 & \\ & 0 & \end{array}$$

Porque aquí está claro que los cocientes aparecen en la determinación sucesiva de las letras p, *q*, *r*, *s*, etc. y están vinculados con la primera letra de la mano derecha, mientras que la última siempre queda sola; en la última ecuación, sin embargo, aparece por primera vez el número 7, con el signo *más*, porque la última determinación es la quinta, pero si el número de las mismas hubiera sido par, entonces se tendría que haber puesto -7. Esto se vuelve más claro en la siguiente tabla, donde primero se muestra la descomposición de los números 31 y 20, y luego la determinación de las letras *p*, *q*, *r*, etc.

$$\begin{array}{rcl|rcl} 31 & = & 1\cdot 20+11 & p & = & 1\cdot q+r \\ 20 & = & 1\cdot 11+9 & q & = & 1\cdot r+s \\ 11 & = & 1\cdot \ \ 9+2 & r & = & 1\cdot s+t \\ 9 & = & 4\cdot \ \ 2+1 & s & = & 4\cdot t+u \\ 2 & = & 2\cdot \ \ 1+0 & t & = & 2\cdot u+7 \end{array}$$

18.

De esta forma también se puede plantear el ejemplo anterior del párrafo 14, como sigue:

$56 = 1 \cdot 39 + 17$	$p = 1 \cdot q + r$
$39 = 2 \cdot 17 + 5$	$q = 2 \cdot r + s$
$17 = 3 \cdot \ \ 5 + 2$	$r = 3 \cdot s + t$
$5 = 2 \cdot \ \ 2 + 1$	$s = 2 \cdot t + u$
$2 = 2 \cdot \ \ 1 + 0$	$t = 2 \cdot u + 11$

19.

De tal manera podemos resolver de forma general todos los ejemplos de este tipo:

Sea dada esta ecuación $bp = aq + n$, donde a, b y n son números conocidos. Aquí, solamente se tienen que efectuar justamente las operaciones como si se quisiera buscar el máximo común denominador de a y b, de las cuales se pueden determinar inmediatamente p y q mediante las siguientes letras, como a continuación:

Sea $a = Ab + c$	entonces $p = Aq + r$
$b = Bc + d$	$q = Br + s$
$c = Cd + e$	$r = Cs + t$
$d = De + f$	$s = Dt + u$
$e = Ef + g$	$t = Eu + v$
$f = Fg + 0$	$u = Fv \pm n$

Aquí, en la última ecuación, se usa $+n$ si el número de ecuaciones es impar, pero $-n$ si el mismo número de ecuaciones es par. De esta forma, todas estas cuestiones pueden resolverse ahora con bastante rapidez, de lo cual daremos algunos ejemplos.

20.

XI. Pregunta. Se busca un número que, dividido entre 11, deja como resto 3, pero dividido entre 19 deja 5.

Sea este número N, por lo que primero tiene que ser $N = 11p + 3$, luego también $N = 19q + 5$, por lo tanto

$11p+3=19q+5$, o sea $11p=19q+2$, de lo cual se elabora la siguiente tabla:

$$\begin{array}{rcl|rcl}
19 &=& 1\cdot 11+8 & p &=& q+r \\
11 &=& 1\cdot 8+3 & q &=& r+s \\
8 &=& 2\cdot 3+2 & r &=& 2s+t \\
3 &=& 1\cdot 2+1 & s &=& t+u \\
2 &=& 2\cdot 1+0 & t &=& 2u+2
\end{array}$$

donde se puede poner u arbitrariamente, y de ello se determinan las letras dadas en orden inverso, como sigue:

$$\begin{aligned}
t &= 2u+2 \\
s &= t+u = 3u+2 \\
r &= 2s+t = 8u+6 \\
q &= r+s = 11u+8 \\
p &= q+r = 19u+14
\end{aligned}$$

de esto se obtiene el número buscado $N=209u+157$, entonces el número más pequeño para N es 157.

21.

XII. Pregunta: Se busca un número N que, como antes, dividido entre 11, deja como resto 3, y dividido entre 19 deja 5; pero si se divide entre 29, quedan 10.

Según la última condición tiene que ser $N=29p+10$, y dado que las dos primeras condiciones ya han sido calculadas, entonces, por lo que encontramos arriba, tiene que ser $N=209u+157$, para lo cual vamos a escribir $N=209q+157$, por lo tanto $29p+10=209q+157$, o sea $29p=209q+147$; de ello se efectúan las siguientes operaciones:

$$\begin{aligned}
209 &= 7 \cdot 29 + 6; & &\text{entonces} & p &= 7q + r \\
29 &= 4 \cdot 6 + 5; & & & q &= 4r + s \\
6 &= 1 \cdot 5 + 1; & & & r &= s + t \\
5 &= 5 \cdot 1 + 0; & & & s &= 5t - 147
\end{aligned}$$

de donde procedemos al revés, de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
s &= 5t - 147 \\
r &= s + t = 6t - 147 \\
q &= 4r + s = 29t - 735 \\
p &= 7q + r = 209t - 5292
\end{aligned}$$

por lo tanto $N = 6061t - 153458$. El número más pequeño sale si se pone $t = 26$, entonces obtendremos $N = 4128$.

22.

Pero aquí debe tenerse en cuenta que si se va a resolver una ecuación como $bp = aq + n$, los dos números a y b no tienen que tener un divisor común distinto de 1, porque de lo contrario la pregunta sería imposible, siempre y cuando el número n no tenga ese mismo divisor común.

Porque si p. ej. debe ser $9p = 15q + 2$, donde 9 y 15 tienen el divisor común 3, entre el cual 2 no es divisible, entonces es imposible resolver esta cuestión, porque $9p - 15q$ siempre es divisible entre 3 y así nunca puede convertirse en 2. Pero si en este caso fuera $n = 3$ o $n = 6$, etc., la pregunta sí sería posible, pero habría que dividir la ecuación entre 3, ya que entonces resultaría $3p = 5q + 1$, que se resuelve fácilmente mediante la regla anterior. Entonces se puede ver claramente que los dos números a y b no tienen que tener ningún divisor común que no sea 1, y que la regla dada no se puede aplicar en ningún otro caso.

23.

Para mostrar esto con más claridad, tratemos la ecuación $9p = 15q + 2$ de forma natural. Pues entonces tenemos:

$$p = \frac{15q+2}{9} = q + \frac{6q+2}{9} = q + r,$$

de modo que $9r = 6q + 2$, o sea $6q = 9r - 2$; por lo tanto

$$q = \frac{9r-2}{6} = r + \frac{3r-2}{6} = r + s,$$

tal que $3r - 2 = 6s$, o sea $3r = 6s + 2$; por eso

$$r = \frac{6s+2}{3} = 2s + \frac{2}{3},$$

que evidentemente nunca puede convertirse en un número entero, porque s tiene que ser necesariamente un número entero, por lo cual podemos ver claramente que tales preguntas son imposibles por su misma naturaleza.

CAPÍTULO 2

DE LA ASÍ LLAMADA REGLA COECI, DONDE HAY QUE DETERMINAR DOS O MÁS NÚMEROS DESCONOCIDOS EN DOS ECUACIONES

24.

En el capítulo anterior vimos cómo se pueden determinar dos números desconocidos en una ecuación, de tal manera que se encuentren números enteros y positivos para ellos. Pero si se dan dos ecuaciones y se supone que la pregunta es indefinida, tendrían que aparecer más de dos números desconocidos. Cuestiones como éstas se dan en los libros de aritmética comunes y suelen resolverse según la llamada *regla coeci*, de la cual queremos indicar aquí el porqué.

25.

Empecemos con un ejemplo:

I. Pregunta: 30 personas, hombres, mujeres y niños, consumen 50 tál. en una fonda, un hombre paga 3 tál., una mujer 2 tál. y un niño 1 tál. ¿Cuántas personas fueron de cada tipo?

Sea el número de hombres $= p$, el de mujeres $= q$ y el de niños $= r$, entonces obtenemos las siguientes dos ecuaciones

$$\text{I.)}\ p+q+r=30, \qquad \text{II.)}\ 3p+2q+r=50;$$

de las cuales se deben determinar las tres letras p, q y r, en números enteros y positivos. De la primera ecuación se obtiene $r=30-p-q$, y por lo tanto $p+q$ tiene que ser menor que 30; este valor escrito en la otra ecuación para r da $2p+q+30=50$, entonces $q=20-2p$ y $p+q=20-p$, que automáticamente es menor que 30. Ahora para p se pueden asumir todos los números que no sean mayores de 10, de los cuales surgen las siguientes soluciones:

no. de hombres	$p=$	0,	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10,
mujeres	$q=$	20,	18,	16,	14,	12,	10,	8,	6,	4,	2,	0,
niños	$r=$	10,	11,	12,	13,	14,	15,	16,	17,	18,	19,	20,

si se omiten el primero y el último, todavía quedan 9 soluciones verdaderas.

26.

II. Pregunta. Alguien compra 100 cabezas de ganado, puercos, cabras y ovejas, por 100 tál., un puerco cuesta $3\frac{1}{2}$ tál., una cabra $1\frac{1}{3}$ tál. y una oveja $\frac{1}{2}$ tál. ¿Cuántos había de cada especie?

Sea el número de puercos $= p$, el de cabras $= q$ y el de ovejas $= r$, entonces tenemos las dos ecuaciones siguientes

$$\text{I.) } p+q+r=100, \qquad \text{II.) } 3\tfrac{1}{2}p+1\tfrac{1}{3}q+\tfrac{1}{2}r=100;$$

esta última se multiplica por 6 para eliminar las fracciones, así resulta $21p+8q+3r=600$. De la primera ecuación se tiene $r=100-p-q$, este valor puesto en la segunda ecuación da $18p+5q=300$, o sea $5q=300-18p$ y $q=60-\frac{18p}{5}$; por lo tanto $18p$ tiene que ser divisible entre 5, es decir, incluye 5 como factor. Así que se plantea

$$p=5s, \quad \text{entonces} \quad q=60-18s \quad \text{y} \quad r=13s+40,$$

donde se puede tomar cualquier número entero para s, siempre y cuando que q no se vuelva negativa, por lo tanto, no se puede asumir que s sea mayor que 3, por eso, si también se excluye 0, solo hay las tres soluciones siguientes,

si	$s=$	1,	2,	3.
entonces	$p=$	5,	10,	15.
	$q=$	42,	24,	6.
	$r=$	53,	66,	79.

27.

Si uno mismo desea plantear tales ejemplos, sobre todo hay que fijarse en que sean posibles; para decidir eso, cabe señalar lo siguiente.

Representamos las dos ecuaciones, como las que teníamos antes, de la siguiente manera:

$$\text{I.) } x+y+z=a, \qquad \text{II.) } fx+gy+hz=b,$$

donde f, g, h, junto con a y b son números dados; ahora, de los números f, g y h, el primero f sea el más grande y h el más pequeño; ya que $x+y+z=a$, entonces $fx+fy+fz=fa$. Ahora $fx+fy+fz$ es mayor que $fx+gy+hz$, por lo tanto fa tiene que ser mayor que b, o sea b tiene que ser menor que fa; y dado que además $hx+hy+hz=ha$ y $hx+hy+hz$ es ciertamente menor que $fx+gy+hz$, entonces *ha* también tiene que ser menor que *b*, o sea *b* mayor que *ha*. Si *b* no es menor que *fa* y a la vez mayor que *ha*, la pregunta siempre es imposible.

Esta condición también se suele plantear en la forma que el número *b* tiene que estar entre los límites *fa* y *ha*, además no tiene que acercarse demasiado a uno de los dos límites, porque de lo contrario no se podrían determinar las otras letras.

En el ejemplo anterior donde $a = 100$, $f = 3\frac{1}{2}$ y $h = \frac{1}{2}$, los límites eran 350 y 50; si se quisiera poner $b = 51$ en lugar de 100, las ecuaciones serían $x + y + z = 100$, y $3\frac{1}{2}x + 1\frac{1}{3}y + \frac{1}{2}z = 51$, y aquí multiplicado por 6 sería $21x + 8y + 3z = 306$; tómese la primera ecuación tres veces, entonces $3x + 3y + 3z = 300$, restada de aquella queda $18x + 5y = 6$, lo cual es obviamente imposible porque x e y tiene que ser números enteros [y positivos].

28.

Esta regla también es útil para los acuñadores y los orfebres cuando quieren fundir tres o más tipos de plata para obtener una masa de un contenido determinado; como puede verse en el siguiente ejemplo:

III. Pregunta. Un acuñador tiene tres tipos de plata, la primera es de 14 lotes, la segunda de 11 lotes y la tercera de 9 lotes. Ahora debería elaborar una masa de 30 marcos [1 marco = 16 lotes = 233,885 gramos], que debería ser de 12 lotes. ¿Cuántos marcos tiene que tomar de cada tipo?

Suponemos que toma *x* marcos del primer tipo, del segundo tipo *y* marcos, y del tercer tipo *z* marcos, entonces tiene que ser $x + y + z = 30$, que es la primera ecuación.

Además, dado que un marco del primer tipo contiene 14 lotes de plata fina, los *x* marcos contendrán 14*x* lotes de plata; de la misma manera, los *y* marcos del segundo tipo contendrán 11*y* lotes; y los z marcos del tercer tipo contendrán 9z lotes de plata; por lo tanto, la masa total contendrá $14x + 11y + 9z$ lotes de plata. Dado que ella pesa 30 marcos, de los cuales cada marco tiene que contener 12 lotes de plata, la cantidad de plata contenida debe ser 360 lotes, de lo cual obtenemos esta segunda ecuación $14x + 11y + 9z = 360$; de esta se resta la primera, multiplicada por 9, es decir, $9x + 9y + 9z = 270$, entonces queda $5x + 2y = 90$, de la cual se deben determinar x e y, que además sean números enteros, pero luego $z = 30 - x - y$. De aquella ecuación se obtiene $2y = 90 - 5x$ e $y = 45 - \frac{5x}{2}$. Por eso sea $x = 2u$, entonces $y = 45 - 5u$ y $z = 3u - 15$, por lo tanto, u tiene que ser mayor que 4 y también menor que 10, de donde se obtienen las siguientes soluciones:

$u =$ 5	6	7	8	9
$x =$ 10	12	14	16	18
$y =$ 20	15	10	5	0
$z =$ 0	3	6	9	12

29.

A veces hay más de tres números desconocidos, en estos casos la resolución se puede efectuar de la misma manera, como se puede ver en el siguiente ejemplo.

IV. Pregunta. Alguien compra 100 cabezas de ganado por 100 tál., 1 buey por 10 tál., 1 vaca por 5 tál., 1 becerro por 2 tál., 1 oveja por $\frac{1}{2}$ tál. ¿Cuántos bueyes, vacas, becerros y ovejas había?

Sea el número de bueyes $= p$, el de las vacas $= q$, el de los becerros $= r$ y el de las ovejas $= s$, por lo que la primera ecuación es: $p + q + r + s = 100$, pero la segunda ecuación es $10p + 5q + 2r + \frac{1}{2}s = 100$, que se multiplica por 2 para eliminar las fracciones, así $20p + 10q + 4r + s = 200$, de esto se resta la primera ecuación, entonces se tiene

$19p + 9q + 3r = 100$; de esto sale $3r = 100 - 19p - 9q$ y $r = 33 + \frac{1}{3} - 6p - \frac{1}{3}p - 3q$, o sea

$$r = 33 - 6p - 3q + \tfrac{1-p}{3},$$

por eso $1 - p$, o sea $p - 1$, tiene que ser divisible entre 3. Así ponemos $p - 1 = 3t$, entonces será:

$$p = 3t + 1$$
$$q = q$$
$$r = 27 - 19t - 3q$$
$$s = 72 + 2q + 16t$$

así que $19t + 3q$ tiene que ser menor que 27. Aquí, q y t pueden asumirse arbitrariamente, siempre y cuando se cumpla la condición de que $19t + 3q$ no se vuelve mayor que 27; por lo tanto, tenemos que considerar los siguientes casos.

I. si	$t = 0$	II. si	$t = 1$	t no se puede poner 2, porque si no r sería negativo
entonces	$p = 1$	entonces	$p = 4$	
	$q = q$		$q = q$	
	$r = 27 - 3q$		$r = 8 - 3q$	
	$s = 72 + 2q$		$s = 88 + 2q$	

En el primer caso, q no debe ser mayor que 9 y en el segundo caso q no debe ser mayor que 2. En ambos casos obtenemos por lo tanto las siguientes soluciones.

En el primer caso obtenemos estas 10 soluciones:

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X
p	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
q	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
r	27	24	21	18	15	12	9	6	3	0
s	72	74	76	78	80	82	84	86	88	90

Pero en el segundo caso, estas 3 soluciones:

	I	II	III
p	4	4	4
q	0	1	2
r	8	5	2
s	88	90	92

Estas son ahora todas las 13 soluciones; pero si no se quisiera permitir 0, solo serían 10 soluciones.

30.

El modo de resolución es el mismo si las letras de la primera ecuación se multiplican por números dados, como se puede ver en el siguiente ejemplo:

V. Pregunta. Búsquense tres números enteros, tales que si el primero se multiplica por 3, el segundo por 5 y el tercero por 7, entonces la suma de los productos sea 560; pero si el primero se multiplica por 9, el segundo por 25 y el tercero por 49, la suma de los productos sea 2920.

El primer número sea $= x$, el segundo $= y$, el tercero $= z$, entonces tenemos estas dos ecuaciones

$$\text{I.)}\ \ 3x + 5y + 7z = 560, \qquad \text{II.)}\ \ 9x + 25y + 49z = 2920$$

de la segunda se resta la primera, tomada tres veces, es decir, $9x + 15y + 21z = 1680$, entonces queda $10y + 28z = 1240$ o, dividiendo entre 2, da $5y + 14z = 620$, y de ello sale $y = 124 - \frac{14z}{5}$; entonces z tiene que ser divisible entre 5; por eso ponemos $z = 5u$, entonces $y = 124 - 14u$; sustituyendo estos valores para z e y en la primera ecuación, dan $3x - 35u + 620 = 560$, o sea

$$3x = 35u - 60 \quad \text{y} \quad x = \frac{35u}{3} - 20;$$

por eso se pone $u = 3t$, obteniendo finalmente esta solución:

$$x = 35t - 20, \quad y = 124 - 42t, \quad z = 15t,$$

donde se puede poner cualquier número entero para t, siempre y cuando que t sea mayor que 0 y aún menor que 3, de lo cual se obtienen 2 soluciones:

I.)	si $t = 1$	entonces	$x = 15,$	$y = 82,$	$z = 15,$
II.)	si $t = 2$	entonces	$x = 50,$	$y = 40,$	$z = 30.$

CAPÍTULO 3

DE LAS ECUACIONES INDETERMINADAS COMPUESTAS, DONDE DE UNA INCÓGNITA SÓLO APARECE LA PRIMERA POTENCIA

31.

Consideramos ahora aquellas ecuaciones indeterminadas en las que se buscan dos números desconocidos, y uno de ellos no está solo como antes, sino que aparece multiplicado por la otra incógnita, o se da en una potencia superior, siempre y cuando sólo esté presente la primera potencia del otro número desconocido. De manera general, tales ecuaciones toman la forma:

$$a + bx + cy + dxx + exy + fx^3 + gxxy + hx^4 + kx^3y + \text{ etc.} = 0$$

en la que solo aparece y, y por lo tanto se puede determinar fácilmente, pero la determinación tiene que hacerse de manera que resulten números enteros para x e y. Consideremos ahora estos casos y comencemos por los más fáciles.

32.

I. Pregunta. Buscamos dos números tales que si su suma se agrega al producto resulte 79.

Sean los dos números requeridos x e y, entonces tiene que ser $xy + x + y = 79$, de lo cual obtenemos $xy + y = 79 - x$ e $y = \frac{79-x}{x+1} = -1 + \frac{80}{x+1}$, por lo cual es evidente que $x + 1$

tiene que ser un divisor de 80; dado que 80 tiene muchos divisores, para cada uno de ellos encontramos un valor para x; como se ve en lo siguiente:

los divisores son	1	2	4	5	8	10	16	20	40	80
por lo tanto	$x =$ 0	1	3	4	7	9	15	19	39	79
además	$y =$ 79	39	19	15	9	7	4	3	1	0

Ya que aquí las últimas soluciones coinciden con las primeras, se tienen las siguientes cinco soluciones en total:

I	II	III	IV	V
0	1	3	4	7
79	39	19	15	9

33.

De la misma manera, se puede resolver esta ecuación general:

$$xy + ax + by = c$$

de la cual sale $xy + by = c - ax$ y así $y = \frac{c-ax}{x+b}$, o sea $y = -a + \frac{ab+c}{x+b}$; por lo tanto, $x + b$ tiene que ser un divisor del número conocido $ab + c$, por lo que cada divisor del mismo nos lleva a un valor para x. Por eso suponemos que $ab + c = fg$, entonces

$$y = -a + \frac{fg}{x+b}.$$

Ahora tomamos $x + b = f$, o sea $x = f - b$, entonces $y = -a + g$, o sea $y = g - a$; por lo tanto, por cada modo de representar el número $ab + c$ por dos factores, como fg, se obtiene no solo una sino dos soluciones: la primera es

$$x = f - b \quad \text{e} \quad y = g - a,$$

pero la otra sale de la misma manera, si se pone $x + b = g$, entonces

$$x = g - b \quad \text{e} \quad y = f - a.$$

Por eso, dada esta ecuación $xy + 2x + 3y = 42$, tenemos $a = 2$, $b = 3$ y $c = 42$, entonces $y = -2 + \frac{48}{x+3}$. Ahora el número 48 puede ser representado de muchas maneras por 2 factores como fg, y entonces siempre será $x = f - 3$ e $y = g - 2$, o también $x = g - 3$ e $y = f - 2$. Ahora, estos factores son los siguientes:

	I.		II.		III.		IV.		V.	
factores	1·48		2·24		3·16		4·12		6·8	
	x	y	x	y	x	y	x	y	x	y
números	–2	46	–1	22	0	14	1	10	3	6
o	45	–1	21	0	13	1	9	2	5	4

34.

La ecuación se puede presentar de una manera aún más general:

$$mxy = ax + by + c,$$

donde a, b, c y m son números dados, pero se tienen que encontrar números enteros para x e y.

Por eso buscamos y, obteniendo $y = \frac{ax+c}{mx-b}$; para poder eliminar x del numerador aquí, multiplicamos en ambos lados por m, entonces se tiene $my = \frac{max+mc}{mx-b} = a + \frac{mc+ab}{mx-b}$. El numerador de esta fracción es ahora un número conocido, del cual el denominador tiene que ser un divisor, así que representamos el numerador por dos factores como fg, que a menudo se puede hacer de muchas maneras, y vemos si uno de ellos se puede igualar con $mx - b$, de modo que $mx - b = f$; pero para esto se requiere, porque $x = \frac{f+b}{m}$, que $f + b$ sea divisible entre m. Por lo tanto, aquí solo se pueden usar los factores de $mc + ab$ que, si se le suma b, sean divisibles entre m; lo cual explicamos mediante un ejemplo.

Entonces sea $5xy = 2x + 3y + 18$. De eso obtenemos $y = \frac{2x+18}{5x-3}$, luego $5y = \frac{10x+90}{5x-3} = 2 + \frac{96}{5x-3}$; ahora aquí tenemos que buscar tales factores de 96 que, si se les suma 3, la suma sea divisible entre 5. Tomamos todos los divisores de 96 que son 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 32, 48, 96, de los cuales está claro que solo estos pueden usarse: 2, 12, 32.

Entonces sean

$$\begin{array}{rlllll} \text{I.)} & 5x-3=\ 2, & \text{así} & 5y=50 & \text{entonces} & x=1, \quad \text{e} \quad y=10 \\ \text{II.)} & 5x-3=12, & \text{así} & 5y=10 & \text{entonces} & x=3, \quad \text{e} \quad y=\ 2 \\ \text{III.)} & 5x-3=32, & \text{así} & 5y=\ 5 & \text{entonces} & x=7, \quad \text{e} \quad y=\ 1. \end{array}$$

35.

Ya que en esta solución general tenemos $my-a=\frac{mc+ab}{mx-b}$, conviene hacer la observación de que si un número contenido en la expresión $mc+ab$ tiene un divisor de la forma $mx-b$, entonces el cociente tiene que tener necesariamente la forma $my-a$, y que entonces el número $mc+ab$ puede ser representado por el producto $(mx-b)(my-a)$. Sea p. ej. $m=12$, $a=5$, $b=7$ y $c=15$; entonces se obtiene $12y-5=\frac{215}{12x-7}$; ahora los divisores de 215 son 1, 5, 43, 215, entre los cuales hay que buscar los que estén contenidos en la forma $12x-7$, o sea que, si se suma 7, la suma sea divisible entre 12; solo el divisor 5 satisface la condición, es decir, $12x-7=5$ y $12y-5=43$. De la primera ecuación sale $x=1$, y de la segunda ecuación, de la misma manera, sale y en números enteros, es decir, $y=4$. Esta propiedad es de la mayor importancia cuando se considera la teoría de los números y, por lo tanto, merece atención especial.

36.

Consideremos ahora una ecuación de este tipo

$$xy+xx=2x+3y+29.$$

De este se encuentra ahora

$$y = \frac{2x - xx + 29}{x - 3}, \quad \text{o sea} \quad y = -x - 1 + \frac{26}{x - 3};$$

entonces $x - 3$ tiene que ser un divisor del número 26, y luego el cociente $= y + x + 1$. Dado que los divisores de 26 son 1, 2, 13, 26, obtenemos estas soluciones:

I.) $x - 3 = 1$ o $x = 4$, entonces $y + x + 1 = y + 5 = 26$; luego $y = 21$

II.) $x - 3 = 2$ o $x = 5$, entonces $y + x + 1 = y + 6 = 13$; luego $y = 7$

III.) $x - 3 = 13$ o $x = 16$, entonces $y + x + 1 = y + 17 = 2$; luego $y = -15$

El valor negativo se debe omitir y por eso mismo, el último caso $x - 3 = 26$, no tiene que tomarse en cuenta.

37.

Aquí no es necesario calcular más fórmulas de este tipo en las que solo aparecen la primera potencia de *y*, además potencias mayores de *x*, porque estos casos solo ocurren pocas veces, y luego también se pueden resolver de la manera explicada aquí. Pero si de y también aparece la segunda potencia o incluso a una potencia superior, y se quiere determinar su valor de acuerdo con las reglas dadas, se llega a signos de raíces, en los cuales está x en la segunda potencia o incluso en una potencia mayor; entonces todo depende de encontrar tales valores para *x* que hagan desaparecer la irracionalidad o los signos de raíces.

Y el gran arte de la analítica indeterminada consiste precisamente en cómo hacer racionales estas fórmulas irracionales, para lo cual daremos las instrucciones en los siguientes capítulos.

CAPÍTULO 4

DEL MODO DE HACER RACIONAL LA EXPRESIÓN IRRACIONAL $\sqrt{a+bx+cxx}$

38.

La pregunta aquí es cuáles valores deben ponerse para x, para que la expresión $a+bx+cxx$ sea realmente un cuadrado, y así se pueda indicar la raíz cuadrada como número racional. Pero las letras a, b y c significan números dados, y en la naturaleza de estos se basa principalmente la determinación del número desconocido x, en lo que debe tenerse en cuenta de antemano que en muchos casos la resolución se vuelve imposible; pero si la resolución es posible, entonces al menos inicialmente uno tiene que conformarse con valores racionales para determinar la letra x, y no exigir que sean números enteros, lo que requiere una investigación muy especial.

39.

Suponemos aquí que esta expresión contenga hasta la segunda potencia de x, ya que las potencias superiores requieren métodos especiales, que se tratarán después.

Si la segunda potencia ni siquiera aparece aquí, o sea si $c=0$, la pregunta no tendría ninguna dificultad: porque si se diera la expresión $\sqrt{a+bx}$, se debería determinar x tal que $a+bx$ sería un cuadrado, solo se necesitaría poner $a+bx=yy$, de lo cual se obtendría inmediatamente $x=\frac{yy-a}{b}$; y ahora se podría poner cualquier número para y, entonces de cada uno de ellos se encontraría un valor para x tal que $a+bx$ sería un cuadrado y consecuentemente $\sqrt{a+bx}$ sería racional.

40.

Empecemos con la expresión $\sqrt{1+xx}$, donde se deben encontrar tales valores para x que si se agrega 1 a su cuadrado xx, la suma nuevamente se convierta en un cuadrado, lo que obviamente no es posible con números enteros, porque ningún número cuadrado entero es solo 1 más que el cuadrado anterior; por lo tanto, hay que conformarse necesariamente con números fraccionarios para x.

41.

Si $1+xx$ debe ser un cuadrado, y se pone $1+xx=yy$, entonces $xx=yy-1$ y $x=\sqrt{yy-1}$. Para encontrar x, habría que buscar tales números para y que sus cuadrados menos 1 se conviertan otra vez en cuadrados; esta pregunta que es tan difícil como la anterior y, por tanto, no se ganaría nada.

Pero realmente existen fracciones que, puestas para x, convierten $1+xx$ en un cuadrado, como se puede ver en los siguientes casos:

I.) si $x=\frac{3}{4}$, entonces $1+xx=\frac{25}{16}$, luego $\sqrt{1+xx}=\frac{5}{4}$.

II.) Lo mismo pasa si $x=\frac{4}{3}$, aquí sale $\sqrt{1+xx}=\frac{5}{3}$.

III.) Si se pone $x=\frac{5}{12}$, se obtiene $1+xx=\frac{169}{144}$, cuya raíz cuadrada es $\frac{13}{12}$.

Ahora aquí se tiene que mostrar cómo se pueden encontrar tales números, e incluso todos los posibles.

42.

Esto puede hacerse de dos maneras. Según la primera manera, se pone

$$\sqrt{1+xx}=x+p,$$

entonces $1+xx=xx+2px+pp$, donde el cuadrado xx se cancela y, en consecuencia, x puede ser determinada sin un signo de raíz. Porque, en la ecuación encontrada, se resta xx en ambos lados, de modo que $2px+pp=1$, de lo cual se encuentra $x=\frac{1-pp}{2p}$, donde se puede asumir cualquier número para p, e incluso se pueden usar fracciones para ello.

Por eso ponemos $p=\frac{m}{n}$, entonces $x=\frac{1-\frac{mm}{nn}}{\frac{2m}{n}}$; se multiplica esta fracción arriba y abajo por nn, así se obtiene $x=\frac{nn-mm}{2mn}$.

43.

Para que $1+xx$ se convierta en un cuadrado, se pueden asumir arbitrariamente todos los números enteros posibles para m y n, y así de ello se encuentra una infinidad de valores para x.

También, si se plantea en forma general $x=\frac{nn-mm}{2mn}$, entonces

$$1+xx=1+\frac{n^4-2nnmm+m^4}{4mmnn} \quad \text{o sea} \quad 1+xx=\frac{n^4+2mmnn+m^4}{4mmnn},$$

esta fracción es realmente un cuadrado y de ella sale

$$\sqrt{1+xx}=\frac{nn+mm}{2mn}.$$

De lo cual podemos apuntar los siguientes valores pequeños para x:

si	$n=2$	3	3	4	4	5	5	5	5
y	$m=1$	1	2	1	3	1	2	3	4
entonces	$x=\frac{3}{4}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{15}{8}$	$\frac{7}{24}$	$\frac{12}{5}$	$\frac{21}{20}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{9}{40}$

44.

Esto implica de manera general que

$$1+\frac{(nn-mm)^2}{(2mn)^2}=\frac{(nn+mm)^2}{(2mn)^2}.$$

Ahora se multiplica esta ecuación por $(2mn)^2$, entonces se tiene

$$(2mn)^2+(nn-mm)^2=(nn+mm)^2;$$

así que de manera general tenemos dos cuadrados, cuya suma es nuevamente un cuadrado; esto resuelve la siguiente cuestión.

Encontrar dos números cuadrados cuya suma sea también un número cuadrado.

Es decir, debe ser $pp+qq=rr$; para este fin solo tenemos que poner $p=2mn$ y $q=nn-mm$, entonces será $r=nn+mm$. Ya que por lo tanto además tenemos

$$(nn+mm)^2-(2mn)^2=(nn-mm)^2,$$

también podemos resolver esta pregunta:

encontrar dos números cuadrados cuya diferencia sea nuevamente un número cuadrado, o sea que $pp-qq=rr$; entonces solo se tiene que poner $p=nn+mm$ y $q=2mn$, entonces será $r=nn-mm$, o también se puede poner $p=nn+mm$ y $q=nn-mm$, entonces será $r=2mn$.

45.

Pero hemos prometido dos maneras de convertir la expresión $1+xx$ en un cuadrado; la segunda manera tiene la siguiente forma.

Se plantea $\sqrt{1+xx}=1+\frac{mx}{n}$; por lo que se obtiene

$$1+xx=1+\frac{2mx}{n}+\frac{mmxx}{nn};$$

si aquí se resta 1 en ambos lados, entonces

$$xx = \frac{2mx}{n} + \frac{mmxx}{nn},$$

esta ecuación puede dividirse entre x, y en consecuencia da $x = \frac{2m}{n} + \frac{mmx}{nn}$, o multiplicada por nn, $nnx = 2mn + mmx$, de la cual se encuentra $x = \frac{2mn}{nn-mm}$; sustituyendo este valor para x, se obtiene

$$1 + xx = 1 + \frac{4mmnn}{n^4 - 2mmnn + m^4}, \quad \text{o sea} \quad = \frac{n^4 + 2mmnn + m^4}{n^4 - 2mmnn + m^4},$$

esta fracción es el cuadrado de $\frac{nn+mm}{nn-mm}$. Ya que por lo tanto ahora se obtiene esta ecuación

$$1 + \frac{(2mn)^2}{(nn-mm)^2} = \frac{(nn+mm)^2}{(nn-mm)^2},$$

entonces de ella sale la ecuación de arriba:

$$(nn - mm)^2 + (2mn)^2 = (nn + mm)^2,$$

que son los dos cuadrados anteriores, cuya suma dan otro cuadrado.

46.

El caso que aquí hemos tratado en detalle, ahora nos da dos métodos para convertir la expresión general $a + bx + cxx$ en un cuadrado. El primero funciona en cualquier caso donde c sea un cuadrado; pero el otro, donde a sea un cuadrado; aquí trataremos estos dos casos.

I.) Primero, sea c un número cuadrado, o la expresión dada sea $a + bx + ffxx$, que debe convertirse en un cuadrado; para este fin ponemos, $\sqrt{a + bx + ffxx} = fx + \frac{m}{n}$, entonces $a + bx + ffxx = ffxx + \frac{2mfx}{n} + \frac{mm}{nn}$, donde las xx se cancelan en ambos lados, así que $a + bx = \frac{2mfx}{n} + \frac{mm}{nn}$, que multiplicada por nn da $nna + nnbx = 2mnfx + mm$; de lo que se encuentra $x = \frac{mm-nna}{nnb-2mnf}$; si este valor ahora se escribe para x, entonces será

$$\sqrt{a+bx+ffxx} = \frac{mmf-nnaf}{nnb-2mnf} + \frac{m}{n} = \frac{mnb-mmf-nnaf}{nnb-2mnf}.$$

47.

Como se ha encontrado una fracción para x, entonces ponemos directamente $x = \frac{p}{q}$, así que $p = mm - nna$, y $q = nnb - 2mnf$, entonces la expresión $a + \frac{bp}{q} + \frac{ffpp}{qq}$ será un cuadrado; en consecuencia, sigue siendo un cuadrado si se multiplica por el cuadrado qq, por lo que la expresión $aqq + bpq + ffpp$ también será un cuadrado, si se pone $p = mm - nna$ y $q = nnb - 2mnf$; de ello se puede encontrar un número infinito de soluciones en números enteros, porque se pueden asumir valores arbitrarios para las letras m y n.

48.

II.) El segundo caso se da cuando la letra a es un cuadrado. Entonces sea dada esta expresión $ff + bx + cxx$, que debe ser convertida en un cuadrado. Para este fin ponemos:

$$\sqrt{ff+bx+cxx} = f + \frac{mx}{n},$$

entonces

$$ff + bx + cxx = ff + \frac{2mfx}{n} + \frac{mmxx}{nn},$$

donde las ff se cancelan y los otros términos se pueden dividir entre x, de modo que $b + cx = \frac{2mf}{n} + \frac{mmx}{nn}$, o sea $nnb + nncx = 2mnf + mmx$, o sea $nncx - mmx = 2mnf - nnb$, y en consecuencia $x = \frac{2mnf - nnb}{nnc - mm}$; si ahora se pone este valor para x, entonces será

$$\sqrt{ff + bx + cxx} = f + \frac{2mmf - mnb}{nnc - mm} = \frac{nncf + mmf - mnb}{nnc - mm};$$

si aquí se pone $x = \frac{p}{q}$, entonces como arriba se puede convertir la expresión $ffqq + bpq + cpp$ en un cuadrado, siempre y cuando se pongan $p = 2mnf - nnb$ y $q = nnc - mm$.

49.

Aquí el caso particularmente notable es cuando $a = 0$, o sea, si la expresión $bx + cxx$ debe convertirse en un cuadrado; porque solo se necesita poner $\sqrt{bx + cxx} = \frac{mx}{n}$, entonces $bx + cxx = \frac{mmxx}{nn}$, dividido entre x, y multiplicado por nn, resulta $bnn + cnnx = mmx$, en consecuencia $x = \frac{nnb}{mm - cnn}$. Por ejemplo, busquemos todos los números triangulares que también sean cuadrados, entonces $\frac{xx + x}{2}$ y por lo tanto también $2xx + 2x$ tienen que ser cuadrados. Este último sea $\frac{mmxx}{nn}$, así será $2nnx + 2nn = mmx$ y $x = \frac{2nn}{mm - 2nn}$, donde se pueden poner todos los números posibles para m y n, pero entonces se encuentra mayormente una fracción para x; pero también pueden salir números enteros, como cuando se ponen $m = 3$ y $n = 2$, entonces se obtiene $x = 8$, cuyo triángulo es 36, que también es un cuadrado.

También se puede poner $m = 7$ y $n = 5$, entonces $x = -50$ cuyo triángulo es 1225, que es a la vez el triángulo de $+49$ y también el cuadrado de 35; esto también habría salido si se hubiera puesto $n = 7$ y $m = 10$, porque entonces $x = 49$.

También se puede poner $m = 17$ y $n = 12$, entonces será $x = 288$, cuyo triángulo es $\frac{x(x+1)}{2} = \frac{288 \cdot 289}{2} = 144 \cdot 289$, que es un número cuadrado cuya raíz es $12 \cdot 17 = 204$.

50.

En este último caso se debe considerar que la expresión $bx + cxx$ se pudo convertir en un cuadrado porque tenía un factor, como x, lo que nos lleva a nuevos casos en los que la expresión $a + bx + cxx$ pueda convertirse en un cuadrado aunque ni a ni c sean cuadrados.

Estos casos se dan cuando $a + bx + cxx$ se puede descomponer en dos factores, lo que sucede cuando $bb - 4ac$ es un cuadrado. Para demostrar esto, debe tenerse en cuenta que los factores siempre dependen de las raíces de una ecuación. Por lo tanto, ponemos $a + bx + cxx = 0$, así $cxx = -bx - a$ y $xx = -\frac{bx}{c} - \frac{a}{c}$, de lo cual se encuentra

$$x = -\frac{b}{2c} \pm \sqrt{\frac{bb}{4cc} - \frac{a}{c}}, \quad \text{o sea} \quad x = -\frac{b}{2c} \pm \frac{\sqrt{bb-4ac}}{2c},$$

de lo cual es evidente que si $bb - 4ac$ es un cuadrado, entonces estas raíces serán racionales.

Por eso, sea $bb - 4ac = dd$, así que las raíces son $\frac{-b \pm d}{2c}$, o sea $x = \frac{-b \pm d}{2c}$, por lo tanto, los divisores de la expresión $a + bx + cxx$ serán $x + \frac{b-d}{2c}$ y $x + \frac{b+d}{2c}$, que cuando se multiplican entre sí, dan la misma expresión, pero dividida entre c, es decir, se encuentra $xx + \frac{bx}{c} + \frac{bb}{4cc} - \frac{dd}{4cc}$, ya que ahora $dd = bb - 4ac$, entonces se tiene $xx + \frac{bx}{c} + \frac{bb}{4cc} - \frac{bb}{4cc} + \frac{4ac}{4cc} = xx + \frac{bx}{c} + \frac{a}{c}$, que multiplicado por c da $cxx + bx + a$. Por lo tanto, solo se tiene que multiplicar uno de los factores por c, y entonces nuestra expresión será igual a este producto:

$$\left(cx+\tfrac{b}{2}-\tfrac{d}{2}\right)\left(x+\tfrac{b}{2c}+\tfrac{d}{2c}\right)$$

y se puede ver que esta resolución es posible siempre y cuando $bb-4ac$ sea un cuadrado.

51.

De ello surge el tercer caso en el que nuestra expresión $a+bx+cxx$ se puede convertir en un cuadrado; queremos agregar este caso a los dos anteriores.

III.) Este caso se da cuando nuestra expresión puede ser representada por un producto como $(f+gx)\cdot(h+kx)$. Para convertirlo en un cuadrado, planteamos la raíz como:

$\sqrt{(f+gx)\cdot(h+kx)}=\frac{m\cdot(f+gx)}{n}$, entonces se obtiene

$$(f+gx)(h+kx)=\frac{mm\cdot(f+gx)^2}{nn},$$

esta ecuación, dividida entre $f+gx$, da $h+kx=\frac{mm\cdot(f+gx)}{nn}$,

es decir, $hnn+knnx=fmm+gmmx$, de donde se encuentra $x=\frac{fmm-hnn}{knn-gmm}$.

52.

Para explicar esto, se da la siguiente pregunta:

I. Pregunta. Búsquense los números *x*, que cuando se resta 2 de su doble cuadrado, el resto es de nuevo un cuadrado.

Dado que $2xx-2$ tiene que ser un cuadrado, se tiene que considerar que esta expresión puede ser representada por los siguientes factores $2\cdot(x+1)(x-1)$; por eso se equipara su raíz cuadrada con $\frac{m\cdot(x+1)}{n}$, entonces será $2\cdot(x+1)(x-1)=\frac{mm\cdot(x+1)^2}{nn}$; se divide entre $x+1$, y se multiplica por nn, así se obtiene $2nnx-2nn=mmx+mm$ y por lo tanto $x=\frac{mm+2nn}{2nn-mm}$.

Si aquí se toman $m=1$ y $n=1$, entonces $x=3$, y $2xx-2=16=4^2$. Si se toman $m=3$ y $n=2$, entonces $x=-17$: pero ya que solo aparece el cuadrado de x, no importa si se toma $x=-17$ o $x=+17$, de ambos resulta $2xx-2=576=24^2$.

53.

II. Pregunta. Sea dada esta expresión $6+13x+6xx$, que debe convertirse en un cuadrado. Aquí ahora es $a=6$, $b=13$ y $c=6$, donde ni a ni c son cuadrados. De modo que se ve si $bb-4ac$ es un cuadrado; ya que ahora sale 25, entonces se sabe que esta expresión puede ser representada por dos factores, que son $(2+3x)\cdot(3+2x)$; cuya raíz sea $\frac{m(2+3x)}{n}$, de lo cual se obtiene

$$(2+3x)\cdot(3+2x)=\frac{mm(2+3x)^2}{nn},$$

esto se convierte en $3nn+2nnx=2mm+3mmx$, y por lo tanto $x=\frac{2mm-3nn}{2nn-3mm}=\frac{3nn-2mm}{3mm-2nn}$. Para que el numerador se vuelva positivo, $3nn$ tiene que ser mayor que $2mm$ y, por lo tanto, $2mm$ menor que $3nn$; en consecuencia, $\frac{mm}{nn}$ tiene que ser menor que $\frac{3}{2}$, para que el numerador se vuelva positivo. Pero para que el denominador se vuelva positivo, entonces $3mm$ tiene que ser mayor que $2nn$ y, por lo tanto $\frac{mm}{nn}$ mayor que $\frac{2}{3}$. Por eso, para encontrar números positivos para x, tienen que tomarse tales números para m y n que $\frac{mm}{nn}$ sea menor que $\frac{3}{2}$, y aún mayor que $\frac{2}{3}$.

Si ahora se pone $m=6$ y $n=5$, entonces será $\frac{mm}{nn}=\frac{36}{25}$, que es menor que $\frac{3}{2}$, y obviamente mayor que $\frac{2}{3}$; por eso se obtiene $x=\frac{3}{58}$.

54.

IV.) Este tercer caso nos lleva a un cuarto caso, que se da cuando la expresión $a+bx+cxx$ se puede partir en dos partes de tal manera que la primera sea un cuadrado, pero la segunda se pueda descomponer en dos factores, de manera que resulte la forma $pp+qr$, donde las letras p, q y r significan expresiones de este tipo $f+gx$. Entonces solo se necesita poner $\sqrt{pp+qr}=p+\frac{mq}{n}$, por lo tanto será

$$pp+qr=pp+\frac{2mpq}{n}+\frac{mmqq}{nn},$$

donde pp se cancela y los otros términos se pueden dividir entre q, de modo que $r=\frac{2mp}{n}+\frac{mmq}{nn}$, o sea $nnr=2mnp+mmq$, de lo cual x puede determinarse fácilmente, y este es el cuarto caso, en el que nuestra expresión se puede convertir en un cuadrado, que ahora explicaremos mediante algunos ejemplos.

55.

III. Pregunta: Se buscan números x tales que su cuadrado, tomado dos veces, sea 1 más grande que otro cuadrado, o sea, si se resta 1 del doble cuadrado, queda un cuadrado; como pasa con el número 5, cuyo cuadrado 25, tomado dos veces, son 50, restando 1 queda el cuadrado 49.

Por lo tanto, $2xx-1$ tiene que ser un cuadrado, donde de acuerdo con nuestra expresión $a=-1$, $b=0$ y $c=2$, por lo que ni a ni c son cuadrados, ni se puede resolver la expresión en dos factores, porque $bb-4ac=8$ no es un cuadrado y, por lo tanto, no se trata de ninguno de los tres primeros casos.

Pero según el cuarto caso, esta expresión se puede representar como $xx+(xx-1)=xx+\ (x-1)(x+1)$. Su raíz ahora se plantea como $x+\frac{m(x+1)}{n}$, entonces será $xx+(x+1)\cdot(x-1)=xx+\frac{2mx(x+1)}{n}+\frac{mm(x+1)^2}{nn}$, donde las xx se cancelan, y los otros términos se pueden dividir entre $x+1$, entonces salen $nnx-nn=2mnx+mmx+mm$ y $x=\frac{mm+nn}{nn-2mn-mm}$; y como en nuestra expresión $2xx-1$ solo aparece el cuadrado xx, no importa si los valores de x salen positivos o negativos. También se puede escribir $-m$ en lugar de $+m$, para obtener $x=\frac{mm+nn}{nn+2mn-mm}$.

Si aquí se toman $m=1$ y $n=1$, entonces se tiene $x=1$ y $2xx-1=1$. Además, sean $m=1$ y $n=2$, entonces será $x=\frac{5}{7}$ y $2xx-1=\frac{1}{49}$. Pero si se pone $m=1$ y $n=-2$, entonces será $x=-5$, o $x=+5$ y $2xx-1=49$.

56.

IV. Pregunta. Buscamos números cuyo cuadrado, tomado dos veces y sumado 2, de nuevo sea un cuadrado. Uno de estos es 7, del cual el cuadrado duplicado da 98, y sumando 2 resulta el cuadrado 100.

Entonces, esta espresión $2xx+2$ tiene que ser un cuadrado, donde $a=2$, $b=0$ y $c=2$, por lo que nuevamente ni a ni c son cuadrados, tampoco $bb-4ac$, o sea -16, es un cuadrado, y aquí no puede proceder la tercera regla.

Pero nuestra expresión se puede representar según la cuarta regla de la siguiente manera.

Ponemos la primera parte $=4$, entonces la segunda será $2xx-2=2(x+1)\cdot(x-1)$, y por lo tanto nuestra expresión será $4+2(x+1)\cdot(x-1)$. Su raíz sea $2+\frac{m\cdot(x+1)}{n}$, de donde surge esta ecuación

$$4+2(x+1)\cdot(x-1)=4+\frac{4m(x+1)}{n}+\frac{mm(x+1)^2}{nn}$$

donde los 4 se cancelan, pero los otros términos se pueden dividir entre $x+1$, de modo que

$$2nnx-2nn=4mn+mmx+mm \quad \text{y así} \quad x=\frac{4mn+mm+2nn}{2nn-mm}.$$

Si se pone $m=1$ y $n=1$, entonces se tiene $x=7$ y $2xx+2=100$. Si se toma $m=0$ y $n=1$, entonces se tiene $x=1$ y $2xx+2=4$.

57.

A menudo también sucede que cuando no se puede aplicar ni la primera, ni la segunda, ni la tercera regla, no se puede hallar cómo partir la expresión en dos partes según las exigencias de la cuarta regla. Por ejemplo, para la expresión $7+15x+13xx$ es posible tal descomposición, pero no salta a la vista fácilmente. Porque la primera parte es $(1-x)^2$ o $1-2x+xx$, y por lo tanto la segunda parte será $6+17x+12xx$, la cual tiene factores porque $17^2-4\cdot 6\cdot 12=1$ es un cuadrado. Los dos factores de hecho son $(2+3x)\cdot(3+4x)$; de modo que nuestra expresión será $(1-x)^2+(2+3x)(3+4x)$, que ahora puede ser resuelta según la cuarta regla.

Pero no es justo exigir que alguien adivine esta descomposición; por lo tanto, queremos mostrar una forma general de reconocer primero si es posible resolver tal expresión, porque hay un número infinito de ellas, cuya resolución es absolutamente imposible, como p. ej. sucede con esta $3xx+2$, que jamás se puede convertir en un cuadrado.

Pero si una expresión es posible en un solo caso particular, entonces es fácil encontrar todas las soluciones para ella, lo que aún trataremos aquí.

58.

Toda la ventaja que se puede tener en tales casos consiste en ver si se puede encontrar o, por así decirlo, adivinar un caso, en qué tal expresión $a+bx+cxx$ se convierta en un cuadrado, poniendo paso por paso algunos números pequeños para x para ver si acaso sale un cuadrado.

Para explicar este trabajo, si ponemos un número fraccionario para x, se puede escribir de una vez una fracción para x como $\frac{t}{u}$, de la cual surge esta expresión $a+\frac{bt}{u}+\frac{ctt}{uu}$, que si es un cuadrado, también multiplicado por el cuadrado uu sigue siendo un cuadrado. Entonces, solo se tiene que probar si se pueden adivinar para t y u tales valores en números enteros que esta expresión $auu+btu+ctt$ se convierta en un cuadrado. Porque entonces, si se pone $x=\frac{t}{u}$, esta expresión $a+bx+cxx$ ciertamente será un cuadrado.

Pero si no se puede encontrar tal caso a pesar de todo el esfuerzo, se tienen buenas razones para sospechar que es absolutamente imposible convertir la expresión en un cuadrado, ya que hay infinitos casos de este tipo.

59.

Pero si se ha adivinado un caso en el que tal expresión se convierta en un cuadrado, entonces es muy fácil encontrar todos los casos en los que también se convierte en un cuadrado; y el número de ellos es siempre infinito.

Para demostrar esto, consideremos primero esta expresión $2+7xx$, donde $a=2$, $b=0$, y $c=7$. Esta expresión se vuelve un cuadrado si $x=1$; por lo tanto, ponemos $x=1+\mathrm{y}$, entonces será $xx=1+2y+yy$, y nuestra expresión se convierte en $9+14y+7yy$, en la que el primer término es un cuadrado; entonces ponemos la raíz cuadrada de la misma según la segunda regla $= 3 + \frac{my}{n}$, luego obtenemos esta ecuación

$$9 + 14y + 7yy = 9 + \frac{6my}{n} + \frac{mmyy}{nn},$$

donde los 9 se cancelan, pero todos los demás términos son divisibles entre y; entonces obtenemos $14nn + 7nny = 6mn + mmy$ y así $y = \frac{6mn - 14nn}{7nn - mm}$; de esto encontramos $x = \frac{6mn - 7nn - mm}{7nn - mm}$, donde se pueden tomar números arbitrarios para m y n.

Si se pone $m = 1$ y $n = 1$, entonces $x = -\frac{1}{3}$, o como solo aparece xx, también $x = +\frac{1}{3}$, por lo tanto será $2 + 7xx = \frac{25}{9}$. Además ponemos $m = 3$ y $n = 1$, entonces $x = -1$ o $x = +1$. Pero si se pone $m = 3$ y $n = -1$, luego $x = 17$; de esto será $2 + 7xx = 2025$, que es el cuadrado de 45. También pongamos $m = 8$ y $n = 3$, entonces $x = -17$, como antes. Pero si ponemos $m = 8$ y $n = -3$, entonces será $x = 271$, lo que resulta en $2 + 7xx = 514089 = 717^2$.

60.

Consideremos además esta expresión $5xx + 3x + 7$, que se convierte en un cuadrado si $x = -1$. Por eso se pone $x = y - 1$, entonces nuestra expresión se convierte en esta

$$\begin{array}{r} 5yy - 10y + 5 \\ +\ 3y - 3 \\ +7 \\ \hline 5yy - \ 7y + 9 \end{array}$$

cuya raíz cuadrada se pone $= 3 - \frac{my}{n}$, entonces será

$$5yy - 7y + 9 = 9 - \frac{6my}{n} + \frac{mmyy}{nn};$$

así obtenemos $5nny-7nn=-6mn+mmy$, y

$$y=\frac{7nn-6mn}{5nn-mm}, \quad \text{por lo tanto} \quad x=\frac{2nn-6mn+mm}{5nn-mm}.$$

Sean $m=2$ y $n=1$, entonces $x=-6$ y así

$$5xx+3x+7=169=13^2.$$

Pero si se ponen $m=-2$ y $n=1$, entonces $x=18$ y

$$5xx+3x+7=1681=41^2.$$

61.

Consideremos ahora también esta expresión $7xx+15x+13$, y pongamos $x=\frac{t}{u}$, de modo que esta expresión $7tt+15tu+13uu$ debe ser un cuadrado. Ahora probamos algunos números pequeños para t y u de la siguiente manera:

Sea	$t=1$	y	$u=1$,	así nuestra expresión será	$=35$
"	$t=2$	"	$u=1$,	"	$=71$
"	$t=2$	"	$u=-1$,	"	$=11$
"	$t=3$	"	$u=1$,	"	$=121$

Como 121 ahora es un cuadrado, y por lo tanto el valor $x=3$ cumple con la condición requerida, ponemos $x=y+3$ y nuestra expresión será

$$7yy+42y+63+15y+45+13$$

o sea $7yy+57y+121$; cuya raíz se pone $=11+\frac{my}{n}$, entonces se obtiene $7yy+57y+121=121+\frac{22my}{n}+\frac{mmyy}{nn}$, o sea $7nny+57nn=22mn+mmy$, y por lo tanto $y=\frac{57nn-22mn}{mm-7nn}$ y $x=\frac{36nn-22mn+3mm}{mm-7nn}$.

Ponemos p. ej. $m=3$ y $n=1$, entonces serán $x=-\frac{3}{2}$ y nuestra expresión $7xx+15x+13=\frac{25}{4}=\left(\frac{5}{2}\right)^2$. Además, sean $m=1$ y $n=1$, entonces será $x=-\frac{17}{6}$. Si se toman $m=3$ y $n=-1$, entonces serán $x=\frac{129}{2}$ y nuestra expresión

$$7xx+15x+13=\frac{120409}{4}=\left(\frac{347}{2}\right)^2.$$

62.

A veces, es en vano todo el esfuerzo para adivinar un caso en el que la expresión dada se convierta en un cuadrado, como por ejemplo sucede con esta $3xx+2$, o, si para x se escribe $\frac{t}{u}$, con esta $3tt+2uu$, que jamás se convierte en cuadrado, no importa cuales números se asuman para t y u. Hay un número infinito de tales expresiones, que no se pueden convertir en un cuadrado de ninguna manera, y por lo tanto, valdrá la pena indicar algunas características mediante las cuales se puede reconocer la imposibilidad, para que uno sea liberado a menudo de la molestia de encontrar adivinando tales casos en los que salga un cuadrado. A esto está destinado el siguiente capítulo.

CAPÍTULO 5

DE LOS CASOS EN QUE LA EXPRESIÓN $a+bx+cxx$ JAMÁS PODRÁ SER UN CUADRADO

63.

Como nuestra expresión general consta de tres términos, cabe señalar que siempre se puede convertir en otro que carezca del término de en medio. Esto se logra poniendo $x=\frac{y-b}{2c}$, con ello nuestra expresión toma esta forma:

$$a+\frac{by-bb}{2c}+\frac{yy-2by+bb}{4c}, \quad \text{o sea} \quad \frac{4ac-bb+yy}{4c}.$$

Si esto debe ser un cuadrado, se plantea que el mismo sea $=\frac{zz}{4}$, entonces será

$$4ac-bb+yy=czz, \quad \text{por tanto} \quad yy=czz+bb-4ac.$$

Entonces, si se supone que nuestra expresión es un cuadrado, esta también lo será

$$czz+bb-4ac.$$

Y al revés, si esta es un cuadrado, entonces también la expresión de arriba será un cuadrado. En consecuencia, si para $bb-4ac$ se escribe t, depende de que si la expresión $czz+t$ pueda convertirse en un cuadrado o no; y dado que esta expresión consta de sólo dos términos, es indudablemente mucho más fácil juzgar la posibilidad o imposibilidad de ella, lo que tiene que hacerse a partir de la naturaleza de los dos números c y t dados.

64.

Si $t=0$, entonces es obvio que la expresión czz solo se convierte en un cuadrado si el número c es un cuadrado. Como un cuadrado dividido entre otro cuadrado, vuelve a ser un cuadrado, czz no puede ser un cuadrado a menos que $\frac{czz}{zz}$, es decir, c, sea un cuadrado. Por lo tanto, si el número c no es un cuadrado, entonces la expresión czz no puede convertirse en un cuadrado de ninguna manera. Pero si c misma es un número cuadrado, entonces czz también es un cuadrado, donde para z se puede poner lo que se quiera.

65.

Para poder juzgar otros casos, tenemos que utilizar lo que se ha planteado anteriormente de los diversos tipos de números con respecto a cualquier divisor.

Entonces, con respecto al divisor 3, los números son de tres tipos: el primero incluye aquellos números que se pueden dividir entre 3 y que están representados por esta expresión $3n$.

El segundo tipo incluye aquellos que, divididos entre 3, dejan como resto 1 y están contenidos en la expresión $3n+1$.

El tercer tipo, pues, incluye los números que, divididos entre 3, dejan como resto 2, y que están representados por esta expresión $3n+2$.

Dado que todos los números están contenidos en una de estas 3 expresiones, queremos considerar los cuadrados de ellos.

Si el número está contenido en la expresión $3n$, su cuadrado es $9nn$, que se puede dividir no solo entre 3, sino incluso entre 9.

Si el número está contenido en la expresión $3n+1$, entonces su cuadrado es

$$9nn+6n+1,$$

que al dividir entre 3 da $3nn+2n$ y deja 1 de resto, y por lo tanto también pertenece al segundo tipo $3n+1$.

Finalmente, si el número está contenido en esta expresión $3n+2$, entonces su cuadrado es

$$9nn+12n+4,$$

que dividido entre 3 da $3nn+4n+1$ y deja 1 de resto, y así también pertenece al segundo tipo $3n+1$; por lo tanto, está claro que todos los números cuadrados, con respecto al divisor 3, solo son de dos tipos. Porque, o son divisibles entre 3, y luego necesariamente también tienen que ser divisibles entre 9; o si no se pueden dividir entre 3, siempre solo dejan 1 de resto, pero nunca 2. Por lo tanto, ningún número contenido en la forma $3n+2$ puede ser un cuadrado.

66.

De ello, ahora podemos demostrar fácilmente que la expresión $3xx+2$ nunca puede convertirse en un cuadrado; se ponga un número entero o una fracción para x. Porque si x es un número entero y se divide esta expresión $3xx+2$ entre 3, quedan 2, por lo que esta expresión no puede ser un cuadrado. Pero si x es una fracción, entonces ponemos $x=\frac{t}{u}$, de esta fracción podemos suponer que ya se ha llevado a su forma más pequeña, y por lo tanto t y u no tienen común divisor excepto 1. Si acaso $\frac{3tt}{uu}+2$ fuera un cuadrado, entonces, la misma también tendría que ser un cuadrado, si se multiplica por uu, resultando $3tt+2uu$, pero esto tampoco puede suceder. Porque o el número u se puede dividir entre 3 o no; si se puede dividir, entonces t no se puede dividir porque de lo contrario t y u tendrían un divisor común.

Por lo tanto ponemos $u=3f$, así nuestra expresión será $3tt+18ff$, que dividida entre 3 da $tt+6ff$, por lo tanto no se puede dividir más entre 3, como se requiere para un cuadrado, porque $6ff$ se puede dividir, pero tt dividido entre 3 deja de resto 1.

Pero si u no se puede dividir entre 3, veamos lo que queda de resto. Debido a que el primer término se puede dividir entre 3, el resto depende solo del segundo término $2uu$. Pero ahora uu dividido entre 3 tiene 1 de resto, o sea, es un número de este tipo $3n+1$, entonces $2uu$ será un número de este tipo $6n+2$, y así dividido entre 3 deja 2 de resto. Entonces, nuestra expresión $3tt+2uu$, dividida entre 3, deja 2 de resto, y por lo tanto ciertamente no es un número cuadrado,

67.

De la misma manera se puede demostrar que esta expresión $3tt+5uu$ nunca puede ser un cuadrado, y aún tampoco ninguna de estas: $3tt+8uu$, $3tt+11uu$, $3tt+14uu$, etc., donde los números 5, 8, 11, 14, etc., divididos entre 3, dejan 2 de resto. Porque si u fuera divisible entre 3, por lo tanto t no lo sería, y si se pone $u=3s$, la expresión sería divisible entre 3 pero no entre 9. Si u no fuera divisible entre 3 y por lo tanto uu fuera un número de este tipo $3n+1$, el primer término $3tt$ sería divisible entre 3, pero el otro, $5uu$, sería de la forma $15n+5$, o $8uu$ de la forma $24n+8$, o $11uu$ de esta $33n+11$, etc. Estos, divididos entre 3, dejarían 2 de resto, y por lo tanto no pueden ser cuadrados.

68.

Esto también se aplica a esta expresión general $3tt+(3n+2)uu$, que nunca puede convertirse en un cuadrado, ni incluso si se pusieran números negativos para n. Como p. ej., si $n=-1$, entonces es imposible convertir esta expresión $3tt-uu$ en un cuadrado. Porque si u es divisible entre 3, la cosa es obvia, pero si u no fuera divisible entre 3, entonces uu sería un número de este tipo $3n+1$, y así nuestra expresión sería $3tt-3n-1$, que, dividida entre 3, deja -1 de resto, o, sumando 3, deja $+2$. Si ponemos $n=-m$ en general, nuestra expresión se convierte en $3tt-(3m-2)uu$, la cual nunca puede ser un cuadrado.

69.

A esto nos ha llevado ahora la consideración del divisor 3; por lo tanto, también queremos considerar 4 como divisor, entonces todos los números están contenidos en una de estas cuatro expresiones:

$$\text{I. } 4n, \quad \text{II. } 4n+1, \quad \text{III. } 4n+2, \quad \text{IV. } 4n+3.$$

De los números del primer tipo, el cuadrado es $16nn$ y, por lo tanto, se puede dividir entre 16. Si un número es del segundo tipo $4n+1$, su cuadrado es $16nn+8n+1$, el cual, dividido entre 8, deja 1 de resto, y por lo tanto pertenece a esta expresión $8n+1$. Si un número es del tercer tipo $4n+2$ entonces su cuadrado es $16nn+16n+4$, que dividido entre 16, deja 4 de resto, y por lo tanto está contenido en esta forma $16n+4$. Finalmente, si un número es del cuarto tipo $4n+3$, entonces su cuadrado es $16nn+24n+9$, que, dividido entre 8, deja 1 de resto.

70.

De esto aprendemos lo siguiente. En primer lugar, que todos los números cuadrados pares están contenidos en esta forma $16n$ o en esta $16n+4$; en consecuencia, todas las demás formas pares, es decir, $16n+2$, $16n+6$, $16n+8$, $16n+10$, $16n+12$, $16n+14$, jamás pueden ser números cuadrados.

En segundo lugar, de los cuadrados impares vemos que todos están contenidos en esta única forma $8n+1$, o sea, divididos entre 8 dejan 1 de resto. Por lo tanto, todos los números impares restantes que están contenidos en una de estas expresiones $8n+3$; $8n+5$; $8n+7$, nunca pueden ser cuadrados.

71.

Por esta razón, podemos demostrar nuevamente que la expresión $3tt+2uu$ no puede ser un cuadrado. Porque o ambos números t y u son impares, o uno es par y el otro es impar, porque ambos no pueden ser pares a la vez, porque de lo contrario 2 sería su factor común. Si ambos fueran impares, y en consecuencia tanto tt como uu estarían contenidos en la forma $8n+1$, entonces el primer término 3tt dividido entre 8 dejaría 3 de resto, pero el otro término dejaría 2 de resto, pero ambos juntos dejarían 5 de resto, por lo que no sería un cuadrado. Pero si t fuera un número par, y u impar, el primer término $3tt$ sería divisible entre 4, pero el otro, $2uu$, dividido entre 4, dejaría 2 de resto, por lo que ambos juntos dejarían 2 de resto y, por lo tanto, no serían un cuadrado. Pero si finalmente u fuera par, es decir, $u = 2s$, pero t impar y, en consecuencia, $tt = 8n + 1$, entonces nuestra expresión sería $24nn + 3 + 8ss$, que, dividida entre 8, deja 3 de resto, y por lo tanto no puede ser un cuadrado.

Esta misma demostración también puede extenderse a esta expresión

$$3tt + (8n + 2)uu; \text{ igualmente a esta } (8m + 3)tt + 2uu,$$

e incluso a esta $(8m + 3)tt + (8n + 2)uu$, donde para m y n se pueden tomar todos los números enteros, tanto positivos como negativos.

72.

De la misma manera procedemos con el divisor 5, respecto al cual todos los números están contenidos en una de estas cinco expresiones:

$$\text{I. } 5n, \quad \text{II. } 5n + 1, \quad \text{III. } 5n + 2, \quad \text{IV. } 5n + 3 \quad \text{V. } 5n + 4.$$

Si un número es del primer tipo, entonces su cuadrado es $25nn$, que no solo es divisible entre 5 sino también entre 25.

Si un número es del segundo tipo, su cuadrado es $25nn + 10n + 1$, que dividido entre 5 deja 1 de resto y, por lo tanto, está contenido en esta expresión $5n + 1$.

Si un número es del tercer tipo, su cuadrado es $25nn + 20n + 4$, que dividido entre 5 deja 4 de resto.

Si un número es del cuarto tipo, su cuadrado es $25nn + 30n + 9$, que dividido entre 5 deja 4 de resto.

Finalmente, si un número es del quinto tipo, entonces su cuadrado es $25nn + 40n + 16$, que dividido entre 5 deja 1 de resto. Entonces, si un número cuadrado no es divisible entre 5, el resto siempre será o 1 o 4, pero nunca 2 o 3. Por lo tanto, las expresiones $5n+2$ y $5n+3$ no pueden contener ningún cuadrado.

73.

Por esta razón también podemos demostrar que ni la expresión $5tt+2uu$ ni esta $5tt+3uu$ pueden convertirse en un cuadrado. Porque u es divisible entre 5 o no; en el primer caso, estas expresiones son divisibles entre 5, pero no entre 25, y por lo tanto tampoco pueden ser cuadrados. Pero si u no es divisible entre 5, uu es o $5n+1$ o $5n+4$, en el primer caso, la primera expresión se convierte en $5tt+10n+2$, que dividida entre 5 deja 2 de resto; pero la otra se convierte en $5tt+15n+3$, que dividida entre 5 deja 3 de resto, y por lo tanto ninguna puede ser un cuadrado. Pero si $uu=5n+4$, entonces la primera expresión se convierte en $5tt+10n+8$, que dividida entre 5 deja 3 de resto; pero la otra se convierte en $5tt+15n+12$, que, dividida entre 5, deja 2 de resto y, por lo tanto, tampoco puede convertirse en un cuadrado en este caso.

Por esta misma razón, se puede ver que ni esta expresión $5tt+(5n+2)uu$ ni esta $5tt+(5n+3)uu$ pueden ser un cuadrado, porque quedan los mismos restos que antes, incluso se puede escribir $5mtt$ en lugar de $5tt$ en el primer término, siempre y cuando m no sea divisible entre 5.

74.

Como todos los cuadrados pares están contenidos en esta forma $4n$, pero todos impares en esta forma $4n+1$, y por lo tanto ni $4n+2$ ni $4n+3$ pueden ser cuadrados, resulta que esta expresión general $(4m+3)tt+(4n+3)uu$ nunca puede ser un cuadrado. Porque si t fuera par entonces tt sería divisible entre 4, pero el otro término, dividido entre 4, dejaría 3 de resto. Pero si ambos números t y u fueran impares, entonces los restos de tt y de uu serían 1, y de la expresión completa el resto sería 2. Pero ahora, ningún número que dividido entre 4 deje 2 de resto, es un cuadrado. Aquí también se debe notar que tanto m como n pueden tomarse negativos, y también $= 0$, por lo que ni la expresión $3tt + 3uu$ ni esta $3tt - uu$ pueden ser cuadrados.

75.

Como hemos encontrado con los divisores anteriores que algunos tipos de números nunca pueden ser cuadrados, esto también se aplica a todos los demás factores, que siempre hay algunos tipos que no pueden ser cuadrados.

Si el divisor es 7, todos los números están contenidos en uno de los siguientes siete tipos, de los cuales también queremos examinar los cuadrados.

	tipos de números	sus cuadrados	pertenecen al tipo
I.	$7n$	$49nn$	$7n$
II.	$7n+1$	$49nn+14n+1$	$7n+1$
III.	$7n+2$	$49nn+28n+4$	$7n+4$
IV.	$7n+3$	$49nn+42n+9$	$7n+2$
V.	$7n+4$	$49nn+56n+16$	$7n+2$
VI.	$7n+5$	$49nn+70n+25$	$7n+4$
VII.	$7n+6$	$49nn+84n+36$	$7n+1$

Dado que los cuadrados que no son divisibles entre 7 tienen que pertenecer a uno de estos tres tipos $7n+1$, $7n+2$, $7n+4$, los otros tres tipos están completamente descartados por la naturaleza de los cuadrados. Estos tipos ahora son $7n+3$, $7n+5$, $7n+6$, y la razón de esto es evidente, porque siempre hay dos tipos de los cuales los cuadrados pertenecen a un género.

76.

Para mostrar esto con más claridad, se tiene que tomar en cuenta que el último tipo $7n+6$ también se puede expresar como $7n-1$; de la misma manera, la expresión

$7n+5$ es la misma que esta $7n-2$, y $7n+4$ es tanto como $7n-3$. Pero ahora es evidente que de estos dos tipos de números $7n+1$ y $7n-1$ los cuadrados divididos entre 7 dejan el mismo resto, es decir, 1; también los cuadrados de estos tipos $7n+2$ y $7n-2$ son del mismo género.

77.

Entonces, en general, sea cual sea el divisor, el cual queremos indicar con la letra d, los diferentes tipos de números que surgen son los siguientes

$$dn,\ dn+1,\ dn+2,\ dn+3 \text{ etc.},\quad dn-1,\ dn-2,\ dn-3, \text{ etc.},$$

donde los cuadrados de $dn+1$ y $dn-1$ tienen en común que si se dividen entre d dejan 1 de resto, y así ambos pertenecen al mismo tipo, es decir, a $dn+1$. Lo mismo ocurre con los dos tipos $dn+2$ y $dn-2$, cuyos cuadrados pertenecen al tipo $dn+4$.

Y así, en general, esto también se cumple con estos dos tipos $dn+a$ y $dn-a$, cuyos cuadrados divididos entre d dejan el mismo resto, es decir, aa, o tanto como quede de resto cuando se divida aa entre d.

78.

De esta manera se obtiene una cantidad infinita de tales expresiones $att+buu$ que no pueden convertirse en cuadrados de ninguna manera. Así, del divisor 7 se puede ver fácilmente que ninguna de estas tres expresiones

$$7tt+3uu,\ 7tt+5uu \text{ y } 7tt+6uu$$

jamás podrán convertirse en un cuadrado. Porque uu dividido entre 7 deja 1 o 2 o 4 de resto; además, porque en la primera expresión queda de resto 3 o 6 o 5, en la segunda queda 5 o 3 o 6, en la tercera queda 6 o 5 o 3, lo que no puede suceder con ningún cuadrado. Si se dan tales expresiones, entonces todo el esfuerzo de intentar adivinar cualquier caso en el que pudiera salir un cuadrado sería en vano, y por eso, esta consideración es de gran importancia.

Pero si una expresión dada no es de esta naturaleza, y se puede adivinar un solo caso en el que se convierte en un cuadrado, ya se ha mostrado en el capítulo anterior cómo se puede encontrar un número infinito de otros casos a partir de él.

La expresión dada era en realidad $axx+b$, y debido a que para x se encuentran generalmente fracciones, hemos planteado $x=\frac{t}{u}$, así que esta expresión $att+buu$ debe convertirse en un cuadrado.

Pero a menudo hay un número infinito de casos en los que para x se pueden indicar incluso números enteros; en el siguiente capítulo se muestra cómo hallarlos.

CAPÍTULO 6

DE LOS CASOS CON NÚMEROS ENTEROS EN QUE LA EXPRESIÓN $axx + b$ SERÁ UN CUADRADO

79.

Ya hemos mostrado anteriormente cómo pueden ser transformadas tales expresiones $a+bx+cxx$ de modo que desaparezca el término de en medio, y por eso nos conformamos con limitar el presente tratado a esta forma $axx+b$. En ello es importante que para x se deben encontrar solamente números enteros que conviertan la expresión en un cuadrado. Pero antes de todo, es necesario que dicha expresión sea posible, porque si fuera imposible, ni siquiera se encontrarían fracciones, y mucho menos números enteros para x.

80.

Entonces planteamos esta fórmula $axx+b=yy$, donde ambas letras x e y deben ser números enteros, porque a y b también lo son.

Para ello es inevitablemente necesario que ya se conozca o haya adivinado un caso en números enteros, porque de lo contrario sería superfluo todo esfuerzo de seguir buscando casos, porque quizás la fórmula en sí misma sea imposible.

Entonces queremos suponer que esta expresión se convierta en un cuadrado si se toma $x=f$, y queremos indicar el cuadrado con gg, de modo que $aff+b=gg$, donde f y g son números conocidos. Aquí solo se trata de cómo se pueden derivar otros casos de este caso; y esta investigación es tanto más importante cuanto más dificultades se presenten, pero que superaremos con los siguientes métodos.

81.

Dado que ya se ha encontrado $aff+b=gg$, y además debería ser $axx+b=yy$, restamos aquella ecuación de esta para obtener $axx-aff=yy-gg$, la cual se puede expresar mediante factores así $a(x+f)(x-f)=(y+g)(y-g)$; multiplicamos ambos lados por pq, entonces se obtiene $apq(x+f)(x-f)=pq(y+g)(y-g)$; para generar esta igualdad, se hace esta distribución:

$$ap(x+f)=q(y+g) \quad \text{y} \quad q(x-f)=p(y-g),$$

y de estas dos ecuaciones buscamos las dos letras x e y; la primera dividida entre q da $y+g=\frac{apx+apf}{q}$; la otra dividida entre p da $y-g=\frac{qx-qf}{p}$; esta restada de aquella da $2g=\frac{(app-qq)x+(app+qq)f}{pq}$, multiplicando por pq se obtiene $2pqg=(app-qq)x+(app+qq)f$, y por lo tanto

$$x=\frac{2gpq}{app-qq}-\frac{(app+qq)\,f}{app-qq},$$

y de esto se encuentra $y=g+\frac{2gqq}{app-qq}-\frac{(app+qq)\,fq}{(app-qq)\,p}-\frac{qf}{p}$. Los dos primeros términos contienen la letra g, y resumidos dan $\frac{g(app+qq)}{app-qq}$; los otros dos contienen la letra f, y llevados a un denominador, dan $-\frac{2afpq}{app-qq}$; por lo tanto obtenemos

$$y=\frac{g(app+qq)-2afpq}{app-qq}.$$

82.

Este trabajo no parece estar en absoluto de acuerdo con nuestro propósito final, ya que aquí hemos llegado a fracciones, cuando tendríamos que encontrar números enteros para x e y, y surgiría una nueva pregunta: ¿cuáles números se tendrían que poner para p y q para que desaparezcan las fracciones? Esta pregunta parece incluso más difícil que nuestra pregunta principal. Pero aquí existe un método especial, mediante el cual podemos alcanzar fácilmente nuestro objetivo final: dado que aquí todo debe expresarse en números enteros, entonces ponemos $\frac{app+qq}{app-qq}=m$ y $\frac{2pq}{app-qq}=n$, para tener $x=ng-mf$ e $y=mg-naf$. Pero aquí no podemos tomar m y n arbitrariamente, sino que tienen que determinarse de tal manera que se satisfagan las determinaciones anteriores; con este fin, veamos sus cuadrados, entonces tendremos

$$mm=\frac{aap^4+2appqq+q^4}{aap^4-2appqq+q^4} \quad \text{y} \quad nn=\frac{4ppqq}{aap^4-2appqq+q^4},$$

por lo tanto obtenemos:

$$mm-ann=\frac{aap^4+2appqq+q^4-4appqq}{aap^4-2appqq+q^4}=\frac{aap^4-2appqq+q^4}{aap^4-2appqq+q^4}=1.$$

83.

De esto se ve que los dos números m y n tienen que ser tales que $mm = ann + 1$. Como a es un número conocido, sobre todo hay que enfocarse a encontrar un número entero para n tal que $ann+1$ se convierta en un cuadrado, cuya raíz entonces es m; y tan pronto como se encuentre uno, y además de este también se encuentre el número f, que convierte $aff+b$ en un cuadrado, es decir, gg, entonces para x e y se obtienen los siguientes valores en números enteros

$$x = ng - mf \quad \text{e} \quad y = mg - naf,$$

y por tanto $axx + b = yy$.

84.

Está claro que una vez que se han encontrado m y n, también se podrían escribir $-m$ y $-n$ para ellas, porque el cuadrado nn permanece igual.

Por lo visto, para encontrar x e y en números enteros que satisfagan $axx+b=yy$, es necesario ante todo tener un caso donde sea $aff+b=gg$; tan pronto como se conozca este caso, todavía se tienen que buscar los números m y n que cumplan con $ann+1=mm$, para lo cual se dan las instrucciones a continuación. Si esto ha sucedido, se tiene inmediatamente un nuevo caso, es decir, $x = ng + mf$ y $y = mg + naf$, entonces será $axx+b=yy$.

Si ponemos este nuevo caso en el lugar del anterior que se suponía conocido y escribimos $ng+mf$ en lugar de f, y $mg+naf$ en lugar de g, obtenemos otra vez nuevos valores para x e y, de los cuales además, cuando se usan para f y g, se obtienen otros nuevos, y así sucesivamente, de modo que si inicialmente solo se tenía un caso de este tipo, se puede encontrar un número infinito de otros a partir de él.

85.

La forma en que llegamos a esta solución fue bastante laboriosa y al principio pareció alejarse de nuestro objetivo final, ya que nos encontramos con fracciones bastante complicadas que podían eliminarse por circunstancias favorables. Por eso, será bueno mostrar otro camino más corto que nos lleve a esta misma solución.

86.

Como debe ser $axx+b=yy$, y ya se ha encontrado $aff+b=gg$, entonces aquella ecuación nos da $b=yy-axx$, pero esta da $b=gg-aff$, por lo tanto tiene que ser también $yy-axx=gg-aff$, y ahora todo depende de encontrar las desconocidas x e y a partir de los números conocidos f y g. Entonces es inmediatamente evidente que esta igualdad se cumple si se pone $x=f$ e $y=g$; pero no se obtiene un nuevo caso, excepto el que ya se da por conocido.

Entonces queremos suponer que ya hemos encontrado un número para n tal que $ann+1$ se convierta en un cuadrado, o sea que $ann+1=mm$, así ahora $mm-ann=1$, y por este factor multiplicamos la parte $gg-aff$ de la ecuación de arriba, entonces tiene que ser

$$\begin{aligned} yy-axx &= (gg-aff)(mm-ann) \\ &= ggmm-affmm-aggnn+aaffnn. \end{aligned}$$

Para este fin pongamos $y=gm+afn$, así obtenemos:

$$\begin{gathered} ggmm+2afgmn+aaffnn-axx= \\ ggmm-affmm-aggnn+aaffnn. \end{gathered}$$

donde los términos $ggmm$ y $aaffnn$ se cancelan entre sí y obtenemos $axx=affmm+aggnn+2afgmn$, esta ecuación dividida entre a da $xx=ffmm+ggnn+2fgmn$, esta expresión es obviamente un cuadrado, de ello obtenemos $x=fm+gn$, que son justamente las fórmulas que encontramos anteriormente.

87.

Ahora será necesario explicar esta resolución mediante algunos ejemplos.

I. Pregunta. Buscamos todos los números enteros para x, tal que $2xx-1$ se convierta en un cuadrado, o sea que $2xx-1=yy$.

Aquí son $a=2$ y $b=-1$, el primer caso que salta a la vista es si se toma $x=1$ y $y=1$. De este caso conocido ahora tenemos $f=1$ y $g=1$; pero también es necesario encontrar un número para n tal que $2nn+1$ se convierta en un cuadrado, es decir, en mm; esto sucede ahora si $n=2$ y $m=3$, por eso, para cada caso conocido f y g, encontramos este nuevo $x=3f+2g$ e $y=3g+4f$; dado que el primer caso conocido es $f=1$ y $g=1$, encontramos los nuevos casos siguientes:

$x=f=1$	5	29	169	
$y=g=1$	7	41	239	etc.

88.

II. Pregunta. Buscamos todos los números triangulares que también sean números cuadrados.

Sea z la raíz triangular, entonces el triángulo es $\frac{zz+z}{2}$, que debe ser un cuadrado. La raíz de esto sea x, entonces tiene que ser $\frac{zz+z}{2}=xx$. Multiplicamos por 8, entonces $4zz+4z=8xx$, y sumando 1 en ambos lados, da $4zz+4z+1=(2z+1)^2=8xx+1$. Entonces se trata de convertir $8xx+1$ en un cuadrado, y si se pone $8xx+1=yy$, entonces será $y=2z+1$, y por lo tanto la raíz triangular planteada es $z=\frac{y-1}{2}$.

Aquí ahora son $a=8$ y $b=1$, y el caso conocido salta a la vista, es decir, $f=0$ y $g=1$. Para que sea $8nn+1=mm$, tomamos $n=1$ y $m=3$; por lo tanto, obtenemos $x = 3f + g$ e $y = 3g + 8f$, y $z = \frac{y-1}{2}$; de esto encontramos las siguientes soluciones:

$x = f = 0$	1	6	35	204	1189	
$y = g = 1$	3	17	99	577	3363	
$z = \frac{y-1}{2} = 0$	1	8	49	288	1681	etc.

89.

III. Pregunta. Buscamos todos los números pentagonales que a la vez sean números cuadrados.

La raíz del pentágono sea = z, entonces el pentágono es $\frac{3zz-z}{2}$, el cual se debe igualar al cuadrado xx; por lo tanto $3zz - z = 2xx$; multiplicamos por 12 y sumamos 1, así obtenemos $36zz - 12z + 1 = 24xx + 1 = (6z-1)^2$.

Si ahora planteamos $24xx + 1 = yy$, por lo tanto $y = 6z - 1$ y $z = \frac{y+1}{6}$; ya que aquí $a = 24$, $b = 1$, entonces el caso conocido es $f = 0$ y $g = 1$. Como además tiene que ser $24nn + 1 = mm$, se toma $n = 1$ y luego se tiene $m = 5$, por lo tanto obtenemos $x = 5f + g$ e $y = 5g + 24f$, y $z = \frac{y+1}{6}$; o también $y = 1 - 6z$, luego igualmente $z = \frac{1-y}{6}$, de lo cual se encuentran las siguientes soluciones:

$x = f = 0$	1	10	99	980
$y = g = 1$	5	49	485	4801
$z = \frac{y+1}{6} = \frac{1}{3}$	1	$\frac{25}{3}$	81	$\frac{2401}{3}$
o $z = \frac{1-y}{6} = 0$	$-\frac{2}{3}$	-8	$-\frac{242}{3}$	-800

90.

IV. Pregunta. Buscamos todos los cuadrados en números enteros que, tomados siete veces y luego sumado 2, den cuadrados.

Entonces aquí se requiere que $7xx+2=yy$, donde $a=7$, $b=2$; el caso conocido salta a la vista: si $x=1$, y luego son $x=f=1$ e $y=g=3$. Ahora hay que considerar la ecuación $7nn+1=mm$, y es fácil encontrar $n=3$ y $m=8$; por lo tanto, obtenemos $x=8f+3g$ e $y=8g+21f$, de lo cual se encuentran los siguientes valores para x e y:

$x=f=1$	17	271
$y=g=3$	45	717

91.

V. Pregunta. Buscamos todos los números triangulares que a la vez sean números pentagonales.

La raíz del triángulo sea $=p$ y la raíz del pentágono sea $=q$, entonces tiene que ser $\frac{pp+p}{2}=\frac{3qq-q}{2}$, o sea $3qq-q=pp+p$; de esto se busca q, y ya que $qq=\frac{1}{3}q+\frac{pp+p}{3}$, será $q=\frac{1}{6}\pm\sqrt{\frac{1}{36}+\frac{pp+p}{3}}$, es decir, $q=\frac{1\pm\sqrt{12pp+12p+1}}{6}$. Entonces se trata de que $12pp+12p+1$ se convierta en un cuadrado, y eso en números enteros. Dado que el término de en medio $12p$ está presente aquí, ponemos $p=\frac{x-1}{2}$; así obtenemos $12pp=3xx-6x+3$ y $12p=6x-6$, por lo tanto $12pp+12p+1=3xx-2$, que tiene que ser un cuadrado.

Si ponemos $3xx-2=yy$, entonces tenemos $p=\frac{x-1}{2}$ y $q=\frac{1+y}{6}$; ya que ahora todo el asunto depende de la ecuación $3xx-2=yy$, entonces $a=3$ y $b=-2$, y el caso conocido es $x=f=1$ e $y=g=1$; luego, para esta ecuación $mm=3nn+1$ tenemos que $n=1$ y $m=2$, de esto obtenemos los siguientes valores para x e y, y por lo tanto también para p y q.

Entonces, como $x = 2f + g$ e $y = 2g + 3f$, resultan:

$x = f = 1$	3	11	41
$y = g = 1$	5	19	71
$p = 0$	1	5	20
$q = \frac{1}{3}$	1	$\frac{10}{3}$	12
o $q = 0$	$-\frac{2}{3}$	-3	$-\frac{35}{3}$

porque también es $q = \frac{1-y}{6}$.

92.

Hasta ahora estábamos forzados de eliminar el segundo término de la expresión, si había uno. Pero también se puede aplicar el primer método dado a aquellas expresiones donde esté presente el término de en medio, lo cual queremos mostrar aquí. Sea $axx + bx + c = yy$ la expresión dada, que debe ser un cuadrado, y suponemos que de ella ya se conozca el caso $aff + bf + c = gg$.

Ahora se resta esta ecuación de la anterior, entonces será:

$$a(xx - ff) + b(x - f) = yy - gg,$$

que se puede expresarse por factores así:

$$(x - f)(ax + af + b) = (y - g)(y + g).$$

Multiplicamos en ambos lados por pq, entonces será

$$pq(x - f)(ax + af + b) = pq(y - g)(y + g),$$

que partimos en estas dos partes:

I.) $p(x - f) = q(y - g)$, II.) $q(ax + af + b) = p(y + g)$.

Multiplicamos la primera por p, la segunda por q, y restamos aquella de esta; así obtenemos

$$(aqq-pp)x+(aqq+pp)f+bqq=2gpq,$$

por lo cual

$$x=\frac{2gpq}{aqq-pp}-\frac{(aqq+pp)f}{aqq-pp}-\frac{bqq}{aqq-pp}.$$

De la primera ecuación tenemos

$$q(y-g)=p(x-f)=p\left(\frac{2gpq}{aqq-pp}-\frac{2afqq}{aqq-pp}-\frac{bqq}{aqq-pp}\right);$$

así

$$y-g=\frac{2gpp}{aqq-pp}-\frac{2afpq}{aqq-pp}-\frac{bpq}{aqq-pp},$$

y por eso

$$y=g\left(\frac{aqq+pp}{aqq-pp}\right)-\frac{2afpq}{aqq-pp}-\frac{bpq}{aqq-pp}.$$

Para eliminar estas fracciones, planteamos como se hizo anteriormente

$$\frac{aqq+pp}{aqq-pp}=m \quad \text{y} \quad \frac{2pq}{aqq-pp}=n,$$

entonces tenemos

$$m+1=\frac{2aqq}{aqq-pp} \quad \text{y} \quad \frac{qq}{aqq-pp}=\frac{m+1}{2a};$$

por lo tanto será

$$x=ng-mf-b\frac{(m+1)}{2a} \quad \text{e} \quad y=mg-naf-\tfrac{1}{2}bn,$$

donde las letras m y n tienen que ser como arriba, es decir, que $mm=ann+1$.

93.

Pero en esta forma, las fórmulas encontradas para x e y todavía están mezcladas con fracciones, porque los términos que contienen la letra b son fracciones y, por lo tanto, no están de acuerdo con nuestro propósito final. Sin embargo, hay que notar que cuando se avanza de estos valores a los siguientes, los mismos siempre se convierten en enteros, pero los cuales se pueden encontrar mucho más fácilmente a partir de los números p y q introducidos al principio. Porque supongamos que p y q sean tales que $pp = aqq + 1$; ya que $aqq - pp = -1$, entonces las fracciones allí desaparecen automáticamente, y obtenemos

$$x = -2gpq + f(aqq + pp) + bqq$$

e

$$y = -g(aqq + pp) + 2afpq + bpq.$$

Pero como en al caso conocido $aff + bf + c = gg$ solo aparece el cuadrado gg, entonces es igual darle el signo $+$ o $-$ a la letra g; por eso escribimos $-g$ en lugar de $+g$, y así nuestras fórmulas serán:

$$x = 2gpq + f(aqq + pp) + bqq$$

e

$$y = g(aqq + pp) + 2afpq + bpq,$$

porque entonces seguramente será $axx + bx + c = yy$.

Por ejemplo, buscamos aquellos números hexagonales que a la vez sean cuadrados.

Entonces tiene que ser $2xx - x = yy$, donde $a = 2$, $b = -1$ y $c = 0$; aquí el caso conocido es obviamente $x = f = 1$ e $y = g = 1$.

Como además tiene que ser $pp = 2\text{qq} + 1$, entonces serán $q = 2$ y $p = 3$; por eso obtenemos $x = 12g + 17f - 4$ e $y = 17g + 24f - 6$; de lo cual se encuentran los siguientes valores:

$x = f = 1$	25	841	
$y = g = 1$	35	1189	etc.

94.

Pero queremos detenernos un poco más en la primera expresión, donde falta el término de en medio, y considerar los casos en los que la expresión $axx+b$ se convierte en un cuadrado en números enteros.

Sea entonces $axx+b=yy$, y para eso se requieren dos piezas.

En primer lugar, que se conozca un caso en el que esto suceda: sea el mismo ahora $aff+b=gg$.

En segundo lugar, que se conozcan tales números para m y n, que $mm=ann+1$, para lo cual se darán las instrucciones en el siguiente capítulo.

De esto ahora obtenemos un nuevo caso, que es $x=ng+mf$ e $y=mg+anf$, del cual se pueden encontrar nuevos casos en la misma forma, que queremos presentar de la siguiente manera:

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c|l} x=f & A & B & C & D & E & \\ y=g & P & Q & R & S & T & \text{etc.} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll|l|l|l|l} \text{donde} & A=ng+mf & B=nP+mA & C=nQ+mB & D=nR+mC & \\ \text{además} & P=mg+anf & Q=mP+anA & R=mQ+anB & S=mR+anC & \text{etc.} \end{array}$$

Con un poco de esfuerzo, estas dos series de números se pueden continuar tanto como se desee.

95.

Pero de esta manera no se puede continuar la serie superior para x sin conocer la inferior, ni la inferior sin conocer la superior. Pero se puede dar fácilmente una regla para continuar solo la fila superior sin conocer la fila inferior, regla que también se aplica a la fila inferior sin tener que conocer la fila superior.

De hecho, los números que se pueden poner para x avanzan según una cierta progresión, de la cual se puede determinar cada término, p. ej. E, a partir de los dos anteriores, C y D, sin necesidad de los términos inferiores R y S. Porque como

$$E = nS + mD = n(mR + anC) + m(nR + mC),$$

es decir,

$$E = 2mnR + annC + mmC,$$

entonces, como $nR = D - mC$, encontramos

$$E = 2mD - mmC + annC, \quad \text{o} \quad E = 2mD - (mm - ann)C;$$

pero como $mm = ann + 1$, o sea $mm - ann = 1$, entonces tenemos

$$E = 2mD - C,$$

de lo cual es evidente cómo cada uno de los números superiores se determina mediante los dos anteriores.
Con la serie inferior es lo mismo. Ya que

$$T = mS + anD \text{ y } D = nR + mC,$$

entonces

$$T = mS + annR + amnC.$$

Dado que además $S = mR + anC$, entonces $anC = S - mR$, valor que escribimos para anC, obteniendo

$$T = 2mS - R,$$

de modo que la serie inferior avanza según la misma regla que la serie superior.

Buscamos, p. ej., todos los números enteros x, tal que sea $2xx - 1 = yy$. Ahora, aquí son $f = 1$ y $g = 1$; además para que sea $mm = 2nn + 1$, ponemos $n = 2$ y $m = 3$. Ya que ahora $A = ng + mf = 5$, entonces los dos primeros términos son 1 y 5, de los cuales se encuentran los siguientes según la regla $E = 6D - C$, es decir, cada término tomado seis veces menos el término anterior da el término siguiente. Por lo tanto, según esta regla, los números requeridos para x serán:

1, 5, 29, 169, 985, 5741, etc.

De lo cual se puede ver que estos números se pueden continuar infinitamente. Pero si se quisieran admitir fracciones también, se podría dar una cantidad aún infinitamente mayor de acuerdo con el método dado anteriormente.

CAPÍTULO 7

DE UN MÉTODO PARTICULAR DE CONVERTIR LA EXPRESIÓN $ann+1$ EN UN CUADRADO EN NÚMEROS ENTEROS

96.

Lo que se presentó en el capítulo anterior no se puede llevar a cabo si no se puede encontrar para cualquier número a un número entero n tal que $ann+1$ se convierta en un cuadrado, o sea que se obtenga $mm = ann+1$.

Si nos quisiéramos conformar con números fraccionarios, entonces esta ecuación sería fácil de resolver, ya que solo hay que plantear $m = 1+\frac{np}{q}$. Entonces $mm = 1+\frac{2np}{q}+\frac{nnpp}{qq} = ann+1$, donde el 1 se cancela en ambos lados y los términos restantes se pueden dividir entre n, así que luego multiplicado por qq resulta $2pq+npp = anqq$, de esto encontramos $n = \frac{2pq}{aqq-pp}$, de lo cual se puede encontrar un número infinito de valores para n. Pero como n debe ser un número entero, esto no nos ayuda, por lo que se tiene que aplicar un método completamente diferente para encontrarlo.

97.

Pero ante todo, debe tenerse en cuenta que si $ann+1$ debe convertirse en un cuadrado en números enteros, donde a sea un número cualquiera, eso no siempre es posible.

Porque, en primer lugar, se excluyen todos los casos donde a sea un número negativo; después también se excluyen todos los casos en los que a es en sí mismo un número cuadrado, porque entonces ann sería un cuadrado, pero ningún cuadrado $+1$, puede ser un cuadrado en números enteros. Por lo tanto, nuestra expresión tiene que limitarse tal que la letra a no sea un número negativo ni cuadrado; pero cada vez que a sea un número positivo y no un cuadrado, entonces siempre se puede encontrar un número entero para n tal que $ann+1$ se convierta en un cuadrado.

Pero una vez que se haya encontrado tal número, entonces, según el capítulo anterior, es fácil deducir un número infinito de otros. Pero para nuestro proyecto basta con encontrar solo uno, el más pequeño.

98.

Para esto, un científico inglés llamado PELL inventó un método muy ingenioso, que queremos explicar aquí. Pero no es de tal naturaleza que pueda usarse de manera general para cualquier número a, sino solo adecuado para cada caso.

Entonces, queremos comenzar con los casos más fáciles y buscar un número para n que convierta $2nn+1$ en un cuadrado, o sea que $\sqrt{2nn+1}$ se vuelva racional.

Aquí se puede ver fácilmente que esta raíz cuadrada será mayor que n, pero menor que $2n$. Por lo tanto, si ponemos la misma $= n+p$, entonces p ciertamente será menor que n. Por lo tanto tenemos $\sqrt{2nn+1} = n+p$ y por eso $2nn+1 = nn+2np+pp$, de donde ahora buscamos n. Como $nn = 2np+pp-1$, obtenemos $n = p+\sqrt{2pp-1}$.

Por lo tanto, se trata de que $2pp-1$ se convierta en un cuadrado, lo que sucede cuando $p=1$ y de ésto se encuentra $n=2$ y $\sqrt{2nn+1}=3$. Si lo último no hubiera saltado a la vista, se habría podido continuar, y como

$\sqrt{2pp-1}$ es mayor que p y por lo tanto n es mayor que $2p$, entonces se plantea $n=2p+q$, y en consecuencia $2p+q=p+\sqrt{2pp-1}$, o sea $p+q=\sqrt{2pp-1}$, tomando sus cuadrados obtenemos

$$pp+2pq+qq=2pp-1 \quad \text{o} \quad pp=2pq+qq+1$$

y de esto sale $p=q+\sqrt{2qq+1}$, por lo que $2qq+1$ tiene que ser un cuadrado, lo que sucede cuando $q=0$, entonces $p=1$ y $n=2$. De este ejemplo ya se puede obtener una idea de este método, que se aclarará más con lo que sigue.

99.

Ahora sea $a=3$, de modo que la expresión $3nn+1$ debe convertirse en un cuadrado. Ponemos

$$\sqrt{3nn+1}=n+p,$$

entonces tenemos

$$3nn+1=nn+2np+pp \quad \text{y} \quad 2nn=2np+pp-1,$$

y de esto $n=\frac{p+\sqrt{3pp-2}}{2}$; dado que $\sqrt{3pp-2}$ es mayor que p, y por lo tanto n es mayor que $\frac{2p}{2}$, o que p, entonces se pone $n=p+q$, así tenemos

$$2p+2q=p+\sqrt{3pp-2} \quad \text{o sea} \quad p+2q=\sqrt{3pp-2};$$

tomando los cuadrados de esto, obtenemos $pp+4pq+4qq=3pp-2$ o $2pp=4pq+4qq+2$, eso es $pp=2pq+2qq+1$, por lo tanto $p=q+\sqrt{3qq+1}$. Esta expresión es igual a la dada y por lo tanto $q=0$ satisface lo pedido, obteniendo $p=1$ y $n=1$, entonces $\sqrt{3nn+1}=2$.

100.

Ahora suponemos que $a=5$, es decir, que tenemos que convertir la expresión $5nn+1$ en un cuadrado, cuya raíz es mayor que $2n$; por lo tanto, planteamos $\sqrt{5nn+1}=2n+p$, así $5nn+1=4nn+4np+pp$ y luego $nn=4np+pp-1$; por lo tanto $n=2p+\sqrt{5pp-1}$. Como ahora $\sqrt{5pp-1}$ es mayor que $2p$, entonces n también es mayor que $4p$; por eso ponemos $n=4p+q$, entonces $2p+q=\sqrt{5pp-1}$, o sea, $4pp+4pq+qq=5pp-1$; por lo tanto $pp=4pq+qq+1$ y también $p=2q+\sqrt{5qq+1}$; con $q=0$ se satisface lo que se pide de la expresión, entonces $p=1$ y $n=4$; por lo tanto $\sqrt{5nn+1}=9$.

101.

Además suponemos que $a=6$, es decir, que tenemos que convertir la expresión $6nn+1$ en un cuadrado, cuya raíz es mayor que $2n$. Por eso planteamos

$$\sqrt{6nn+1}=2n+p,$$

así $6nn+1=4nn+4np+pp$ y luego $2nn=4np+pp-1$; por lo tanto $n=p+\frac{\sqrt{6pp-2}}{2}$, o sea $n=\frac{2p+\sqrt{6pp-2}}{2}$, entonces n es mayor que $2p$; por eso ponemos $n=2p+q$, entonces

$$4p+2q=2p+\sqrt{6pp-2} \quad \text{o sea} \quad 2p+2q=\sqrt{6pp-2}.$$

Tomando los cuadrados, obtenemos

$$4pp+8pq+4qq=6pp-2 \quad \text{o sea} \quad 2pp=8pq+4qq+2,$$

es decir, $pp=4pq+2qq+1$, de lo cual se encuentra $p=2q+\sqrt{6qq+1}$; esta expresión es igual a la primera y por lo tanto se puede poner $q=0$, entonces $p=1$ y $n=2$; en consecuencia $\sqrt{6nn+1}=5$.

102.

Además sean $a=7$ y $7nn+1=mm$; entonces m es mayor que $2n$, por eso se pone $m=2n+p$, luego será $7nn+1=4nn+4np+pp$, o sea $3nn=4np+pp-1$, de lo cual se encuentra $n=\frac{2p+\sqrt{7pp-3}}{3}$. Como ahora n es mayor que $\frac{4}{3}p$ y por lo tanto mayor que p, entonces ponemos $n=p+q$, así será $p+3q=\sqrt{7pp-3}$. Tomando los cuadrados tenemos

$$pp+6pq+9qq=7pp-3 \quad \text{o sea} \quad 6pp=6pq+9qq+3$$

o sea $2pp=2pq+3qq+1$, de lo cual sale $p=\frac{q+\sqrt{7qq+2}}{2}$. Como ahora aquí p es mayor que $\frac{3q}{2}$ y por lo tanto mayor que q, entonces ponemos $p=q+r$, así obtenemos $q+2r=\sqrt{7qq+2}$. Tomando los cuadrados se tiene

$$qq+4qr+4rr=7qq+2 \quad \text{o sea} \quad 6qq=4qr+4rr-2$$

o sea $3qq=2qr+2rr-1$, por lo tanto $q=\frac{r+\sqrt{7rr-3}}{3}$. Como q es mayor que r, entonces ponemos $q=r+s$, luego $2r+3s=\sqrt{7rr-3}$. Tomando los cuadrados, obtenemos

$$4rr+12rs+9ss=7rr-3 \quad \text{o sea} \quad 3rr=12rs+9ss+3,$$

además, $rr=4rs+3ss+1$; por lo tanto $r=2s+\sqrt{7ss+1}$. Como esta expresión es igual a la primera, ponemos $s=0$, y así se obtiene $r=1$, $q=1$, $p=2$ y $n=3$, entonces $m=8$.

Este cálculo se puede reducir mucho de la siguiente manera, que también procede en otros casos.

Dado que $7nn+1=mm$, m es menor que $3n$. Por eso planteamos $m=3n-p$, luego $7nn+1=9nn-6np+pp$, o sea $2nn = 6np - pp + 1$, por lo tanto $n = \frac{3p + \sqrt{7pp+2}}{2}$, entonces n es menor que $3p$; por eso ponemos $n = 3p - q$, así $3p - 2q = \sqrt{7pp + 2}$, tomando los cuadrados obtenemos

$$9pp - 12pq + 4qq = 7pp + 2 \quad \text{o sea} \quad 2pp = 12pq - 4qq + 2,$$

además $pp = 6pq - 2qq + 1$, de lo cual $p = 3q + \sqrt{7qq + 1}$. Aquí se puede poner inmediatamente $q = 0$, entonces serán $p = 1$, $n = 3$ y $m = 8$, como antes.

103.

Además, tomamos $a = 8$, de modo que $8nn + 1 = mm$ y por lo tanto m es menor que $3n$, entonces $m = 3n - p$, luego $8nn + 1 = 9nn - 6np + pp$, o sea $nn = 6np - pp + 1$, por lo tanto $n = 3p + \sqrt{8pp + 1}$; esta expresión ya es igual a la primera, por lo que se puede poner $p = 0$, de eso sale $n = 1$ y $m = 3$.

104.

Se procede de la misma manera para cualquier otro número a, si es que es positivo y no un cuadrado, y siempre se llega finalmente a un signo de raíz, que es similar a la expresión dada, como p. ej. $\sqrt{att + 1}$, ya que entonces solo se necesita poner $t = 0$, así en este caso la irracionalidad siempre desaparece, y si se procede al revés se obtiene un valor para n que convierte $ann + 1$ en un cuadrado.

A veces se llega pronto al objetivo final, pero a veces se requieren muchas operaciones para ello, dependiendo de la naturaleza del número a, del cual no se pueden dar características específicas. Para los números menores que 13 va bastante rápido, pero si se llega a $a = 13$, el cálculo se vuelve mucho más extenso y por lo tanto será bueno desarrollar este caso aquí.

105.

Sea $a=13$, así que debe ser $13nn+1=mm$. Debido a que mm ahora es mayor que $9nn$, y por lo tanto m es mayor que $3n$, planteamos $m=3n+p$, entonces $13nn+1=9nn+6np+pp$, o sea $4nn=6np+pp-1$, por lo tanto $n=\frac{3p+\sqrt{13pp-4}}{4}$, entonces n es mayor que $\frac{6}{4}p$ y por lo tanto mayor que p.

Por eso ponemos $n=p+q$, así $p+4q=\sqrt{13pp-4}$; los cuadrados dan $13pp-4=pp+8pq+16qq$, por lo tanto $12pp=8pq+16qq+4$, o sea, dividido entre 4,

$$3pp=2pq+4qq+1 \text{ y de esto } p=\frac{q+\sqrt{13qq+3}}{3}.$$

Aquí p es mayor que $\frac{q+3q}{3}$, luego mayor que q; por lo cual ponemos $p=q+r$, entonces $2q+3r=\sqrt{13qq+3}$, cuadrando sale $13qq+3=4qq+12qr+9rr$, es decir $9qq=12qr+9rr-3$, dividido entre 3 da $3qq=4qr+3rr-1$, esto se convierte en $q=\frac{2r+\sqrt{13rr-3}}{3}$. Aquí q es mayor que $\frac{2r+3r}{3}$ y por eso q es mayor que r; por lo tanto se pone $q=r+s$, entonces $r+3s=\sqrt{13rr-3}$, cuadrando sale

$$13rr-3=rr+6rs+9ss, \quad \text{o sea} \quad 12rr=6rs+9ss+3,$$

dividido entre 3 sale $4rr=2rs+3ss+1$, y de eso $r=\frac{s+\sqrt{13ss+4}}{4}$. Aquí r es mayor que $\frac{s+3s}{4}$ o sea s, por eso se pone $r=s+t$, entonces $3s+4t=\sqrt{13ss+4}$, tomando los cuadrados sale $13ss+4=9ss+24st+16tt$ y así $4ss=24st+16tt-4$, dividido entre 4 da

$$ss=6st+4tt-1, \text{ por lo tanto } s=3t+\sqrt{13tt-1}.$$

Entonces s es mayor que $3t+3t$ o sea $6t$; por eso se plantea $s=6t+u$, luego $3t+u=\sqrt{13tt-1}$, cuadrando resulta $13tt-1=9tt+6tu+uu$, y así $4tt=6tu+uu+1$ y $t=\frac{3u+\sqrt{13uu+4}}{4}$, donde t es mayor que $\frac{6u}{4}$ y luego mayor que u. Por eso ponemos $t=u+v$, entonces $u+4v=\sqrt{13uu+4}$; tomando los cuadrados obtenemos

$$13uu+4=uu+8uv+16vv \quad \text{y} \quad 12uu=8uv+16vv-4,$$

dividido entre 4 sale $3uu=2uv+4vv-1$, entonces $u=\frac{v+\sqrt{13vv-3}}{3}$, donde u es mayor que $\frac{4v}{3}$ y luego también mayor que v, por eso ponemos $u=v+x$, entonces $2v+3x=\sqrt{13vv-3}$; tomando los cuadrados obtenemos

$$13vv-3=4vv+12vx+9xx \quad \text{o sea} \quad 9vv=12vx+9xx+3,$$

dividido entre 3 sale $3vv=4vx+3xx+1$, entonces se encuentra $v=\frac{2x+\sqrt{13xx+3}}{3}$, donde v es mayor que $\frac{5}{3}x$ y así mayor que x, por lo tanto se pone $v=x+y$, entonces $x+3y=\sqrt{13xx+3}$, tomando los cuadrados obtenemos

$$13xx+3=xx+6xy+9yy \quad \text{o sea} \quad 12xx=6xy+9yy-3,$$

dividido entre 3 da $4xx=2xy+3yy-1$ y $x=\frac{y+\sqrt{13yy-4}}{4}$, donde x es mayor que y, por eso ponemos $x=y+z$, entonces $3y+4z=\sqrt{13yy-4}$, tomando los cuadrados obtenemos

$$13yy-4=9yy+24yz+16zz \quad \text{o} \quad 4yy=24yz+16zz+4,$$

dividido entre 4 da $yy=6yz+4zz+1$, $y=3z+\sqrt{13zz+1}$. Ya que esta expresión es finalmente igual a la primera, ponemos $z=0$, y procediendo al revés, se obtiene lo siguiente:

$z=0$	$u=\ v+x=3$	$q=\ r+s=71$
$y=1$	$t=\ u+v=5$	$p=\ q+r=109$
$x=y+z=1$	$s=6t+u=33$	$n=\ p+q=180$
$v=x+y=2$	$r=\ s+t=38$	$m=3n+p=649$

Entonces, 180 es, después de 0, el número entero más pequeño para n que convierte $13nn+1$ en un cuadrado.

106.

En este ejemplo se ve claramente que tan extenso puede ser ese cálculo. Y con los números más grandes a menudo se tienen que hacer diez veces más operaciones de las que se efectuaron aquí con el número 13; además, no se puede prever qué números requerirán tanto esfuerzo, por lo que es útil aprovechar el trabajo de otros y agregar una tabla, donde, para todos los números a hasta menos que 100, se presenten los valores de las letras m y n para poder sacar de ella las letras m y n para cada número a.

107.

Sin embargo, debe tenerse en cuenta que para algunos tipos de números se pueden encontrar los valores de m y n de manera general; pero esto solo procede con aquellos números que son 1 o 2 más pequeños o más grandes que un número cuadrado, lo cual valdrá la pena mostrar.

108.

Entonces, sea $a=ee-2$, o sea 2 menor que un número cuadrado, y ya que debería ser $(ee-2)nn+1=mm$, entonces m es obviamente menor que en, por eso ponemos $m=en-p$, entonces

$$(ee-2)nn+1=eenn-2enp+pp,$$

o sea $2nn = 2enp - pp + 1$, y de esto $n = \frac{ep+\sqrt{eepp-2pp+2}}{2}$, donde salta a la vista que tomando $p = 1$, desaparece el signo de raíz y será $n = e$ y $m = ee - 1$. Sea, por ejemplo, $a = 23$, donde $e = 5$, entonces será $23nn + 1 = mm$, si $n = 5$ y $m = 24$. Esto también es evidente en sí mismo; porque si se pone $n = e$, es decir, si $a = ee - 2$, entonces resulta $ann + 1 = e^4 - 2ee + 1$, que es el cuadrado de $ee - 1$.

109.

Ahora sea $a = ee - 1$, o sea 1 menor que un número cuadrado, tal que debería ser $(ee-1)nn+1 = mm$. Ya que m es nuevamente menor que en, ponemos $m = en - p$, entonces

$$(ee-1)nn+1 = eenn - 2enp + pp, \quad \text{o} \quad nn = 2enp - pp + 1,$$

y de esto $n = ep + \sqrt{eepp - pp + 1}$, donde desaparece el signo de raíz si $p = 1$, y de esto obtenemos $n = 2e$ y $m = 2ee - 1$. Esto también se puede ver de manera fácil. Como $a = ee - 1$ y $n = 2e$, será $ann + 1 = 4e^4 - 4ee + 1$, que es el cuadrado de $2ee - 1$. Sea, por ejemplo, $a = 24$, de modo que $e = 5$, entonces

$$n = 10 \quad \text{y} \quad 24nn + 1 = 2401 = (49)^2. \text{*)}$$

*) El signo de la raíz en este caso también desaparece si se pone $p = 0$; por lo tanto, obtenemos indiscutiblemente los números más pequeños para n y m, que son $n = 1$ y $m = e$. Entonces, si $e = 5$, la expresión $24nn + 1$ se convierte en un cuadrado cuando $n = 1$, y la raíz de este cuadrado es $m = e = 5$.

110.

Ahora sea $a=ee+1$, o sea 1 mayor que un número cuadrado, tal que debería ser $(ee+1)nn+1=mm$, donde m es obviamente mayor que en, por eso se pone $m=en+p$, entonces

$$(ee+1)nn+1=eenn+2enp+pp, \quad \text{o} \quad nn=2enp+pp-1,$$

y de esto $n=ep+\sqrt{eepp+pp-1}$, donde se puede tomar $p=1$, y de esto obtenemos $n=2e$ y $m=2ee+1$. Esto también se puede entender de manera fácil, porque como $a=ee+1$ y $n=2e$, entonces será $ann+1=4e^4+4ee+1$, que es el cuadrado de $2ee+1$. Sea, por ejemplo, $a=17$, de modo que $e=4$, entonces se cumple $17nn+1=mm$, si $n=8$ $m=33$.

111.

Finalmente, sea $a=ee+2$, o sea 2 mayor que un número cuadrado, tal que debería ser $(ee+2)nn+1=mm$, donde m es obviamente mayor que en, por eso se pone $m=en+p$, entonces

$$eenn+2nn+1=eenn+2enp+pp \quad \text{o} \quad 2nn=2enp+pp-1,$$

y de esto $n=\frac{ep+\sqrt{eepp+2pp-2}}{2}$. Ahora aquí se toma $p=1$, y de esto obtenemos $n=e$ y $m=ee+1$. Esto también salta a la vista, porque como $a=ee+2$ y $n=e$, entonces será $ann+1=e^4+2ee+1$, que es el cuadrado de $ee+1$. Sea, p. ej., $a=11$, de modo que $e=3$, entonces se cumple $11nn+1=mm$, si $n=3$ y $m=10$. Si se pone $a=83$, entonces es $e=9$, y será $83nn+1=mm$, si se toma $n=9$ y $m=82$.

Tabla

que para cada valor de a muestra
los números mínimos m y n tal que $mm = ann + 1$.

a	n	m	a	n	m
2	2	3	37	12	73
3	1	2	38	6	37
5	4	9	39	4	25
6	2	5	40	3	19
7	3	8	41	320	2049
8	1	3	42	2	13
10	6	19	43	531	3482
11	3	10	44	30	199
12	2	7	45	24	161
13	180	649	46	3588	24335
14	4	15	47	7	48
15	1	4	48	1	7
17	8	33	50	14	99
18	4	17	51	7	50
19	39	170	52	90	649
20	2	9	53	9100	66249
21	12	55	54	66	485
22	42	197	55	12	89
23	5	24	56	2	15
24	1	5	57	20	151
26	10	51	58	2574	19603
27	5	26	59	69	530
28	24	127	60	4	31
29	1820	9801	61	226153980	1766319049
30	2	11	62	8	63
31	273	1520	63	1	8
32	3	17	65	16	129
33	4	23	66	8	65
34	6	35	67	5967	48842
35	1	6	68	4	33

a	n	m
69	936	7775
70	30	251
71	413	3480
72	2	17
73	267000	2281249
74	430	3699
75	3	26
76	6630	57799
77	40	351
78	6	53
79	9	80
80	1	9
82	18	163
83	9	82
84	6	55
85	30996	285769
86	1122	10405
87	3	28
88	21	197
89	53000	500001
90	2	19
91	165	1574
92	120	1151
93	1260	12151
94	221064	2143295
95	4	39
96	5	49
97	6377352	62809633
98	10	99
99	1	10

CAPÍTULO 8

DEL MODO DE HACER RACIONAL LA EXPRESIÓN IRRACIONAL $\sqrt{a+bx+cxx+dx^3}$

112.

Procedemos aquí a una expresión donde x llega a la tercera potencia, para luego pasar a la cuarta, independientemente del hecho de que estos dos casos tienen que tratarse de manera similar.

Así que esta expresión $a+bx+cxx+dx^3$ se debe convertir en un cuadrado, y para este fin se buscan valores adecuados para x en números racionales. Dado que esto ya está sujeto a dificultades mucho mayores, también se requiere mucho más arte para encontrar siquiera números fraccionarios para x, y uno está obligado a conformarse con ello y no pedir una solución en números enteros. Aquí también debe tenerse en cuenta de antemano que no se puede dar una resolución general, como pasaba en los casos anteriores, sino que cada operación solo nos revela un solo valor para x, mientras el método utilizado anteriormente conduce a un número infinito de soluciones a la vez.

113.

Como hay un número infinito de casos de la expresión previamente tratada $a+bx+cxx$ en los que la solución es absolutamente imposible, la situación es aún peor con la expresión actual, donde ni siquiera se puede pensar en una solución, a menos que ya se sepa una o que haya adivinado una. Por lo tanto, solo para estos casos se pueden dar reglas, mediante las cuales se puede encontrar una solución nueva a partir de una solución conocida. De la cual se puede encontrar otra solución nueva de la misma manera, y de tal forma se puede seguir procediendo.

Sin embargo, sucede a menudo que aunque ya se conoce una solución, no se puede deducir ninguna otra de ella. Así que en tales casos solo se da una solución, circunstancia que es especialmente importante señalar porque en el caso anterior se pueden encontrar una infinidad de nuevas soluciones a partir de una sola.

114.

Si la expresión $a+bx+cxx+dx^3$ se debe convertir en un cuadrado, se tiene que suponer necesariamente un caso en el que esto suceda; pero un caso así salta más a la vista, si el primer término ya es un cuadrado y la expresión es $ff+bx+cxx+dx^3$ que obviamente se convierte en un cuadrado si se pone $x=0$.

Trataremos esta expresión primero, y veremos cómo del caso conocido $x=0$ puede encontrarse otro valor para x. Para este fin, se pueden tomar dos caminos, cada uno de los cuales explicaremos aquí por separado, y será bueno empezar con casos especiales.

115.

Pues, sea dada esta expresión $1+2x-xx+x^3$, que debe convertirse en un cuadrado. Ya que el primer término 1 es un cuadrado aquí, se plantea la raíz de este cuadrado de modo que desaparezcan los dos primeros términos. Entonces, sea la raíz cuadrada $1+x$, cuyo cuadrado debe ser igual a nuestra expresión; por lo tanto obtenemos

$$1+2x-xx+x^3=1+2x+xx,$$

donde los dos primeros términos se cancelan entre sí, y resulta esta ecuación $xx=-xx+x^3$, o sea $x^3=2xx$, que dividida entre xx da $x=2$, por lo cual nuestra expresión se convierte en $1+4-4+8=9$.

De la misma manera, si esta expresión $4+6x-5xx+3x^3$ debe convertirse en un cuadrado, primero ponemos la raíz $=2+nx$ y buscamos n tal que los dos primeros términos desaparezcan; como ahora

$$4+6x-5xx+3x^3=4+4nx+nnxx,$$

entonces tiene que ser $4n=6$ y así $n=\frac{3}{2}$, de donde resulta esta ecuación $-5xx+3x^3=\frac{9}{4}xx$, o sea $3x^3=\frac{29}{4}xx$, por lo tanto $x=\frac{29}{12}$. Este valor convierte nuestra expresión en un cuadrado cuya raíz será $2+\frac{3}{2}x=\frac{45}{8}$.

116.

El segundo camino consiste en dar a la raíz tres términos, como $f+gx+hxx$, que sean de tal naturaleza que los primeros tres términos desaparezcan de la ecuación.

Sea dada, por ejemplo, esta expresión $1-4x+6xx-5x^3$, cuya raíz planteamos como $1-2x+hxx$, entonces debe ser

$$1-4x+6xx-5x^3=1-4x+4xx+2hxx-4h\,x^3+hhx^4;$$

aquí los dos primeros términos ya desaparecen, pero para que el tercero también desaparezca, tiene que ser $6=2h+4$ y por lo tanto $h=1$, de esto obtenemos $-5x^3=-4x^3+x^4$, dividido entre x^3 da $-5=-4+x$ y $x=-1$.

117.

Entonces, estos dos métodos se pueden usar cuando el primer término a es un cuadrado. La razón de ellos es que, en el primer método, se dan dos términos a la raíz, como $f+px$, donde f es la raíz cuadrada del primer término y se pone p de tal manera que el segundo término también desaparezca, y, por lo tanto, solo el tercer y cuarto término de nuestra expresión, o sea $cxx+dx^3$, se tienen que comparar con $ppxx$, ya que entonces la ecuación dividida entre xx da un nuevo valor para x, que será

$$x=\frac{pp-c}{d}.$$

En el segundo método se dan tres términos a la raíz que se plantea como $f+px+qxx$, si $a=ff$, y se determinan p y q de tal manera que los primeros tres términos desaparezcan en ambos lados, lo cual se efectúa como sigue. Ya que

$$ff+bx+cxx+dx^3=$$
$$ff+2fpx+2fqxx+ppxx+2pqx^3+qqx^4,$$

entonces tiene que ser $b=2fp$, así $p=\frac{b}{2f}$, y $c=2fq+pp$, entonces $q=\frac{c-pp}{2f}$; y la ecuación restante $dx^3=2pqx^3+qqx^4$ se puede dividir [entre x^3], y por tanto

$$x=\frac{d-2pq}{qq}.$$

118.

Sin embargo, a menudo puede suceder que aunque $a=ff$, este método no dé un nuevo valor para x, como se puede ver en esta expresión $ff+dx^3$, donde faltan el segundo y tercer término.

Porque, si se pone la raíz $=f+px$ según el primer método, así que debe ser $ff+dx^3=ff+2fpx+ppxx$, entonces tienen que ser $0=2fp$ y $p=0$, por lo tanto se obtiene $dx^3=0$, y de esto $x=0$, que no es un valor nuevo.

Pero si se pone la raíz $=f+px+qxx$ según el segundo método, entonces debería ser

$$ff+dx^3=ff+2fpx+2fqxx+ppxx+2pqx^3+qqx^4,$$

entonces tienen que ser $0=2fp$ y $p=0$, además $0=2fq+pp$ y así $q=0$, por lo tanto se obtiene $dx^3=0$, y otra vez $x=0$.

119.

En tales casos, no hay nada más que hacer que ver si se puede adivinar un valor para x que convierta la expresión en un cuadrado; entonces a partir de él se pueden encontrar nuevos valores para x mediante el método anterior, el cual también procede si el primer término no es un cuadrado.

Para mostrar esto, consideramos que esta expresión $3+x^3$ debe ser un cuadrado; ya que esto sucede si $x=1$, entonces planteamos $x=1+y$, obteniendo esta expresión $4+3y+3yy+y^3$, en la que el primer término es un cuadrado. Según el primer método, planteamos la raíz de ella como $2+py$, luego $4+3y+3yy+y^3=4+4py+ppyy$; donde para desaparecer el segundo término tiene que ser $3=4p$, y así $p=\frac{3}{4}$, entonces $3+y=pp$ y luego $y=pp-3=\frac{9}{16}-\frac{48}{16}=-\frac{39}{16}$, por lo tanto $x=-\frac{23}{16}$, que es un nuevo valor para x.

Además, según el segundo método, ponemos la raíz $=2+py+qyy$, entonces será

$$4+3y+3yy+y^3=4+4py+4qyy+ppyy+2pqy^3+qqy^4,$$

donde para desaparecer el segundo término tiene que ser $3=4p$, o sea $p=\frac{3}{4}$, y para desaparecer el tercer término tiene que ser $3=4q+pp$, por lo tanto $q=\frac{3-pp}{4}=\frac{39}{64}$; así obtenemos $1=2pq+qqy$, y de eso $y=\frac{1-2pq}{qq}$, o sea $y=\frac{352}{1521}$, por lo tanto $x=\frac{1873}{1521}$.

120.

Ahora también mostraremos cómo se puede encontrar otro valor nuevo a partir de uno que ya se haya encontrado. Queremos presentar esto de manera general, y aplicarlo a esta expresión $a+bx+cxx+dx^3$, de la cual ya sabemos que se convertirá en un cuadrado si $x=f$ y que entonces será $a+bf+cff+df^3=gg$. Ponemos $x=f+y$, así obtenemos esta nueva expresión:

$$\begin{array}{rlll}
 & a & & \\
+ & bf & + by & \\
+ & cff & + 2cfy & + cyy \\
+ & df^3 & + 3dffy & + 3dfyy + dy^3 \\
\hline
\multicolumn{4}{l}{gg+(b+2cf+3dff)y+(c+3df)yy+dy^3}
\end{array}$$

El primer término de esta expresión es un cuadrado, de modo que se pueden aplicar los dos métodos anteriores, por lo que se obtienen nuevos valores para y, y por lo tanto también para x, es decir, $x=f+y$.

121.

A veces tampoco ayuda que se haya adivinado un valor para x; como sucede en el caso de esta expresión $1+x^3$, que se convierte en un cuadrado si se pone $x=2$. Luego planteamos $x=2+y$, entonces sale esta expresión $9+12y+6yy+y^3$, que ahora debe ser un cuadrado. Según la primera regla, sea la raíz $=3+py$, entonces

$$9+12y+6yy+y^3=9+6py+ppyy,$$

donde tiene que ser $12=6p$ y luego $p=2$; entonces $6+y=pp=4$, y así $y=-2$; en consecuencia $x=0$, de este valor no se puede encontrar nada adicional.
Pero si tomamos la raíz $=3+py+qyy$ según el segundo método, entonces

$$9+12y+6yy+y^3=$$
$$9+6py+6qyy+ppyy+2pqy^3+qqy^4,$$

donde primero tiene que ser $12=6p$ y $p=2$; además $6=6q+pp=6q+4$ y así $q=\frac{1}{3}$; de esto se obtiene

$1 = 2pq + qqy = \frac{4}{3} + \frac{1}{9}y$; por lo tanto $y = -3$, en consecuencia $x = -1$, y $1 + x^3 = 0$; de lo cual no se puede concluir nada adicional; porque si se quisiera poner $x = -1 + z$, entonces resultaría esta expresión $3z - 3zz + z^3$, donde falta el primer término y no se puede usar ninguno de los dos métodos.

De esto resulta ser muy probable que esta expresión $1 + x^3$ no pueda convertirse en un cuadrado excepto en estos tres casos:

$$\text{I.)}\ x = 2, \quad \text{II.)}\ x = 0, \quad \text{III.)}\ x = -1,$$

pero lo cual también puede demostrarse por otras razones.

122.

Como ejercicio queremos considerar esta expresión $1 + 3x^3$, que en estos casos se convierte en un cuadrado:

$$\text{I.)}\ x = 0, \quad \text{II.)}\ x = 1, \quad \text{III.)}\ x = 2,$$

y queremos ver si podemos hallar otros valores similares.

Ahora que sabemos que $x = 1$ es un valor, ponemos $x = 1 + y$; entonces obtenemos $1 + 3x^3 = 4 + 9y + 9yy + 3y^3$, cuya raíz sea $2 + py$, de modo que $4 + 9y + 9yy + 3y^3 = 4 + 4py + ppyy$, donde tiene que ser $9 = 4p$ y por lo tanto $p = \frac{9}{4}$; los otros términos dan $9 + 3y = pp = \frac{81}{16}$, e $y = -\frac{21}{16}$; en consecuencia $x = -\frac{5}{16}$, entonces $1 + 3x^3$ se convierte en un cuadrado, cuya raíz es $-\frac{61}{64}$ o también $+\frac{61}{64}$. Si ahora se quisiera continuar poniendo $x = -\frac{5}{16} + z$, entonces se podrían encontrar otros valores nuevos de ello.

Pero si se quisiera poner la raíz $2 + py + qyy$ según el segundo método para la expresión anterior, entonces debería ser

$$4+9y+9yy+3y^3 =$$
$$4+4py+4qyy+ppyy+2pqy^3+qqy^4,$$

entonces primero tendría que ser $9=4p$, o sea $p=\frac{9}{4}$; luego $9=4q+pp=4q+\frac{81}{16}$, y así $q=\frac{63}{64}$; los términos restantes dan $3=2pq+qqy=\frac{567}{128}+qqy$, o sea $567+128qqy=384$, o sea $128qqy=-183$, es decir $126\cdot\frac{63}{64}y=-183$, o sea $42\cdot\frac{63}{64}y=-61$, por lo tanto $y=-\frac{1952}{1323}$, en consecuencia $x=-\frac{629}{1323}$, de lo cual se pueden encontrar otros nuevos valores según la indicación anterior.

123.

Aquí hemos sacado dos nuevos valores del caso conocido $x=1$, de los cuales, si se quisiera tomar la molestia, a su vez se podrían encontrar otros valores nuevos, que nos llevarían a fracciones muy extensas.

Por eso hay motivos para asombrarse porque del caso $x=1$ no resultó también el otro $x=2$, que también salta a la vista; lo cual es sin duda una señal de la imperfección del método inventado hasta ahora.

De la misma manera, se pueden sacar otros valores nuevos del caso $x=2$; para este fin ponemos $x=2+y$, de modo que esta expresión debe ser un cuadrado $25+36y+18yy+3y^3$; cuya raíz según el primer método sea $5+py$, luego $25+36y+18yy+3y^3=25+10py+ppyy$, y por lo tanto $36=10p$, o sea $p=\frac{18}{5}$; entonces los términos restantes, divididos entre yy, dan $18+3y=pp=\frac{324}{25}$, y por lo tanto $y=-\frac{42}{25}$ y $x=\frac{8}{25}$, con esto $1+3x^3$ se convierte en un cuadrado cuya raíz es $5+py=-\frac{131}{125}$, o, $+\frac{131}{125}$.

Además, si se plantea la raíz según el segundo método como $5+py+qyy$, entonces

$$25+36y+18yy+3y^3 =$$
$$25+10py+10qyy+ppyy+2pqy^3+qqy^4;$$

para desaparecer el segundo y tercer término tiene que ser $36=10p$, o sea $p=\frac{18}{5}$; además $18=10q+pp$, y $10q=18-\frac{324}{25}=\frac{126}{25}$, y $q=\frac{63}{125}$; los términos restantes, divididos entre y^3, dan $3=2pq+qqy$, o sea $qqy=3-2pq=-\frac{393}{625}$; luego $y=-\frac{3275}{1323}$ y $x=-\frac{629}{1323}$.

124.

Este cálculo es igual de difícil y laborioso también en aquellos casos en los que por otra razón es bastante fácil dar una solución incluso general, como en esta expresión $1-x-xx+x^3$, donde se puede tomar de manera general $x=nn-1$, y donde n significa cualquier número.

Porque si $n=2$, entonces $x=3$, y nuestra expresión $=1-3-9+27=16$. Si se toma $n=3$, entonces $x=8$ y nuestra expresión $=1-8-64+512=441$.

Pero aquí se da una circunstancia muy especial, a la cual tenemos que agradecer esta fácil resolución, y que saltará a la vista de inmediato si descomponemos nuestra expresión en factores. Pero es fácil ver que se puede dividir entre $1-x$, y que el cociente será $1-xx$, que además consta de estos factores $(1+x)(1-x)$; de modo que nuestra expresión toma esta forma:

$$1-x-xx+x^3=(1-x)(1+x)(1-x)=(1-x)^2\cdot(1+x).$$

Como esta expresión debe ser un cuadrado, y un cuadrado dividido entre un cuadrado es un cuadrado, entonces $1+x$ también tiene que ser un cuadrado; y viceversa, si $1+x$ es un cuadrado, entonces $(1-x)^2(1+x)$ también se convierte en un cuadrado, por lo que solo hay que poner $1+x=nn$, entonces se obtiene inmediatamente $x=nn-1$.

Si no se hubiera notado esta circunstancia, habría sido difícil encontrar ni siquiera media docena de valores para x mediante los métodos anteriores.

125.

Por eso con cualquier expresión dada es muy bueno descomponerla en factores, siempre y cuando sea posible.

Ya se ha indicado anteriormente cómo se debe efectuar esto; se pone la expresión dada $=0$, y se busca la raíz de esta ecuación, ya que entonces cada raíz, p. ej. $x=f$, da un factor $f-x$; esta búsqueda es mucho más fácil de realizar, porque aquí solo se buscan raíces racionales, que son todas divisores del simple número.

126.

Esta circunstancia también se da con nuestra expresión general

$$a+bx+cxx+dx^3,$$

si desaparecen los dos primeros términos, así que $cxx+dx^3$ debe ser un cuadrado; porque entonces esta expresión, dividida entre el cuadrado xx, es decir, $c+dx$, también tiene que ser un cuadrado necesariamente; luego solo se tiene que plantear $c+dx=nn$, para obtener $x=\frac{nn-c}{d}$, que contiene a la vez infinitamente muchas soluciones, y que incluso son todas las soluciones posibles.

127.

Si en la aplicación del primer método anterior no se quisiera determinar la letra p con el propósito de desaparecer el segundo término, se llegaría a otra expresión irracional que debería hacerse racional.

Entonces, sea $ff + bx + cxx + dx^3$ la expresión dada, cuya raíz ponemos $= f + px$, por lo que será

$$ff + bx + cxx + dx^3 = ff + 2fpx + ppxx,$$

donde el primer término se cancela, pero los otros, divididos entre x, dan $b + cx + dxx = 2fp + ppx$, que es una ecuación cuadrática, de la cual x se encuentra de la siguiente manera

$$x = \frac{pp - c + \sqrt{p^4 - 2cpp + 8dfp + cc - 4bd}}{2d}.$$

Ahora se trata de encontrar tales valores para p que conviertan esta expresión $p^4 - 2cpp + 8dfp + cc - 4bd$ en un cuadrado. Dado que la cuarta potencia del número buscado p aparece aquí, este caso pertenece al capítulo siguiente.

CAPÍTULO 9

DEL MODO DE HACER RACIONAL LA EXPRESIÓN IRRACIONAL $\sqrt{a + bx + cxx + dx^3 + ex^4}$

128.

Llegamos ahora a tales expresiones donde el número indefinido x llega hasta a la cuarta potencia, con lo cual tenemos que concluir a la vez nuestra investigación sobre los símbolos de raíz cuadrada, ya que hasta ahora todavía no se ha llegado suficientemente lejos para poder convertir expresiones que contengan potencias superiores de x en cuadrados.

Consideraremos tres casos de nuestra expresión; el primero de ellos es cuando el primer término a es un cuadrado; el segundo, cuando el último término ex^4 es un cuadrado; el tercer caso, cuando el primer y el último término son cuadrados al mismo tiempo; aquí trataremos estos tres casos por separado.

129.

I.) Resolución de la expresión

$$\sqrt{ff+bx+cxx+dx^3+ex^4}.$$

Como aquí el primer término es un cuadrado, también se podría poner la raíz $=f+px$ según el primer método, y determinar p de tal manera que los dos primeros términos desaparezcan y el resto se pueda dividir entre xx; pero entonces la ecuación todavía contendría xx, y por tanto la determinación de x requeriría un nuevo signo de raíz. Por lo tanto, se tiene que recurrir al segundo método de una vez y poner la raíz $=f+px+qxx$, luego determinar las letras p y q de tal manera que los primeros tres términos desaparezcan y los otros se vuelvan divisibles entre x^3, ya que entonces solo resulta una ecuación simple, de la cual se puede determinar x sin un signo de raíz cuadrada.

130.

Por eso ponemos la raíz $=f+px+qxx$, por lo que debe ser

$$ff+bx+cxx+dx^3+ex^4=$$
$$ff+2fpx+2fqxx+ppxx+2pqx^3+qqx^4,$$

donde los primeros términos desaparecen automáticamente; para los segundos ponemos $b=2fp$, o sea $p=\frac{b}{2f}$, así para el tercer término tiene que ser $c=2fq+pp$, o sea $q=\frac{c-pp}{2f}$; una vez hecho esto, los términos restantes se pueden dividir entre x^3, y dan esta ecuación $d+ex=2pq+qqx$; de la cual se encuentra

$$x=\frac{d-2pq}{qq-e}, \quad \text{o} \quad x=\frac{2pq-d}{e-qq}.$$

131.

Pero es fácil ver que no se puede encontrar nada con este método si el segundo y tercer término faltan en la expresión, es decir, si tanto $b=0$ como $c=0$, porque entonces $p=0$ y $q=0$; en consecuencia $x=\frac{d}{-e}$, de lo cual, comúnmente, no se puede encontrar nada nuevo, porque en este caso obviamente $dx^3+ex^4=0$, y así nuestra expresión es igual al cuadrado ff. Pero en especial, si también es $d=0$, entonces resulta $x=0$, valor que no ayuda; por lo tanto, este método no sirve para expresiones como $ff+ex^4$. Estas mismas circunstancias se presentan si $b=0$ y $d=0$, o sea, si faltan el segundo y el cuarto término, y la expresión tiene esta forma $ff+cxx+ex^4$, entonces $p=0$ y $q=\frac{c}{2f}$, de donde se encuentra $x=0$, que es un valor que salta a la vista de inmediato y no conduce a nada.

132.

II.) Resolución de la expresión

$$\sqrt{a+bx+cxx+dx^3+ggx^4}.$$

Esta expresión podría llevarse directamente al primer caso poniendo $x=\frac{1}{y}$, porque como entonces esta expresión $a+\frac{b}{y}+\frac{c}{yy}+\frac{d}{y^3}+\frac{gg}{y^4}$ tendría que ser un cuadrado, entonces tiene que seguir siendo un cuadrado si se multiplica por el cuadrado y^4; pero luego se obtiene esta expresión

$$ay^4+by^3+cyy+dy+gg,$$

que, escrita al revés, es perfectamente similar a la anterior.

Pero no se necesita esto, sino que se puede plantear la raíz así: $gxx+px+q$, o al revés, $q+px+gxx$, porque entonces

$$a+bx+cxx+dx^3+ggx^4 =$$
$$qq+2pqx+2gqxx+ppxx+2gpx^3+ggx^4,$$

ya que aquí los quintos términos se cancelan automáticamente, entonces primero se determina p de tal manera que también se cancelen los cuartos términos, lo que sucede si $d=2gp$, o sea $p=\frac{d}{2g}$, luego se determina además q tal que los terceros términos también se cancelen, lo que sucede si $c=2gq+pp$, o sea $q=\frac{c-pp}{2g}$; hecho esto, los dos primeros términos dan esta ecuación $a+bx=qq+2pqx$, de la cual se encuentra

$$x=\frac{a-qq}{2pq-b}, \quad \text{o} \quad x=\frac{qq-a}{b-2pq}.$$

133.

Aquí nuevamente ocurre la deficiencia arriba mencionada cuando faltan el segundo y cuarto término, o sea, cuando $b=0$ y $d=0$; porque entonces $p=0$ y $q=\frac{c}{2g}$, de esto, por lo tanto, $x=\frac{a-qq}{0}$, este valor es infinitamente grande y, al igual que el valor $x=0$ en el primer caso, no conduce a nada; por eso, este método no se puede utilizar en absoluto con las expresiones de la forma $a+cxx+ggx^4$.

134.

III.) Resolución de la expresión

$$\sqrt{ff+bx+cxx+dx^3+ggx^4}.$$

Está claro que los dos métodos anteriores se pueden aplicar a esta expresión, entonces, dado que el primer término es un cuadrado, se puede poner la raíz $f+px+qxx$ y hacer desaparecer los primeros tres términos; luego, ya que el último término es un cuadrado, también se puede poner la raíz $q+px+gxx$, y hacer desaparecer los últimos tres términos, entonces se obtienen dos valores para x.

Pero esta expresión también puede tratarse de otras dos formas que están a la medida de ella.

Según la primera forma, se pone la raíz $=f+px+gxx$, y se determina p tal que desaparezcan los segundos términos; ya que debe ser:

$$ff+bx+cxx+dx^3+ggx^4=$$
$$ff+2fpx+2fgxx+ppxx+2gpx^3+ggx^4,$$

entonces se pone $b=2fp$, o sea $p=\frac{b}{2f}$, y como así se cancelan no solo el primer y último término, sino también el segundo, entonces los otros divididos entre xx dan esta ecuación $c+dx=2fg+pp+2gpx$, de la cual se encuentra

$$x=\frac{c-2fg-pp}{2gp-d}, \quad \text{o sea} \quad x=\frac{pp+2fg-c}{d-2gp}.$$

Aquí hay que notar especialmente que en la expresión solo aparece el cuadrado gg, su raíz g puede tomarse tanto negativa como positiva; de lo cual se obtiene adicionalmente otro valor para x, que es

$$x=\frac{c+2fg-pp}{-2gp-d}, \quad \text{o sea} \quad x=\frac{pp-2fg-c}{2gp+d}.$$

135.

También hay otra forma de resolver esta expresión: se pone la raíz $=f+px+gxx$ como antes, pero se determina p de tal manera que los cuartos términos se cancelen entre sí, es decir, se pone $d=2gp$ o $p=\frac{d}{2g}$ en la ecuación anterior, y como los primeros y últimos términos también se cancelan, entonces los otros divididos entre x dan esta simple ecuación $b+cx=2fp+2fgx+ppx$, de la cual se encuentra

$$x=\frac{b-2fp}{2fg+pp-c};$$

donde hay que notar que, como en la expresión solo aparece el cuadrado ff, su raíz también se puede ser $-f$, así que también será

$$x = \frac{b+2fp}{pp-2fg-c};$$

de modo que de esto se encuentran dos valores nuevos para x, y en consecuencia se han sacado seis nuevos valores en total mediante los métodos explicados.

136.

Pero aquí nuevamente ocurre la circunstancia molesta de que cuando faltan el segundo y el cuarto término, o sea $b=0$ y $d=0$, no se puede encontrar un valor adecuado para x, y por lo tanto la resolución de esta expresión $ff+cxx+ggx^4$ no puede ser obtenido de esa manera. Porque, debido a que $b=0$ y $d=0$, los dos métodos dan $p=0$, y por lo tanto el primero da $x=\frac{c-2fg}{0}$, pero el segundo método da $x=0$, mediante estos dos valores no se puede encontrar nada más.

137.

Estas son las tres expresiones a las que se pueden aplicar los métodos explicados hasta ahora; pero si en la expresión dada ni el primer término ni el último son cuadrados, no se puede hacer nada hasta que se haya adivinado un valor de x tal que la expresión se convierta en un cuadrado. Por lo tanto, supongamos que ya se haya encontrado que nuestra expresión se convierte en un cuadrado si se pone $x=h$, es decir, que $a+bh+chh+dh^3+eh^4=kk$, entonces solo se necesita plantear $x=h+y$, entonces se obtiene una nueva expresión en la que el primer término será kk y, por lo tanto, un cuadrado, por lo que se puede usar el primer caso. Esta transformación también se puede usar en los casos anteriores si ya se ha encontrado un valor para x, como p.

ej. $x = h$; entonces solo se necesita poner $x = h + y$, así se obtiene una nueva ecuación a la que se le puede aplicar el método anterior. Dado que luego se pueden sacar otros valores nuevos de los valores ya encontrados para x, y con estos nuevos se puede proceder otra vez de la misma manera, entonces así se pueden encontrar más y más valores nuevos para x.

138.

Pero hay que notar especialmente que las expresiones, ya mencionadas varias veces, donde faltan el segundo y el cuarto término, no tienen resolución a menos que ya se haya adivinado una; ahora, mostraremos la manera de proceder en este caso, considerando esta expresión $a + ex^4$, la cual suele ocurrir con mucha frecuencia.

Entonces suponemos que ya se haya adivinado un valor $x = h$, de modo que sea $a + eh^4 = kk$. Para encontrar otros a partir de él, planteamos $x = h + y$, entonces la siguiente expresión tendrá que ser un cuadrado:

$$a + eh^4 + 4eh^3y + 6ehhyy + 4ehy^3 + ey^4,$$

es decir $kk + 4eh^3y + 6ehhyy + 4ehy^3 + ey^4$, que pertenece al primer tipo; por lo tanto, planteamos su raíz cuadrada como $k + py + qyy$ y, en consecuencia, nuestra expresión es igual a este cuadrado

$$kk + 2kpy + 2kqyy + ppyy + 2pqy^3 + qqy^4,$$

donde primero p y q tienen que determinarse tal que los segundos términos también desaparezcan, por lo que tiene que ser $4eh^3 = 2kp$, y, por lo tanto, $p = \frac{2eh^3}{k}$; además $6ehh = 2kq + pp$, así $q = \frac{6ehh - pp}{2k}$, o sea $q = \frac{3ehhkk - 2eeh^6}{k^3}$, o sea $q = \frac{ehh(3kk - 2eh^4)}{k^3}$; como $eh^4 = kk - a$, entonces será

$q=\frac{ehh(kk+2a)}{k^3}$; luego los términos restantes divididos entre por y^3 dan $4eh+ey=2pq+qqy$, de la cual se encuentra

$$y=\frac{4eh-2pq}{qq-e}.$$

El numerador se lleva a esta forma $\frac{4ehk^4-4eeh^5(kk+2a)}{k^4}$, que además, como $eh^4=kk-a$, se transforma en esto $\frac{4ehk^4-4eh(kk-a)(kk+2a)}{k^4}$, o sea $\frac{4eh(-akk+2a^2)}{k^4}$, o sea $\frac{4aeh(2a-kk)}{k^4}$. Pero el denominador $qq-e$ será $=\frac{e(kk-a)(kk+2a)^2-ek^6}{k^6}$, y esto será

$$=\frac{e(3ak^4-4a^3)}{k^6}=\frac{ea(3k^4-4aa)}{k^6},$$

entonces el valor buscado será

$$y=\frac{4aeh(2a-kk)}{k^4}\cdot\frac{k^6}{ae(3k^4-4aa)},\quad \text{es decir,}\quad y=\frac{4hkk(2a-kk)}{3k^4-4aa},$$

y por lo tanto

$$x=\frac{h(8akk-k^4-4aa)}{3k^4-4aa},\quad \text{o sea}\quad x=\frac{h(k^4-8akk+4aa)}{4aa-3k^4}.$$

Si ahora sustituimos este valor para x, nuestra expresión $a+ex^4$ será un cuadrado cuya raíz será $k+py+qyy$, que entonces toma esta forma:

$$k+\frac{8k(kk-a)(2a-kk)}{3k^4-4aa}+\frac{16k(kk-a)(kk+2a)(2a-kk)^2}{(3k^4-4aa)^2},$$

porque de lo anterior es

$$p=\frac{2eh^3}{k},\quad \text{y}\quad q=\frac{ehh(kk+2a)}{k^3},\quad \text{y}\quad y=\frac{4hkk(2a-kk)}{3k^4-4aa}.$$

139.

Queremos detenernos en esta expresión $a+ex^4$ y como se conoce el caso $a+eh^4=kk$, podemos considerarlo como dos casos porque proceden tanto $x=-h$ como $x=+h$, y por lo tanto podemos transformar esta expresión en otra del tercer tipo donde el primer y último término se convierten en cuadrados. Esto se efectúa poniendo $x=\frac{h(1+y)}{1-y}$, planteamiento que a menudo presta buenos servicios, así nuestra expresión será:

$$\frac{a(1-y)^4+eh^4(1+y)^4}{(1-y)^4} \quad \text{o} \quad \frac{kk+4(kk-2a)y+6kkyy+4(kk-2a)y^3+kky^4}{(1-y)^4};$$

cuya raíz cuadrada según el tercer caso será $\frac{k+py-kyy}{(1-y)^2}$, de modo que el numerador de nuestra expresión tiene que ser igual a este cuadrado

$$kk+2kpy-2kkyy+ppyy-2kpy^3+kky^4.$$

Hacemos que desaparezcan los segundos términos, lo que sucede cuando $4kk-8a=2kp$, o sea $p=\frac{2kk-4a}{k}$; entonces, los términos restantes divididos entre yy dan

$$6kk+4(kk-2a)y=-2kk+pp-2kpy, \quad \text{o sea}$$
$$y(4kk-8a+2kp)=pp-8kk;$$

como $p=\frac{2kk-4a}{k}$ y $pk=2kk-4a$, obtenemos

$$y(8kk-16a)=\frac{-4k^4-16akk+16aa}{kk}, \quad \text{así} \quad y=\frac{-k^4-4akk+4aa}{kk(2kk-4a)};$$

para encontrar x de esto, primero $1+y=\frac{k^4-8akk+4aa}{kk(2kk-4a)}$, y segundo $1-y=\frac{3k^4-4aa}{kk(2kk-4a)}$; así $\frac{1+y}{1-y}=\frac{k^4-8akk+4aa}{3k^4-4aa}$; en consecuencia, obtenemos

$$x = \frac{k^4 - 8akk + 4aa}{3k^4 - 4aa} \cdot h,$$

que es la misma expresión que habíamos encontrado antes.

140.

Para explicar esto con un ejemplo, sea dada esta expresión $2x^4 - 1$, que debe ser un cuadrado. Aquí $a = -1$ y $e = 2$, pero el caso conocido, donde esta expresión se convierte en un cuadrado, es cuando $x = 1$: entonces $h = 1$ y $kk = 1$, es decir $k = 1$; de esto obtenemos inmediatamente este nuevo valor $x = \frac{1+8+4}{3-4} = -13$, pero debido a que de x solo aparece la cuarta potencia, también se puede poner $x = +13$, y de esto se obtiene $2x^4 - 1 = 57121 = (239)^2$.

Si ahora suponemos que este caso es conocido, entonces serán $h = 13$ y $k = 239$, a partir de los cuales se encuentra otra vez un nuevo valor para x, que es

$$x = \frac{3\,262\,808\,641 + 456\,968 + 4}{9\,788\,425\,923 - 4} \cdot 13 = \frac{3\,263\,265\,613}{9\,788\,425\,919} \cdot 13, \text{ así que}$$

$$x = \frac{42\,422\,452\,969}{9\,788\,425\,919}.$$

141.

De la misma manera consideraremos la expresión algo más general $a + cxx + ex^4$, y para el caso conocido que la convierte en un cuadrado, suponemos que $x = h$, de modo que $a + chh + eh^4 = kk$. Para encontrar ahora otros [casos] a partir de este, ponemos $x = h + y$, aquí entonces nuestra expresión tendrá esta forma:

$$\begin{array}{l}
a \\
chh + 2chy + cyy \\
eh^4 + 4eh^3y + 6ehhyy + 4ehy^3 + ey^4 \\
\hline
kk + (2ch + 4eh^3)y + (c + 6ehh)yy + 4ehy^3 + ey^4
\end{array}$$

donde el primer término es un cuadrado; por eso planteamos su raíz cuadrada como $k+py+qyy$, de modo que nuestra expresión debe ser igual a este cuadrado:

$$kk+2kpy+2kqyy+ppyy+2pqy^3+qqy^4;$$

ahora determinamos p y q de tal manera que desaparezcan los segundos y terceros términos, para lo cual se requiere primero que $2ch+4eh^3=2kp$, o sea $p=\frac{ch+2eh^3}{k}$, y luego que $c+6ehh=2kq+pp$, o sea $q=\frac{c+6ehh-pp}{2k}$; entonces los términos restantes, divididos entre y^3, dan esta ecuación $4eh+ey=2pq+qqy$, de la cual se encuentra $y=\frac{4eh-2pq}{qq-e}$, y de eso además $x=h+y$; en este caso la raíz cuadrada de nuestra expresión será $k+py+qyy$. Si se considera este caso como caso conocido inicial, se encontrará un nuevo caso a partir de él y luego se puede continuar de la misma manera hasta donde se quiera.

142.

Para explicar esto, la expresión dada sea $1-xx+x^4$, donde en consecuencia $a=1$, $c=-1$ y $e=1$. El caso conocido inmediatamente salta a la vista, o sea $x=1$, de modo que $h=1$ y $k=1$. Si ahora se pone $x=1+y$ y la raíz cuadrada de nuestra expresión $=1+py+qyy$, entonces tienen que ser primero $p=1$ y luego $q=2$; de esto se encuentran $y=0$ y $x=1$, que es el caso ya conocido, por lo que no se ha encontrado ninguno nuevo. Pero por otras razones se puede demostrar que esta expresión no puede ser un cuadrado, excepto en los casos $x=0$ y $x=\pm 1$.

143.

Además, sea dada esta expresión como ejemplo: $2-3xx+2x^4$, donde en consecuencia $a=2$, $c=-3$ y $e=2$. El caso conocido también se da inmediatamente, es decir, $x=1$; por lo tanto sea $h=1$, entonces $k=1$; si ahora se ponen $x=1+y$ y la raíz cuadrada $1+py+qyy$, entonces $p=1$ y $q=4$, por lo cual se obtiene $y=0$ y $x=1$, de lo cual, otra vez, no se encuentra nada nuevo.

144.

Otro ejemplo es esta expresión $1+8xx+x^4$, donde $a=1$, $c=8$ y $e=1$. Después de una pequeña exploración, resulta el caso $x=2$; luego se toma $h=2$, entonces $k=7$; si ahora se ponen $x=2+y$ y la raíz $7+py+qyy$, entonces tienen que ser $p=\frac{32}{7}$ y $q=\frac{272}{343}$; de esto obtenemos $y=-\frac{5880}{2911}$ y $x=-\frac{58}{2911}$, donde el signo *menos* se puede omitir. En este ejemplo, sin embargo, debe tenerse en cuenta que debido a que el último término ya es un cuadrado y, por lo tanto, tiene que seguir siendo un cuadrado en la nueva expresión, la raíz también se puede tomar de manera diferente según el tercer caso anterior.

Entonces sea $x=2+y$ como antes, así obtenemos

$$\begin{array}{l} 1 \\ 32+32y+\;\;8yy \\ \underline{16+32y+24yy+8y^3+y^4} \\ 49+64y+32yy+8y^3+y^4 \end{array}$$

que ahora se puede convertir en un cuadrado de varias maneras; porque primero se puede tomar la raíz $7+py+yy$, de modo que nuestra expresión debe ser igual a este cuadrado $49+14py+14yy+ppyy+2py^3+y^4$; ahora se puede hacer desaparecer el penúltimo término poniendo $2p=8$, o sea $p=4$; entonces los restantes divididos entre y dan

$$64+32y=14p+14y+ppy=56+30y,$$

y por lo tanto $y=-4$ y $x=-2$, o $x=+2$, que es el mismísimo caso conocido.

Pero si se toma p de tal manera que desaparezcan los segundos términos, entonces serán $14p = 64$ y $p = \frac{32}{7}$; entonces, los términos restantes divididos entre yy dan $14 + pp + 2py = 32 + 8y$, o sea $\frac{1710}{49} + \frac{64}{7}y = 32 + 8y$, y por lo tanto $y = -\frac{71}{28}$, en consecuencia $x = -\frac{15}{28}$, o $x = +\frac{15}{28}$, valor que convierte muestra expresión en un cuadrado cuya raíz es $\frac{1441}{784}$.

Ya que $-yy$ es también la raíz del último término, la raíz cuadrada de la expresión se puede poner $7 + py - yy$, o sea la expresión misma será igual a este cuadrado

$$49 + 14py - 14yy + ppyy - 2py^3 + y^4.$$

Para hacer desaparecer el penúltimo término se pone $8 = -2p$, o sea $p = -4$, entonces los restantes divididos entre y dan $64 + 32y = 14p - 14y + ppy = -56 + 2y$, de lo cual $y = -4$, que es el valor arriba obtenido.

Pero si se hacen desaparecer los segundos términos, entonces $64 = 14p$ y $p = \frac{32}{7}$; pero los restantes divididos entre yy dan $32 + 8y = -14 + pp - 2py$, o sea $32 + 8y = \frac{338}{49} - \frac{64}{7}y$, de lo cual $y = -\frac{71}{28}$ y $x = \mp\frac{15}{28}$, que es lo mismo que arriba.

145.

Se puede proceder de la misma manera con la expresión general

$$a + bx + cxx + dx^3 + ex^4,$$

si se conoce un caso, $x = h$, en que la expresión se convierta en un cuadrado, es decir, kk. Porque entonces planteamos $x = h + y$, obteniendo una expresión con el mismo número de términos, de los cuales el primero será kk; si la raíz de la misma ahora se pone $k + py + qyy$, y se determinan p y

q de tal manera que los segundos y terceros términos también desaparezcan, entonces los dos últimos términos divididos entre y^3 dan una ecuación simple de la cual se pueden determinar y, y en consecuencia también x.

No obstante, aquí se omiten los casos en los que el nuevo valor encontrado de x es el mismo que el conocido $x=h$, porque entonces no se encuentra nada nuevo. En tales casos, o la expresión en sí misma es imposible, o se tendría que adivinar otro caso en el que se convierta en un cuadrado.

146.

Hasta ahora, en la resolución de los signos de raíz cuadrada se ha llegado hasta aquellos donde la máxima potencia no exceda a la cuarta. En caso de que en tal expresión aparezca la quinta o una potencia aún mayor de x, los métodos anteriores no son suficientes para dar una solución, incluso si ya se conoce un caso. Para mostrar esto con más claridad, consideramos esta expresión $kk+bx+cxx+dx^3+ex^4+fx^5$, donde el primer término ya es un cuadrado. Si se quisiera plantear su raíz como antes, es decir, como $k+px+qxx$ y determinar p y q de tal manera que desaparecieran los segundos y terceros términos, por lo que quedan tres que, divididos entre x^3, darían una ecuación cuadrática, de la cual x se determinaría mediante un nuevo signo de raíz. Pero si se quisiera poner la raíz $k+px+qxx+rx^3$, entonces el cuadrado llegaría hasta la sexta potencia, de modo que cuando p, q y r se determinen de tal manera que desaparecieran los segundos, terceros y cuartos términos, pero quedarían las potencias cuarta, quinta y sexta, que divididas entre el número x^4 conducirían a una ecuación cuadrática y, por lo tanto, no podría resolverse sin el signo de raíz. Por eso nos vemos obligados a dejar las expresiones que deberían ser un cuadrado. Así que queremos pasar a los signos de raíz cúbica.

CAPÍTULO 10

DEL MODO DE HACER RACIONAL LA EXPRESIÓN IRRACIONAL $\sqrt[3]{a+bx+cxx+dx^3}$

147.

Aquí se requieren tales valores para x que esta expresión $a+bx+cxx+dx^3$ se convierta en un número cúbico, y por lo tanto se pueda extraer la raíz cúbica de ella. Cabe recordar que esta expresión no tiene que exceder la tercera potencia, porque de lo contrario no habría esperanza de encontrar una solución. Si la expresión solo llegara a la segunda potencia y se omitiera el término dx^3, la solución no sería más fácil: pero si se omitieran los dos últimos términos, de modo que esta expresión $a+bx$ tendría que convertirse en un cubo, entonces el asunto no tendría ninguna dificultad, ya que solo se necesitaría poner $a+bx=p^3$, y de esto encontraríamos $x=\frac{p^3-a}{b}$.

148.

Aquí, sobre todo hay que señalar nuevamente que si ni el primero ni el último término son cubos, no se debe pensar en ninguna resolución, a menos que ya se conozca un caso en el que la expresión se convierta en un cubo, el cual salte a la vista o se haya tenido que encontrar mediante tanteo.

Lo primero ocurre, si, primeramente, el primer término es un cubo y la expresión es $f^3+bx+cxx+dx^3$, donde el caso conocido es $x=0$; después también si el último término es un cubo y la expresión es $a+bx+cxx+g^3x^3$; de estos dos casos surge el tercero, donde el primer y último término son cubos; estos tres casos vamos a considerar aquí.

149.

Caso I. La expresión dada sea $f^3+bx+cxx+dx^3$, la cual debe convertirse en un cubo.

Así que ponemos su raíz $f+px$, de modo que nuestra expresión debe ser igual a este cubo

$$f^3+3ffpx+3fppxx+p^3x^3;$$

ya que los primeros términos se cancelan automáticamente, determinamos p de tal manera que los segundos también desaparezcan, lo que sucede si $b=3ffp$, o sea $p=\frac{b}{3ff}$; entonces los términos restantes divididos entre xx dan esta ecuación $c+dx=3fpp+p^3x$, de la cual se encuentra $x=\frac{c-3fpp}{p^3-d}$. Si el último término dx^3 no estuviera presente, se podría poner la raíz cúbica simplemente $=f$, ya que entonces se obtendría $f^3=f^3+bx+cxx$, o sea $b+cx=0$, y de esto $x=-\frac{b}{c}$, de lo cual no se podría deducir nada más.

150.

Caso II. En segundo lugar, suponemos que la expresión dada tenga esta forma $a+bx+cxx+g^3x^3$; ponemos la raíz cúbica $p+gx$, cuyo cubo es

$$p^3+3gppx+3ggpxx+g^3x^3,$$

ya que entonces los últimos términos se cancelan; ahora determinamos p de tal modo que los penúltimos desaparezcan también, lo que sucede si $c=3ggp$, o sea $p=\frac{c}{3gg}$; entonces los dos primeros términos dan esta ecuación $a+bx=p^3+3gppx$, de la cual se encuentra $x=\frac{a-p^3}{3gpp-b}$. Si el primer término a no hubiera estado presente, la raíz cúbica podría haberse puesto simplemente $=gx$, porque entonces $g^3x^3=bx+cxx+g^3x^3$, o sea $0=b+cx$, en consecuencia, $x = -\frac{b}{c}$; que, sin embargo, comúnmente no sirve para nada.

151.

Caso III. Al fin, en tercer lugar, la expresión dada sea

$$f^3 + bx + cxx + g^3x^3,$$

donde tanto el primero como el último término son cubos; por eso la expresión se puede tratar de las dos maneras anteriores, y así se pueden obtener dos valores para x.

Pero aparte de estos, también se puede poner la raíz $f + gx$, así que nuestra expresión debe ser igual a este cubo $f^3 + 3ffgx + 3fggxx + g^3x^3$, entonces se cancelan los primeros y últimos términos entre sí; pero los demás, divididos entre x, dan esta ecuación $b + cx = 3ffg + 3fggx$, y de esta $x = \frac{b-3ffg}{3fgg-c}$.

152.

Pero si la expresión dada no es de ninguno de estos tres tipos, no hay nada más que hacer que intentar adivinar un valor que convierta la expresión en un cubo; si se ha encontrado uno, que sea $x = h$, tal que

$$a + bh + chh + dh^3 = k^3,$$

luego ponemos $x = h + y$, ya que entonces nuestra expresión tendrá esta forma:

$$\begin{array}{l} a \\ bh \quad + by \\ chh + 2chy + cyy \\ dh^3 \; + 3dhhy + 3dhyy + dy^3 \\ \hline \quad k^3 \; + (b + 2ch + 3dhh)y + (c + 3dh)yy + dy^3 \end{array}$$

que pertenece al primer tipo, y por lo tanto se puede encontrar un valor para y, del cual se obtiene un nuevo valor para x, de donde se pueden encontrar aún más de la misma manera.

153.

Ahora vamos a explicar este método con algunos ejemplos y primero tratamos esta expresión $1+x+xx$, que debe ser un cubo y pertenece al primer tipo. Entonces, se podría plantear inmediatamente la raíz cúbica $= 1$, de lo cual resultaría $x+xx=0$, es decir $x(1+\mathrm{x})=0$; en consecuencia, o $x=0$ o $x=-1$, pero de esto no sale nada más. Así que ponemos la raíz cúbica $1+px$, cuyo cubo es $1+3px+3ppxx+p^3x^3$, y planteamos $1=3p$, o sea $p=\frac{1}{3}$, luego los términos restantes divididos entre xx dan $1=3pp+p^3x$, o sea $x=\frac{1-3pp}{p^3}$; como ahora $p=\frac{1}{3}$, entonces $x=\frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{27}}=18$, y nuestra expresión será $1+18+324=343$, cuya raíz cúbica $1+px=7$. Si se quisiera continuar poniendo $x=18+y$, nuestra expresión obtendría esta forma $343+37y+yy$, cuya raíz cúbica, según la primera regla, debería plantearse como $7+py$, de la cual el cubo es

$$343+147py+21ppyy+p^3y^3;$$

ahora ponemos $37=147p$, o sea $p=\frac{37}{147}$, entonces los términos restantes dan esta ecuación $1=21pp+p^3y$, por lo tanto

$$y=\frac{1-21pp}{p^3}, \text{ es decir, } y=-\frac{340\cdot 21\cdot 147}{37^3}=-\frac{1049580}{50653},$$

de lo cual se pueden encontrar nuevos valores.

154.

Además, sea dada esta expresión $2+xx$, que debe convertirse en un cubo. Aquí, ante todo, hay que adivinar un caso en el que suceda esto, que es $x=5$; luego se pone de inmediato $x=5+y$, entonces se obtiene $27+10y+yy$; cuya raíz cúbica sea $3+py$, por lo tanto la expresión misma es igual a este cubo $27+27py+9ppyy+p^3y^3$; ponemos $10=27p$, o sea $p=\frac{10}{27}$, entonces se obtiene $1=9pp+p^3y$, y de esto $y=\frac{1-9pp}{p^3}$, esto es $y=-\frac{19\cdot9\cdot27}{1000}$, o $y=-\frac{4617}{1000}$, además $x=\frac{383}{1000}$; por eso nuestra expresión se convierte en $2+xx=\frac{2146689}{1000000}$, cuya raíz cúbica tiene que ser $3+py=\frac{129}{100}$.

155.

Además, vamos a ver si esta expresión $1+x^3$ podrá ser un cubo aparte de los obvios, $x=0$ y $x=-1$. Aunque esta expresión pertenezca al tercer caso, la raíz $1+x$ no nos ayuda nada, porque su cubo $1+3x+3xx+x^3$ igualada con nuestra expresión da $3x+3xx=0$, o sea $x(1+x)=0$, entonces o $x=0$ o $x=-1$.

Si también se quiere plantear $x=-1+y$, obtenemos esta expresión $3y-3yy+y^3$ que debe ser un cubo y pertenece al segundo caso; por eso, se pone la raíz cúbica $p+y$ cuyo cubo es

$$p^3+3ppy+3pyy+y^3,$$

y si se pone $-3=3p$, o sea $p=-1$, entonces los términos restantes dan

$$3y=p^3+3ppy=-1+3y,$$

consecuentemente $y=\frac{1}{0}$ que es infinito; de lo cual no se encuentra nada. También es en vano el esfuerzo de encontrar otros valores para x, porque se puede demostrar por otras razones que esta expresión $1+x^3$, aparte de los casos indicados, nunca puede convertirse en un cubo; porque se ha demostrado que la suma de dos cubos como t^3+x^3 nunca puede convertirse en un cubo, por lo tanto tampoco es posible en el caso $t=1$.

156.

También se afirma que $2+x^3$ no podrá ser en un cubo excepto en el caso de que $x=-1$; aunque esta expresión pertenezca al segundo caso, la regla que se usa allí no da ningún resultado, porque faltan los términos de en medio. Pero si se pone $x=-1+y$, se obtiene esta expresión $1+3y-3yy+y^3$, que se puede tratar según los tres casos. Si, según el primer caso, se pone la raíz $1+y$, cuyo cubo es $1+3y+3yy+y^3$, entonces $-3yy=3yy$, lo que solo ocurre si $y=0$. Si, según el segundo caso, se pone la raíz $-1+y$, cuyo cubo es $-1+3y-3yy+y^3$, entonces $1+3y=-1+3y$ y $y=\frac{2}{0}$, que es infinito. Según el tercer modo, se tendría que poner la raíz $1+y$, lo que ya se ha hecho.

157.

Sea dada la expresión $3+3x^3$ que debe convertirse en un cubo; ahora, esto ocurre primero en el caso de que $x=-1$, del cual no se puede deducir nada; pero luego también sucede en el caso de que $x=2$: por eso se plantea $x=2+y$, entonces resulta esta expresión

$$27+36y+18yy+3y^3,$$

que pertenece al primer caso, por lo tanto la raíz sea $3+py$, cuyo cubo es $27+27py+9ppyy+p^3y^3$; luego ponemos $36=27p$, o sea $p=\frac{4}{3}$, entonces los demás términos, divididos entre yy, dan $18+3y=9pp+p^3y=16+\frac{64}{27}y$, o sea

$\frac{17}{27}y=-2$, por lo tanto $y=-\frac{54}{17}$, entonces $x=-\frac{20}{17}$; así nuestra expresión se convierte en $3+3x^3=-\frac{9261}{4913}$, cuya raíz cúbica es $3+py=-\frac{21}{17}$; y de este valor se podrían encontrar varios más si se quisiera.

158.

Finalmente, vamos a considerar esta expresión $4+xx$, que se convierte en un cubo en dos casos conocidos: $x=2$ y $x=11$. Si ahora ponemos primero $x=2+y$, esta expresión $8+4y+yy$ tiene que ser un cubo, cuya raíz sea $2+\frac{1}{3}y$, y por lo tanto la expresión $=8+4y+\frac{2}{3}yy+\frac{1}{27}y^3$, de la cual obtenemos $1=\frac{2}{3}+\frac{1}{27}y$, entonces $y=9$ y $x=11$, que es el otro caso conocido.

Si ahora además se pone $x=11+y$, se obtiene $125+22y+yy$, que igualando con el cubo de $5+py$, es decir, con $125+75py+15ppyy+p^3y^3$, y tomando $p=\frac{22}{75}$, resulta $1=15pp+p^3y$, o sea $p^3y=1-15pp=-\frac{109}{375}$; por eso $y=-\frac{122625}{10648}$, y así $x=-\frac{5497}{10648}$.

Como x puede ser tanto negativo como positivo, ponemos $x=\frac{2+2y}{1-y}$, entonces nuestra expresión se convierte en $\frac{8+8yy}{(1-y)^2}$, que debe ser un cubo; entonces multiplicamos arriba y abajo por $1-y$ para que el denominador se convierta en un cubo y obtenemos $\frac{8-8y+8yy-8y^3}{(1-y)^3}$, donde solo el numerador $8-8y+8yy-8y^3$, o el mismo dividido entre 8, es decir, $1-y+yy-y^3$, tiene que ser convertido en un cubo; la expresión pertenece a los tres casos.

Si ahora, según el primer caso, se plantea la raíz $=1-\frac{1}{3}y$, cuyo cubo es $1-y+\frac{1}{3}yy-\frac{1}{27}y^3$, entonces $1-y=\frac{1}{3}-\frac{1}{27}y$, o sea $27-27y=9-y$, por lo tanto $y=\frac{9}{13}$, entonces $1+y=\frac{22}{13}$ y $1-y=\frac{4}{13}$, por lo tanto $x=11$ como antes.

Según el segundo caso, si se pone la raíz $\frac{1}{3}-y$, se encuentra justamente lo mismo.

Según el tercer caso, si se pone la raíz $1-y$, cuyo cubo es $1-3y+3yy-y^3$, se obtiene $-1+y=-3+3y$, y así $y=1$, por lo tanto $x=\frac{4}{0}$, o sea infinito; por eso, de esta manera no se encuentra nada nuevo.

159.

Pero como ya conocemos estos dos casos $x=2$ y $x=11$, se puede poner $x=\frac{2+11y}{1\pm y}$; porque si $y=0$, entonces $x=2$, pero si y es infinitamente grande, entonces $x=\pm 11$.

Por tanto, primero sea $x=\frac{2+11y}{1+y}$, así nuestra expresión será

$$4+\frac{4+44y+121yy}{1+2y+yy} \quad \text{o} \quad \frac{8+52y+125yy}{(1+y)^2};$$

multiplicamos arriba y abajo por $1+y$, para que el denominador se vuelva un cubo, y solo el numerador, que es $8+60y+177yy+125y^3$, tenga que ser un cubo.

Entonces primero ponemos la raíz $=2+5y$, con ella no solo desaparecerían los dos primeros términos, sino también los últimos, y por lo tanto no se encontraría nada.

Por eso, según el segundo caso, ponemos la raíz $p+5y$, cuyo cubo es $p^3+15ppy+75pyy+125y^3$, y ponemos $177=75p$, o sea $p=\frac{59}{25}$, entonces será

$8+60y=p^3+15ppy$, por lo tanto $-\frac{2943}{125}y=\frac{80379}{15625}$ e $y=-\frac{80379}{367875}$, de lo cual se podría encontrar x.

Pero también se puede poner $x=\frac{2+11y}{1-y}$, y entonces nuestra expresión será

$$4+\frac{4+44y+121yy}{1-2y+yy}=\frac{8+36y+125yy}{(1-y)^2},$$

cuyo denominador multiplicado por $1-y$ se convierte en un cubo. Entonces $8+28y+89yy-125y^3$ también tiene que ser convertido en un cubo.

Si ahora, según el primer método, ponemos la raíz $=2+\frac{7}{3}y$, cuyo cubo es $8+28y+\frac{98}{3}yy+\frac{343}{27}y^3$, entonces $89-125y=\frac{98}{3}+\frac{343}{27}y$, o sea $\frac{3718}{27}y=\frac{169}{3}$; por lo tanto $y=\frac{1521}{3718}=\frac{9}{22}$; en consecuencia $x=11$, que es el caso ya conocido.

Si además, según el tercer método, ponemos la raíz $2-5y$, cuyo cubo es $8-60y+150yy-125y^3$, entonces obtenemos $28+89y=-60+150y$, por lo tanto $y=\frac{88}{61}$, de lo cual se encuentra $x=-\frac{1090}{27}$, y nuestra expresión se convierte en $\frac{1191016}{729}$, que es el cubo de $\frac{106}{9}$.

160.

Estos son los métodos hasta ahora conocidos mediante los cuales una de estas expresiones se puede convertir en un cuadrado o en un cubo, siempre y cuando la potencia más alta del número indeterminado no exceda el cuarto grado en el primer caso, pero el tercer grado en el último caso.

Se podría agregar además el caso de que una expresión dada deba convertirse en un bicuadrado [cuadrado de un cuadrado], en la cual la mayor potencia no tiene que exceder el segundo grado. Pero si una expresión como

$a+bx+cxx$ debe ser un bicuadrado, ante todo se tiene que convertir la misma en un cuadrado, porque entonces solo falta convertir la raíz de este cuadrado en un cuadrado nuevamente; para lo cual ya se ha dado la regla anteriormente. Entonces, si por ejemplo $xx+7$ debe ser un bicuadrado, primero se convierte en un cuadrado, lo que sucede cuando $x=\frac{7pp-qq}{2pq}$ o también cuando $x=\frac{qq-7pp}{2pq}$; entonces nuestra expresión se vuelve igual a este cuadrado

$$\frac{q^4-14qqpp+49p^4}{4ppqq}+7=\frac{q^4+14qqpp+49p^4}{4ppqq},$$

cuya raíz es $\frac{7pp+qq}{2pq}$, la cual todavía tiene que convertirse en un cuadrado. Se multiplica arriba y abajo por $2pq$ para que el denominador se vuelva un cuadrado. Entonces el numerador $2pq(7pp+qq)$ tendrá que ser un cuadrado, lo que solo se puede lograr si ya se ha adivinado un caso. Para este fin, se puede plantear $q=pz$, entonces esta expresión $2ppz(7pp+ppzz)=2p^4z(7+zz)$, y, dividida entre p^4, también $2z(7+zz)$ deben ser cuadrados. Ahora, aquí el caso conocido es $z=1$, por lo tanto ponemos $z=1+y$, entonces obtenemos

$$(2+2y)(8+2y+yy)=16+20y+6yy+2y^3,$$

cuya raíz sea $4+\frac{5}{2}y$, de la cual el cuadrado es $16+20y+\frac{25}{4}yy$, igualado a nuestra expresión da $6+2y=\frac{25}{4}$, $y=\frac{1}{8}$ y $z=\frac{9}{8}$; ya que ahora $z=\frac{q}{p}$, entonces serán $q=9$ y $p=8$, por lo tanto $x=\frac{367}{144}$, entonces nuestra expresión se convierte en $7+xx=\frac{279841}{20736}$, cuya raíz cuadrada es $\frac{529}{144}$, y sacando nuevamente la raíz cuadrada de ella se obtiene $\frac{23}{12}$, de la cual nuestra expresión es entonces el bicuadrado.

161.

Finalmente, hay que notar en este capítulo que existen algunas expresiones que se pueden convertir en un cubo de forma general; porque si p. ej. cxx debe ser un cubo, se pone la raíz $= px$, y entonces será $cxx = p^3x^3$, o sea $c = p^3x$, por lo tanto $x = \frac{c}{p^3}$; escribimos $\frac{1}{q}$ en lugar de p, entonces $x = cq^3$.

La razón de esto obviamente es que la expresión contiene un cuadrado; por lo tanto, todas las expresiones como $a(b+cx)^2$, o sea $abb+2abcx+accxx$, se pueden convertir fácilmente en un cubo; porque poniendo su raíz cúbica $=\frac{b+cx}{q}$, entonces $a(b+cx)^2 = \frac{(b+cx)^3}{q^3}$, la cual dividida entre $(b+cx)^2$ da $a = \frac{b+cx}{q^3}$, de eso $x = \frac{aq^3-b}{c}$, donde q se puede determinar arbitrariamente.

Esto aclara que es sumamente útil descomponer en factores la expresión dada, siempre y cuando que sea posible; y este tema se tratará ampliamente en el capítulo siguiente.

CAPÍTULO 11

DE LA DESCOMPOSICIÓN DE LA EXPRESIÓN $axx + bxy + cyy$ EN FACTORES

162.

Aquí las letras x e y sólo significan números enteros, y también hemos visto en la anterior, donde se tenía que conformar con fracciones, cómo la pregunta se puede reducir siempre a números enteros. Porque, si p. ej. el número buscado x es una fracción, solo se necesita plantear $x = \frac{t}{u}$, ya que entonces siempre se pueden indicar números enteros para t y u, y debido a que esta fracción se puede expresar en la forma más pequeña, se puede suponer que las dos letras t y u no tienen un divisor común entre ellos.

Entonces, en la expresión actual, x e y son solo números enteros, y antes de que podamos mostrar cómo deben convertirse en un cuadrado, o cubo, o una potencia aún mayor, es necesario investigar cuáles valores deben tener las letras x e y para que esta expresión tenga dos o más factores.

163.

Ahora hay tres casos a considerar: el primero es cuando esta expresión realmente se pueda descomponer en dos factores racionales, lo cual sucede, como ya hemos visto antes, cuando $bb-4ac$ se convierte en un número cuadrado.

El segundo caso es cuando estos dos factores se vuelvan iguales entre sí, en el cual la expresión misma contiene un cuadrado verdadero.

El tercer caso es cuando la misma no pueda resolverse de otra manera que en factores irracionales, que pueden ser simplemente irracionales o incluso imaginarios; aquello sucede cuando $bb-4ac$ es un número positivo pero no un cuadrado, pero lo otro sucede cuando $bb-4ac$ se vuelve negativo. Estos son los tres casos que ahora tenemos que considerar aquí.

164.

Si nuestra expresión se puede descomponer en dos factores racionales, entonces se puede representar la misma como $(fx+gy)(hx+ky)$, que por su propia naturaleza ya incluye dos factores. Pero si se quiere que la misma incluya más factores de manera general, solo se necesita plantear $fx+gy=pq$ y $hx+ky=rs$, ya que entonces nuestra expresión se vuelve igual a este producto $pqrs$, y por lo tanto contiene cuatro factores en sí, cuyo número podría aumentarse a voluntad; pero de esto obtenemos un valor doble para x, es decir, $x = \frac{pq-gy}{f}$ y $x = \frac{rs-ky}{h}$, de lo cual se encuentra $hpq - hgy = frs - fky$, y así

$$y = \frac{frs-hpq}{fk-hg} \quad \text{y} \quad x = \frac{kpq-grs}{fk-hg};$$

para que ahora x e y se expresen en números enteros, se tienen que poner las letras p, q, r, s tales que el numerador realmente se pueda dividir entre el denominador, lo que sucede cuando p y r, o q y s, son divisibles entre el denominador.

165.

Para explicar esto, sea dada esta expresión $xx - yy$, que consta de estos factores $(x+y)(x-y)$; si ahora debe tener más factores, entonces planteamos $x+y = pq$ y $x-y = rs$, así $x = \frac{pq+rs}{2}$ y $y = \frac{pq-rs}{2}$; para que estos números se vuelvan enteros, entonces los dos números pq y rs tienen que ser ambos pares o ambos impares.

Sean, p. ej., $p = 7$, $q = 5$, $r = 3$ y $s = 1$, entonces $pq = 35$ y $rs = 3$, en consecuencia $x = 19$ e $y = 16$; por lo tanto $xx - yy = 105$, número que realmente consta de los factores $7 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1$; por lo que este caso no tiene la menor dificultad.

166.

Aún menos dificultad tiene el segundo caso, donde la expresión incluye dos factores iguales y, por lo tanto, se puede representar como $(fx+gy)^2$, cuadrado que no puede tener otros factores que los que surgen de la raíz $fx+gy$, por lo tanto, si se plantea $fx+gy = pqr$, nuestra expresión se convierte en $ppqqrr$ y así puede tener tantos factores como se desee. Aquí solo se determina uno de los dos números x e y, y del otro podemos disponer libremente; porque obtenemos $x = \frac{pqr - gy}{f}$, donde y se puede escoger fácilmente para que la fracción desaparezca. La expresión más fácil de este tipo es xx, si se toma $x = pqr$, el cuadrado xx incluye tres factores cuadráticos, que son pp, qq y rr.

167.

Pero el tercer caso, en el que nuestra expresión no puede resolverse en dos factores racionales, tiene muchas más dificultades y requiere métodos especiales para encontrar valores para x e y con los cuales la expresión contenga dos o más factores. Para facilitar esta investigación, debe tenerse en cuenta que nuestra expresión se puede transformar fácilmente en otra donde falta el término de en medio, porque solo se necesita poner $x = \frac{z - by}{2a}$, ya que entonces sale esta expresión:

$$\frac{zz - 2byz + bbyy}{4a} + \frac{byz - bbyy}{2a} + cyy = \frac{zz + (4ac - bb)yy}{4a}.$$

Por lo tanto, queremos omitir ahora el término de en medio y considerar esta expresión $axx + cyy$, donde se trata de darle los valores adecuados a las letras x e y para que la expresión tenga factores. Es fácil ver que esto depende de la naturaleza de los números a y c, por lo que comenzaremos con algunas expresiones particulares de este tipo.

168.

Primero esté dada esta expresión $xx + yy$, que incluye todos los números que son la suma de dos cuadrados, y de los cuales queremos mostrar aquí los más pequeños hasta 50.

1, 2, 4, 5, 8, 9, 10, 13, 16, 17, 18, 20, 25, 26, 29, 32, 34, 36, 37, 40, 41, 45, 49, 50, entre ellos hay algunos números primos, que no tienen divisores, como 2, 5, 13, 17, 29, 37, 41; pero los otros tienen divisores, lo cual hace más clara la pregunta qué valores tienen que tener las letras x e y para que la expresión $xx+yy$ tenga divisores o factores, y tantos como se quieran. Aquí, sobre todo hay que excluir los casos donde x e y tengan un divisor común porque entonces $xx+yy$ también podría dividirse entre el mismo divisor, incluso entre el cuadrado del mismo; porque si p. ej. $x=7p$ e $y=7q$, la suma de sus cuadrados,

$$49pp+49qq=49(pp+qq),$$

podría incluso dividirse entre 49. Por lo tanto, la pregunta solo se dirige a aquellas expresiones en las que x e y no tienen divisor común o son primos entre sí. Aquí, la dificultad pronto salta a la vista porque aunque se vea que, si los dos números x e y son impares, entonces la expresión $xx+yy$ se vuelve un número par y, por lo tanto, se vuelve divisible entre 2; pero si uno es par y el otro impar, la expresión se vuelve impar. Pero no es tan fácil de ver, si tiene divisores o no. Sin embargo, ambos números, x e y, no pueden ser pares, porque es necesario que no tengan un divisor común entre sí.

169.

Los dos números x e y sean primos entre sí y, sin embargo, la expresión $xx+yy$ debe contener dos o más factores. El método anterior no puede aplicarse aquí, porque esta expresión no se puede descomponer en dos factores racionales; pero los factores irracionales en los que se descompone esta expresión, y pueden ser representados por este producto $(x+y\sqrt{-1})\cdot(x-y\sqrt{-1})$, nos pueden servir justamente igual; porque si la expresión $xx+yy$ tiene factores verdaderos, los factores irracionales tienen que tener nuevamente factores, ya que si estos factores no tuvieran más divisores, su producto tampoco podría tenerlos. Pero como estos factores son irracionales, incluso imaginarios, y los números x e y tampoco deberían tener un divisor común, no pueden tener ningún factor racional, sino que tienen que ser irracionales e incluso imaginarios del mismo tipo.

170.

Por lo tanto, si queremos que esta expresión $xx+yy$ obtenga dos factores racionales, entonces también le damos dos factores a ambos factores irracionales, y primero ponemos $x+y\sqrt{-1}=(p+q\sqrt{-1})(r+s\sqrt{-1})$, y entonces, ya que $\sqrt{-1}$ puede tomarse tanto negativo como positivo, obtenemos $x-y\sqrt{-1}=(p-q\sqrt{-1})(r-s\sqrt{-1})$ automáticamente, de manera que su producto, que es nuestra expresión, será $xx+yy=(pp+qq)(rr+ss)$ y, en consecuencia, contiene dos factores racionales, que son $pp+qq$ y $rr+ss$. Aquí, sin embargo, falta determinar los valores de x e y, que también tienen que ser racionales.

Si ahora multiplicamos aquellos factores irracionales entre sí, obtenemos

$$x+y\sqrt{-1}=pr-qs+ps\sqrt{-1}+qr\sqrt{-1}$$

y

$$x-y\sqrt{-1}=pr-qs-ps\sqrt{-1}-qr\sqrt{-1},$$

sumando estas fórmulas da $x=pr-qs$; pero restando las mismas obtenemos $2y\sqrt{-1}=2ps\sqrt{-1}+2qr\sqrt{-1}$, o sea $y=ps+qr$.

Por eso, si se toman $x=pr-qs$ e $y=ps+qr$, entonces nuestra expresión $xx+yy$ ciertamente obtiene dos factores, ya que resulta

$$xx+yy=(pp+qq)(rr+ss).$$

Si se pidieran más factores, entonces solo sería necesario proceder de la misma manera y poner p y q tal que

$pp+qq$ tendría dos factores, y luego se tendrían tres factores en total, cuyo número se puede aumentar tanto como se desee de la misma manera.

171.

Ya que aquí solo aparecen los cuadrados de p, q, r y s, estas letras también se pueden tomar negativas; si p. ej. se toma q negativa, entonces $x=pr+qs$ e $y=ps-qr$, cuya suma de cuadrados es la misma que antes; de esto vemos que si un número es igual a dicho producto $(pp+qq)(rr+ss)$, puede ser descompuesto en dos cuadrados de dos maneras, encontrando primero

$$x=pr-qs \quad \text{e} \quad y=ps+qr,$$

y luego también

$$x=pr+qs \quad \text{e} \quad y=ps-qr.$$

Por ejemplo, sea $p=3$, $q=2$, $r=2$ y $s=1$, de modo que resultaría este producto $13\cdot 5=65=xx+yy$, donde o $x=4$ e $y=7$ o $x=8$ e $y=1$; pero en ambos casos es $xx+yy=65$. Si se multiplican varios números de este tipo entre sí, el producto también será una suma de cuadrados de varias maneras. Por ejemplo, si multiplicamos $2^2+1^2=5$, $3^2+2^2=13$ y $4^2+1^2=17$, entonces resulta 1105, número que se puede descomponer en dos cuadrados de las siguientes maneras:

$$\text{I.)}\ 33^2+4^2,\quad \text{II.)}\ 32^2+9^2,\quad \text{III.)}\ 31^2+12^2,$$

$$\text{IV.)}\ 24^2+23^2.$$

172.

Entre los números contenidos en la forma $xx+yy$, hay en primer lugar los que resultan de la multiplicación de dos o más números de este mismo tipo; pero luego también hay los que no están compuestos de tal manera, los cuales queremos llamar *números simples* de la forma $xx+yy$, pero aquellos se llaman *números compuestos*; por lo tanto, los números simples de este tipo serán

1, 2, 5, 9, 13, 17, 29, 37, 41, 49, etc.

En esta serie aparecen dos clases de números; primero, los números primos, es decir, aquellos que no tienen divisores en absoluto como 2, 5, 13, 17, 29, 37, 41 y que todos excepto 2 son tales que cuando se les quita 1, el resto se vuelve divisible entre 4, o sea todos los que estén contenidos en esta forma $4n+1$. Además, en segundo lugar, también hay números cuadrados 9, 49, etc., pero cuyas raíces 3, 7, etc., no aparecen; cabe señalar que estas raíces 3, 7, etc. están contenidas en esta forma $4n-1$. Pero también es evidente que ningún número de esta forma $4n-1$ puede ser una suma de dos cuadrados; porque como estos números son impares, uno de los dos cuadrados tendría que ser par y el otro impar; pero hemos visto que todos los cuadrados pares son divisibles entre 4, pero los impares están contenidos en esta forma $4n+1$; si se suman un cuadrado par y uno impar, la suma siempre toma esta forma $4n+1$, pero nunca esta forma $4n-1$. Ahora, que todos los números primos de la forma $4n+1$ sean una suma de dos cuadrados es cierto, pero no es tan fácil de demostrar.

173.

Queremos ir más allá y considerar la expresión $xx+2yy$ para ver qué valores tienen que tener x e y para que la misma tenga factores. Ahora que esta expresión es representada por estos factores imaginarios

$$(x+y\sqrt{-2})(x-y\sqrt{-2}),$$

se ve, como antes, que si nuestra expresión tiene factores, entonces sus factores imaginarios también tienen que tener algunos; por eso se plantea primero

$$x+y\sqrt{-2}=(p+q\sqrt{-2})(r+s\sqrt{-2}),$$

entonces resulta automáticamente que también tiene que ser $x-y\sqrt{-2}=(p-q\sqrt{-2})(r-s\sqrt{-2})$, y así nuestra expresión será $xx+2yy=(pp+2qq)(rr+2ss)$, y por lo tanto tiene dos factores, cada uno de los cuales es del mismo tipo; pero para que esto suceda, se tienen que encontrar los valores adecuados para x e y, lo cual puede realizarse de la siguiente manera. Como

$$x+y\sqrt{-2}=pr-2qs+qr\sqrt{-2}+ps\sqrt{-2}$$

y

$$x-y\sqrt{-2}=pr-2qs-qr\sqrt{-2}-ps\sqrt{-2},$$

entonces la suma es $2x=2pr-4qs$, por tanto $x=pr-2qs$; luego, la diferencia da $2y\sqrt{-2}=2qr\sqrt{-2}+2ps\sqrt{-2}$, por eso $y=qr+ps$. Entonces, si nuestra expresión $xx+2yy$ tiene factores, siempre son tales que uno será $pp+2qq$ y el otro $rr+2ss$, o sea, ambos son números del mismo tipo que $xx+2yy$; y para que esto se dé, x e y se pueden determinar de nuevo de dos maneras, porque q se puede tomar tanto negativo como positivo. Entonces tendremos, en primer lugar

$$x=pr-2qs \quad \text{e} \quad y=ps+qr,$$

y después también

$$x=pr+2qs \quad \text{e} \quad y=ps-qr.$$

174.

Esta expresión $xx+2yy$ contiene todos aquellos números que constan de un cuadrado y un doble cuadrado, y que queremos poner aquí hasta 50: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 11, 12, 16, 17, 18, 19, 22, 24, 25, 27, 32, 33, 34, 36, 38, 41, 43, 44, 48, 49, 50; los cuales podemos volver a dividir en simples y compuestos como antes; entonces los simples, que no se componen de los anteriores, serán los siguientes

1, 2, 3, 11, 17, 19, 25, 41, 43, 49, que son todos números primos excepto los cuadrados 25 y 49; pero de los números primos que no están, aparecen sus cuadrados. También se puede notar aquí que todos los números primos que están contenidos en nuestra expresión son de esta forma $8n+1$ o de esta forma $8n+3$, ya que, por otra parte, el resto de ellos pertenecen a esta forma $8n+5$ o a esta forma $8n+7$, las cuales jamás pueden constar de un cuadrado y un doble cuadrado; pero también es cierto que todos los números primos contenidos en una de las dos primeras formas $8n+1$ y $8n+3$ siempre se pueden descomponer en un cuadrado y un doble cuadrado.

175.

Sigamos de manera similar con esta expresión general $xx+cyy$, y veamos qué valores se tienen que dar a x e y para que esta expresión obtenga factores.

Dado que la misma ahora está representada por este producto

$$(x+y\sqrt{-c})(x-y\sqrt{-c}),$$

entonces a cada uno de estos factores le damos dos factores del mismo tipo: por lo tanto, ponemos

$$x+y\sqrt{-c}=(p+q\sqrt{-c})(r+s\sqrt{-c}),$$

y

$$x-y\sqrt{-c}=(p-q\sqrt{-c})(r-s\sqrt{-c});$$

y nuestra expresión se convierte en

$$xx+cyy=(pp+cqq)(rr+css),$$

lo cual aclara que los factores volverán a ser del mismo tipo que la expresión misma, pero los valores de x e y serán los siguientes: $x=pr-cqs$ e $y=qr+ps$, o $x=pr+cqs$ e $y=ps-qr$, y a partir de esto es fácil ver cómo nuestra expresión puede obtener aún más factores.

176.

Ahora también es fácil conseguirle factores a esta expresión $xx-cyy$, porque solo se necesita escribir $-c$ en vez de $+c$; sin embargo, lo mismo también se puede encontrar directamente; ya que nuestra expresión es igual a este producto $(x+y\sqrt{c})(x-y\sqrt{c})$, entonces se pone

$$x+y\sqrt{c}=(p+q\sqrt{c})(r+s\sqrt{c})$$

y

$$x-y\sqrt{c}=(p-q\sqrt{c})(r-s\sqrt{c}),$$

de donde inmediatamente surgen estos factores $xx-cyy=(pp-cqq)(rr-css)$, que nuevamente son del mismo tipo que nuestra expresión; pero los valores de x e y de nuevo también se pueden determinar de forma doble, es decir, primero $x=pr+cqs$ e $y=qr+ps$, y luego también $x=pr-cqs$ e $y=ps-qr$. Si se quiere comprobar que el producto encontrado sale de esta manera, se prueba con los primeros valores, entonces serán $xx=pprr+2cpqrs+ccqqss$ y $yy=ppss+2pqrs+qqrr$, es decir $cyy=cppss+2cpqrs+cqqrr$, de lo cual se obtiene:

$$xx-cyy=pprr-cppss+ccqqss-cqqrr$$

que coincide con el producto encontrado

$$(pp-cqq)(rr-css).$$

177.

Hasta ahora hemos considerado el primer término sin número delante, ahora queremos suponer que también se multiplica por una letra, y buscar los factores que la expresión $axx+cyy$ pueda tener.

Ahora está claro aquí que nuestra expresión es igual a este producto

$$(x\sqrt{a}+y\sqrt{-c})(x\sqrt{a}-y\sqrt{-c}),$$

a cuyos dos factores entonces se le tienen que dar nuevamente factores. Pero aquí surge una dificultad, porque si se quisiera plantear, según el método de arriba

$$\begin{aligned} x\sqrt{a} + y\sqrt{-c} &= (p\sqrt{a} + q\sqrt{-c})(r\sqrt{a} + s\sqrt{-c}) \\ &= apr - cqs + ps\sqrt{-ac} + qr\sqrt{-ac}, \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} x\sqrt{a} - y\sqrt{-c} &= (p\sqrt{a} - q\sqrt{-c})(r\sqrt{a} - s\sqrt{-c}) \\ &= apr - cqs - ps\sqrt{-ac} - qr\sqrt{-ac}, \end{aligned}$$

de lo cual se obtendría

$$2x\sqrt{a} = 2apr - 2cqs \quad \text{y} \quad 2y\sqrt{-c} = 2ps\sqrt{-ac} + 2qr\sqrt{-ac},$$

entonces se encontrarían valores irracionales tanto para x como para y, que de ninguna manera se aceptan aquí.

178.

Pero esta dificultad se puede remediar si se plantea:

$$\begin{aligned} x\sqrt{a} + y\sqrt{-c} &= (p\sqrt{a} + q\sqrt{-c})(r + s\sqrt{-ac}) \\ &= pr\sqrt{a} - cqs\sqrt{a} + qr\sqrt{-c} + aps\sqrt{-c}, \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} x\sqrt{a} - y\sqrt{-c} &= (p\sqrt{a} - q\sqrt{-c})(r - s\sqrt{-ac}) \\ &= pr\sqrt{a} - cqs\sqrt{a} - qr\sqrt{-c} - aps\sqrt{-c}; \end{aligned}$$

de lo cual ahora se encuentran los siguientes valores racionales para x e y:

$$x = pr - cqs \quad \text{e} \quad y = qr + aps,$$

pero entonces nuestra expresión tendrá los siguientes factores

$$axx + cyy = (app + cqq)(rr + acss),$$

de los cuales solo uno tiene la misma forma que nuestra expresión, pero el otro es de una especie completamente diferente.

179.

Sin embargo, estas dos expresiones también están relacionadas estrechamente entre sí, ya que todos los números de la primera forma, multiplicados por un número de la segunda forma, vuelven a ser de la primera forma. Ya hemos visto también que dos números de la segunda forma $xx+acyy$, que corresponde a la forma anterior $xx+cyy$, multiplicados entre sí, dan nuevamente un número de la segunda forma.

Así que solo tenemos que investigar a cuál forma pertenece el producto si se multiplican dos números de la primera forma, $axx+cyy$.

Entonces, multipliquemos estas dos expresiones del primer tipo

$$(app+cqq)(arr+css),$$

y aquí es fácil ver que su producto se puede representar así $(apr+cqs)^2+ac(ps-qr)^2$. Si ahora ponemos

$$apr+cqs=x \quad \text{y} \quad ps+qr=y,$$

entonces obtenemos esta expresión $xx+acyy$, que es del último tipo; por lo tanto, dos números del primer tipo $axx+cyy$ multiplicados entre sí dan un número del segundo tipo. Esto se puede plantear de forma breve de la siguiente manera. Indicamos los números del primer tipo con I, pero los del segundo tipo con II; y entonces

$$\mathrm{I}\cdot\mathrm{I} \text{ da II}, \quad \mathrm{I}\cdot\mathrm{II} \text{ da I}, \quad \mathrm{II}\cdot\mathrm{II} \text{ da II}$$

de donde también queda claro lo que debe resultar si se multiplican varios de estos números entre sí, como

$$\mathrm{I}\cdot\mathrm{I}\cdot\mathrm{I} \text{ da I}; \quad \mathrm{I}\cdot\mathrm{I}\cdot\mathrm{II} \text{ da II}; \quad \mathrm{I}\cdot\mathrm{II}\cdot\mathrm{II} \text{ da I};$$

$$\mathrm{II}\cdot\mathrm{II}\cdot\mathrm{II} \text{ da II}.$$

180.

Para explicar esto, sean $a = 2$ y $c = 3$, de los cuales surgen estos dos tipos de números, el primero está contenido en la forma $2xx + 3yy$, pero el segundo en la forma $xx + 6yy$. Ahora los números del primero hasta 50 son los siguientes:

I.) 2, 3, 5, 8, 11, 12, 14, 18, 20, 21, 27, 29, 30, 32, 35, 44, 45, 48, 50.

El segundo tipo contiene los siguientes números hasta 50:

II.) 1, 4, 6, 7, 9, 10, 15, 16, 22, 24, 25, 28, 31, 33, 36, 40, 42, 49.

Multipliquemos ahora un número del primer tipo, p. ej. 35, por uno del segundo tipo, 31, entonces el producto es 1085, este número ciertamente está contenido en la forma $2xx + 3yy$, o sea, se puede encontrar un número para y que convierta $1085 - 3yy$ en un doble cuadrado, es decir, $2xx$; esto sucede primero cuando $y = 3$, entonces será $x = 23$; luego también cuando $y = 11$, entonces será $x = 19$; tercero, cuando $y = 13$, entonces será $x = 17$, y finalmente, cuarto, cuando $y = 19$, entonces será $x = 1$.

Estos dos tipos de números pueden, a su vez, dividirse en simples y compuestos, donde los compuestos son los que constan de dos o más números más pequeños de un tipo u otro. Por lo tanto, los siguientes números del primer tipo serán simples: 2, 3, 5, 11, 29; pero estos serán compuestos: 8, 12, 14, 18, 20, 21, 27, 30, 32, 35, 44, 45, 48, 50. Y del segundo tipo los siguientes son simples: 1, 7, 31, los demás todos son compuestos, es decir, 4, 6, 9, 10, 15, 16, 22, 24, 25, 28, 33, 36, 40, 42, 49.

CAPÍTULO 12

DE LA TRANSFORMACIÓN DE LA EXPRESIÓN $axx + cyy$ EN CUADRADOS O POTENCIAS SUPERIORES

181.

Ya hemos visto anteriormente que los números de la forma $axx + cyy$ a menudo no se pueden convertir en cuadrados; pero siempre y cuando sea posible, esta forma se puede transformar en otra en la que $a = 1$. Por ejemplo, la expresión $2pp - qq$ puede convertirse en un cuadrado, pero también se puede representar en la forma $(2p+q)^2 - 2(p+q)^2$. Si ahora se pone $2p+q = x$ y $p+q = y$, entonces resulta la expresión $xx - 2yy$, donde $a = 1$ y $c = -2$. Tal transformación siempre procede, cada vez que sea posible convertir las expresiones en cuadrados.

Por lo tanto, si se debe convertir la expresión $axx + cyy$ en un cuadrado o en alguna otra potencia par superior, podemos establecer $a = 1$ sin duda, y considerar los otros casos como imposibles.

182.

Entonces, sea dada esta expresión $xx + cyy$ que debe ser convertida en un cuadrado. Ya que la misma ahora consta de estos factores

$$(x + y\sqrt{-c})(x - y\sqrt{-c}),$$

los cuales tienen que ser cuadrados o cuadrados multiplicados por el mismo número. Porque, si el producto de dos números debe ser un cuadrado, como p. ej. pq, entonces se requiere que $p = rr$ y $q = ss$, es decir, que cada factor sea un cuadrado en sí mismo, o que $p = mrr$ y $q = mss$, es decir, que los factores sean cuadrados multiplicados por el mismo número; por lo tanto, planteamos $x+y\sqrt{-c}=m(p+q\sqrt{-c})^2$, luego sale automáticamente $x-y\sqrt{-c}=m(p-q\sqrt{-c})^2$, entonces obtenemos

$$xx+cyy=mm(pp+cqq)^2,$$

y así se convierte en un cuadrado. Pero para determinar x e y tenemos estas ecuaciones

$$x+y\sqrt{-c}=mpp+2mpq\sqrt{-c}-mcqq$$

y

$$x-y\sqrt{-c}=mpp-2mpq\sqrt{-c}-mcqq,$$

donde obviamente la x tiene que ser igual a la parte racional, pero $y\sqrt{-c}$ igual a la parte irracional; por lo tanto, $x=mpp-mcqq$ e $y\sqrt{-c}=2mpq\sqrt{-c}$, o sea $y=2mpq$.

Por lo tanto, si se ponen $x=mpp-mcqq$ e $y=2mpq$, entonces nuestra expresión $xx+cyy$ se convierte en un cuadrado, es decir, en $mm(pp+cqq)^2$, cuya raíz es $mpp+mcqq$.

183.

Si los dos números x e y deben ser primos entre sí, es decir, no deben tener un divisor común, entonces se tiene que poner $m=1$. Si entonces $xx+cyy$ debe ser un cuadrado, solo se toma $x=pp-cqq$ y $y=2pq$, porque entonces esta expresión es igual al cuadrado de $pp+cqq$. En lugar de poner $x=pp-cqq$, también se puede poner $x=cqq-pp$, porque el cuadrado xx queda igual en ambos casos. Estas son las fórmulas que ya hemos encontrado anteriormente por razones completamente diferentes, lo cual confirma la veracidad del método utilizado aquí.

Porque, según el método anterior, si $xx+cyy$ debe ser un cuadrado, se pone la raíz $=x+\frac{py}{q}$, y se obtiene

$$xx + cyy = xx + \frac{2pxy}{q} + \frac{ppyy}{qq},$$

donde las xx se cancelan entre sí, pero los otros términos divididos entre y, y multiplicados por qq dan $cqqy = 2pqx + ppy$, o sea $cqqy - ppy = 2pqx$; ahora se divide entre $2pq$ y entre y, entonces será $\frac{x}{y} = \frac{cqq-pp}{2pq}$. Ya que x e y deben ser primos entre sí, igual que p y q, entonces x tiene que ser igual al numerador e y al denominador, por lo tanto $x = cqq - pp$ e $y = 2pq$, como antes.

184.

Esta resolución funciona si el número c es positivo o negativo; pero si el mismo tiene factores, es decir, si la expresión dada que deber ser un cuadrado es $xx + acyy$, , entonces no solo se tiene la solución anterior, que da $x = acqq - pp$ e $y = 2pq$, sino también esta $x = cqq - app$ y $y = 2pq$; porque entonces también será

$$xx + acyy = ccq^4 + 2acppqq + aap^4 = (cqq + app)^2,$$

lo cual también sucede si se toma $x = app - cqq$, porque el cuadrado xx sale igual en ambos casos.

Esta nueva solución también se encuentra mediante el método utilizado aquí. Se pone

$$x + y\sqrt{-ac} = (p\sqrt{a} + q\sqrt{-c})^2, \quad \text{y}$$
$$x - y\sqrt{-ac} = (p\sqrt{a} - q\sqrt{-c})^2,$$

entonces resulta $xx + acyy = (app + cqq)^2$, o sea un cuadrado; pero luego obtenemos

$$x + y\sqrt{-ac} = app + 2pq\sqrt{-ac} - cqq$$

y

$$x - y\sqrt{-ac} = app - 2pq\sqrt{-ac} - cqq$$

de lo cual resulta

$$x = app - cqq \quad \text{e} \quad y = 2pq.$$

Por lo tanto, si el número ac se puede descomponer de varias maneras en dos factores, entonces también se pueden dar varias soluciones.

185.

Queremos explicar esto mediante algunas expresiones específicas, y en primer lugar consideremos esta expresión $xx + yy$, que debe convertirse en un cuadrado. Como aquí ahora $ac = 1$, tomamos $x = pp - qq$ e $y = 2pq$, por lo tanto

$$xx + yy = (pp + qq)^2.$$

En segundo lugar, si esta expresión $xx - yy$ debe convertirse en un cuadrado, entonces $ac = -1$; por lo tanto, tomamos

$$x = pp + qq \ \text{ e } \ y = 2pq,$$

entonces $xx - yy = (pp - qq)^2$.

En tercer lugar, si esta expresión $xx + 2yy$ debe convertirse en un cuadrado, donde $ac = 2$, entonces tomamos

$$x = pp - 2qq \quad \text{o} \quad x = 2pp - qq \quad \text{e} \quad y = 2pq,$$

y por lo tanto

$$xx + 2yy = (pp + 2qq)^2 \quad \text{o} \quad xx + 2yy = (2pp + qq)^2.$$

En cuarto lugar, si esta expresión $xx - 2yy$ debe convertirse en un cuadrado, donde $ac = -2$, entonces tomamos

$$x = pp + 2qq \quad \text{e} \quad y = 2pq,$$

por lo tanto

$$xx - 2yy = (pp - 2qq)^2.$$

En quinto lugar, si esta expresión $xx + 6yy$ debe convertirse en un cuadrado, donde $ac = 6$, y así o $a = 1$ y

$c=6$ o $a=2$ y $c=3$; entonces podemos poner primero $x=pp-6qq$ e $y=2pq$, entonces

$$xx+6yy=(pp+6qq)^2.$$

Luego también se puede poner $x=2pp-3qq$ e $y=2pq$, entonces

$$xx+6yy=(2pp+3qq)^2.$$

186.

Pero si se debe convertir esta expresión $axx+cyy$ en un cuadrado, ya se ha recordado que esto no podría hacerse a menos que se conozca un caso en el que esta expresión realmente se convierta en un cuadrado. Este caso conocido sea pues $x=f$ e $y=g$, de modo que $aff+cgg=hh$; entonces nuestra expresión se puede transformar en otra de este tipo $tt+acuu$ poniendo

$$t=\frac{afx+cgy}{h} \quad \text{y} \quad u=\frac{gx-fy}{h};$$

porque entonces

$$tt=\frac{aaffxx+2acfgxy+ccggyy}{hh} \quad \text{y} \quad uu=\frac{ggxx-2fgxy+ffyy}{hh},$$

de lo cual resulta

$$\begin{aligned} tt+acuu &= \frac{aaffxx+ccggyy+acggxx+acffyy}{hh} \\ &= \frac{axx(aff+cgg)+cyy(aff+cgg)}{hh}; \end{aligned}$$

como ahora $aff+cgg=hh$, entonces será

$$tt+acuu=axx+cyy;$$

y de esta manera la expresión dada $axx+cyy$ toma la forma $tt+acuu$, que se puede convertir fácilmente en un cuadrado según las reglas dadas aquí.

187.

Ahora seguimos adelante y vemos la manera de poder convertir esta expresión $axx+cyy$ en un cubo, donde se supone que x e y sean primos entre sí. Para ello las reglas anteriores no son suficientes en absoluto; pero el método aquí presentado se puede aplicar con el mayor éxito; cabe señalar particularmente que esta expresión siempre se puede convertir en un cubo, los números a y c sean los que sean; lo cual no se daba con los cuadrados, a menos que ya se conociera un caso; lo que también es cierto para todos las demás potencias pares; con las impares, sin embargo, como la tercera, quinta, séptima, etc. potencia, la resolución siempre es posible.

188.

Si entonces esta expresión $axx+cyy$ se debe convertir en un cubo, planteamos de manera similar a la anterior

$$x\sqrt{a}+y\sqrt{-c}=(p\sqrt{a}+q\sqrt{-c})^3 \quad \text{y}$$
$$x\sqrt{a}-y\sqrt{-c}=(p\sqrt{a}-q\sqrt{-c})^3,$$

entonces su producto es $axx+cyy=(app+cqq)^3$, y así nuestra expresión se convierte en un cubo; solo depende de si aquí también se pueden encontrar valores racionales para x e y, lo cual afortunadamente se logra; porque si calculamos realmente los cubos planteados, entonces obtenemos estas dos ecuaciones

$$x\sqrt{a}+y\sqrt{-c}=ap^3\sqrt{a}+3appq\sqrt{-c}-3cpqq\sqrt{a}-cq^3\sqrt{-c},$$

y

$$x\sqrt{a}-y\sqrt{-c}=ap^3\sqrt{a}-3appq\sqrt{-c}-3cpqq\sqrt{a}+cq^3\sqrt{-c},$$

de las cuales obviamente salen

$$x=ap^3-3cpqq \quad \text{e} \quad y=3appq-cq^3.$$

Por ejemplo, buscamos dos cuadrados xx e yy, cuya suma $xx+yy$ dé un cubo; como aquí $a=1$ y $c=1$, obtenemos

$$x=p^3-3pqq \quad \text{e} \quad y=3ppq-q^3,$$

y luego $xx+yy=(pp+qq)^3$. Sean ahora $p=2$ y $q=1$, entonces serán $x=2$ y $y=11$; de esto $xx+yy=125=5^3$.

189.

Queremos considerar esta expresión $xx+3yy$, que debe convertirse en un cubo; como aquí ahora $a=1$ y $c=3$, entonces será

$$x=p^3-9pqq \quad \text{e} \quad y=3ppq-3q^3,$$

y luego $xx+3yy=(pp+3qq)^3$. Como esta expresión ocurre a menudo, queremos poner aquí los casos más fáciles.

p	q	x	y	$xx+3yy$
1	1	8	0	$64=4^3$
2	1	10	9	$343=7^3$
1	2	35	18	$2197=13^3$
3	1	0	24	$1728=12^3$
1	3	80	72	$21952=28^3$
3	2	81	30	$9261=21^3$
2	3	154	45	$29791=31^3$

190.

Si no se hubiera impuesto la condición de que los dos números x e y deberían ser primos entre sí, la pregunta no tendría ninguna dificultad: porque, si $axx+cyy$ debe ser un cubo, se plantea $x=tz$ e $y=uz$, entonces nuestra expresión se convierte en $attzz+cuuzz$, que se iguala al cubo $\frac{z^3}{v^3}$, de lo cual encontramos inmediatamente $z=v^3(att+cuu)$; en consecuencia, los valores buscados para x e y son:

$$x=tv^3(att+cuu) \quad \text{e} \quad y=uv^3(att+cuu),$$

que además del cubo v^3 también tienen $att+cuu$ como común divisor. Esta solución da de inmediato

$$axx+cyy=v^6(att+cuu)^2(att+cuu)=v^6(att+cuu)^3,$$

que obviamente es el cubo de $v^2(att+cuu)$.

191.

El método utilizado aquí es mucho más notable porque hemos encontrado tales soluciones, para las cuales solamente se requerían números racionales e incluso enteros, con la ayuda de fórmulas irracionales e incluso imaginarias. Pero es aún más notable que en aquellos casos en los que la irracionalidad desaparece, nuestro método ya no procede. Porque, si p. ej. $xx+cyy$ debe ser un cubo, se puede concluir con certeza que sus dos factores irracionales, es decir, $x+y\sqrt{-c}$ y $x-y\sqrt{-c}$, tienen que ser cubos; porque los mismos son primos entre sí, dado que los números x e y no tienen divisor común. Pero si la irracionalidad $\sqrt{-c}$ desapareciera, como cuando, p. ej., $c=-1$, esta razón ya no procedería, porque entonces los dos factores $x+y$ y $x-y$ de hecho podrían tener divisores comunes, aunque x e y no los tengan, p. ej. si ambos fueran números impares.

Por lo tanto, si $xx-yy$ debe ser un cubo, entonces no es necesario que tanto $x+y$ como $x-y$ sean cubos en sí mismos, sino que se podría plantear $x+y=2p^3$ y $x-y=4q^3$, porque entonces, $xx-yy$ sin duda sería un cubo, o sea $8p^3q^3$, cuya raíz cúbica es $2pq$; pero entonces

$x = p^3 + 2q^3$ e $y = p^3 - 2q^3$. Por otro lado, si la expresión $axx + cyy$ no puede ser descompuesta en dos factores racionales, tampoco proceden otras soluciones que las que se dan aquí.

192.

Queremos explicar lo tratado con algunas preguntas curiosas.

I. Pregunta. Se pide un cuadrado xx en números enteros que dé un cubo si se le suma 4; tales son 4 y 121, pero si se pueden dar más de los mismos, esta es la pregunta aquí.

Como 4 es un cuadrado, primero se buscan los casos en los que $xx + yy$ se convierte en un cubo, lo que sucede, como se ve de lo anterior, si $x = p^3 - 3pqq$ e $y = 3ppq - q^3$; ya que $yy = 4$ aquí, entonces $y = \pm 2$, en consecuencia tiene que ser $3ppq - q^3 = +2$ o $3ppq - q^3 = -2$; en el primer caso $q(3pp - qq) = 2$, por lo tanto q es un divisor de 2. Entonces, primero sea $q = 1$, luego $3pp - 1 = 2$, por lo tanto $p = 1$ y así $x = 2$ y $xx = 4$.

Si se pone $q = 2$, entonces $6pp - 8 = \pm 2$; si se aplica el signo $+$, entonces $6pp = 10$ y $pp = \frac{5}{3}$; por lo cual el valor de p se volvería irracional y, por lo tanto, no procede aquí; pero si se aplica el signo $-$, entonces $6pp = 6$ y $p = 1$, por eso $x = 11$. No hay más casos, por lo que solo se pueden dar dos cuadrados, 4 y 121, que se convierten en cubos si se les suma 4.

193.

II. Pregunta. Se piden tales cuadrados en números enteros que se conviertan en cubos si se les suma 2, como ocurre con el cuadrado 25; aquí se pregunta si hay más de los mismos.

Dado que $xx + 2$ debe ser un cubo y 2 es un doble cuadrado, primero se buscan los casos en los que la expresión $xx+2yy$ se convierte en un cubo, lo cual se da, según el artículo 188 anterior, donde $a=1$ y $c=2$, si $x=p^3-6pqq$ e $y=3ppq-2q^3$; ya que aquí $y=\pm 1$, entonces tiene que ser $3ppq-2q^3=q(3pp-2qq)=\pm 1$, y por lo tanto q tiene que ser un divisor de 1; por eso sea $q=1$, así $3pp-2=\pm 1$; si se aplica el signo superior, entonces $3pp=3$ y $p=1$, por lo tanto $x=5$; pero el signo inferior da un valor irracional para p, que no cabe aquí; esto implica que solo el cuadrado 25 tiene la propiedad requerida en números enteros.

194.

III. Pregunta. Se piden tales cuadrados quíntuples que, se conviertan en cubos si se les suma 7, es decir, que $5xx+7$ sea un cubo.

Primero se buscan aquellos casos donde la expresión $5xx+7yy$ se convierte en un cubo, lo cual se da, según el artículo 188 anterior, donde $a=5$ y $c=7$, si $x=5p^3-21pqq$ e $y=15ppq-7q^3$; ya que aquí debe ser $y=\pm 1$, entonces

$$15ppq-7q^3=q(15pp-7qq)=\pm 1,$$

por lo tanto q tiene que ser un divisor de 1, así $q=1$; por eso será $15pp-7=\pm 1$, donde ambos casos dan algo irracional para p, de lo cual todavía no se puede concluir que esta pregunta sea imposible, porque p y q podrían ser fracciones de tal naturaleza que $y=1$, pero que x sea un número entero. Esto sucede realmente, si $p=\frac{1}{2}$ y $q=\frac{1}{2}$, porque entonces serán $y=1$ y $x=2$. Pero esto no es posible con otras fracciones.

195.

IV. Pregunta. Se buscan tales cuadrados dobles que, resulten cubos si se les resta 5; es decir, $2xx-5$ debe ser un cubo.

Primero se buscan aquellos casos donde la expresión $2xx-5yy$ se convierte en un cubo, lo cual se da, según el artículo 188 anterior, donde $a=2$ y $c=-5$, si $x=2p^3+15pqq$ e $y=6ppq+5q^3$. Pero aquí tiene que ser $y=\pm 1$, y entonces

$$6ppq+5q^3=q(6pp+5qq)=\pm 1,$$

lo cual no se puede cumplir en números enteros, ni siquiera en fracciones; este caso es muy notable, porque, por otro lado, sí hay una solución, que es $x=4$, porque entonces resulta $2xx-5=27$, que es el cubo de 3; y es de la mayor importancia investigar la razón de esto.

196.

Entonces, es posible que $2xx-5yy$ pueda ser un cubo cuya raíz incluso tenga esta forma $2pp-5qq$, lo que sucede si $x=4$, $y=1$ y $p=2$, $q=1$, y así tenemos un caso donde $2xx-5yy=(2pp-5qq)^3$, aunque los dos factores de $2xx-5yy$, o sea $x\sqrt{2}+y\sqrt{5}$ y $x\sqrt{2}-y\sqrt{5}$, no sean cubos, porque según este método los mismos deberían ser los cubos de $p\sqrt{2}+q\sqrt{5}$ y $p\sqrt{2}-q\sqrt{5}$; pero en nuestro caso $x\sqrt{2}+y\sqrt{5}=4\sqrt{2}+\sqrt{5}$, por otro lado, $(p\sqrt{2}+q\sqrt{5})^3=$ $(2\sqrt{2}+\sqrt{5})^3=46\sqrt{2}+29\sqrt{5}$, que de ninguna manera es igual a $4\sqrt{2}+\sqrt{5}$.

Pero hay que notar que la expresión $rr-10ss$ puede convertirse en 1 o -1 en un número infinito de casos; por ejemplo, si $r=3$ y $s=1$, además si $r=19$ y $s=6$; y esta expresión multiplicada por $2pp-5qq$, da de nuevo un número de la última forma.

Entonces, sea $ff-10gg=1$, y en lugar de poner $2xx-5yy=(2pp-5qq)^3$, ahora podemos plantear también de una manera más general

$$2xx-5yy=(ff-10gg)(2pp-5qq)^3,$$

y tomando sus factores obtenemos

$$x\sqrt{2}\pm y\sqrt{5}=(f\pm g\sqrt{10})(p\sqrt{2}\pm q\sqrt{5})^3.$$

Ahora,

$$(p\sqrt{2}\pm q\sqrt{5})^3=(2p^3+15pqq)\sqrt{2}\pm(6ppq+5q^3)\sqrt{5},$$

lo cual abreviamos escribiendo $A\sqrt{2}+B\sqrt{5}$; esto multiplicado por $f+g\sqrt{10}$ da

$$Af\sqrt{2}+Bf\sqrt{5}+2Ag\sqrt{5}+5Bg\sqrt{2},$$

que tiene que ser igual a $x\sqrt{2}+y\sqrt{5}$, de lo cual resultan

$$x=Af+5Bg \quad \text{e} \quad y=Bf+2Ag;$$

como ahora tiene que ser $y=\pm 1$, no es inevitablemente necesario que $6ppq+5q^3=1$, sino que es suficiente que solo la expresión $Bf+2Ag$, es decir,

$$f(6ppq+5q^3)+2g(2p^3+15pqq),$$

sea igual a ± 1, donde f y g pueden tener muchos valores. Por ejemplo, sean $f=3$ y $g=1$, entonces la expresión $18ppq+15q^3+4p^3+30pqq$ tiene que ser igual a ± 1, es decir, tiene que ser $4p^3+18ppq+30pqq+15q^3=\pm 1$.

197.

Esta dificultad para sacar a la luz todos estos casos posibles solo se encuentra si el número c en la expresión $axx+cyy$ es negativo, porque entonces esta expresión $axx+cyy$, o esta $xx+acyy$, que tiene vínculos precisos con ella, puede convertirse en 1, pero esto nunca puede suceder si c es un número positivo, porque $axx+cyy$ o $xx+acyy$ siempre dan números más grandes, cuanto más grandes se toman x e y. Por lo tanto, el método que se presenta aquí solo puede usarse con éxito en los casos en que los dos números a y c sean positivos.

198.

Entonces pasamos a la cuarta potencia y notamos ante todo que si la expresión $axx + cyy$ debe convertirse en un bicuadrado, el número a tendría que ser $a = 1$; porque si el mismo no fuera un cuadrado, entonces o no sería posible convertir esta expresión en un cuadrado, o, si fuera posible, entonces también podría transformarse en la forma $tt + acuu$. Por eso limitamos la pregunta a esta última forma, que coincide con la expresión anterior, $xx + cyy$, si $a = 1$. Ahora se trata de ver cuál tiene que ser la naturaleza de los valores de x e y para que la expresión $xx + cyy$ se convierta en un bicuadrado. Ya que la misma ahora consta de estos dos factores $(x + y\sqrt{-c})(x - y\sqrt{-c})$, entonces cada uno también tiene que ser un bicuadrado del mismo tipo y, por lo tanto, se tiene que plantear

$$x + y\sqrt{-c} = (p + q\sqrt{-c})^4 \quad \text{y} \quad x - y\sqrt{-c} = (p - q\sqrt{-c})^4,$$

por lo cual nuestra expresión se vuelve igual a este bicuadrado $(pp + cqq)^4$, pero las letras mismas x e y se determinan fácilmente desarrollando esta expresión como sigue:

$$x + y\sqrt{-c} = p^4 + 4p^3q\sqrt{-c} - 6cppqq - 4cpq^3\sqrt{-c} + ccq^4,$$
$$x - y\sqrt{-c} = p^4 - 4p^3q\sqrt{-c} - 6cppqq + 4cpq^3\sqrt{-c} + ccq^4,$$

en consecuencia

$$x = p^4 - 6cppqq + ccq^4 \quad \text{e} \quad y = 4p^3q - 4cpq^3.$$

199.

Por lo tanto, si $xx + yy$ debe ser un bicuadrado, entonces, porque aquí $c = 1$, tenemos estos valores

$$x = p^4 - 6ppqq + q^4 \quad \text{e} \quad y = 4p^3q - 4pq^3$$

y luego $xx + yy = (pp + qq)^4$.

Ponemos, p. ej., $p = 2$ y $q = 1$, entonces obtenemos $x = 7$ e $y = 24$; esto da $xx + yy = 625 = 5^4$.

Si además tomamos $p = 3$ y $q = 2$, entonces obtenemos $x = 119$ e $y = 120$; lo cual da $xx + yy = 13^4$.

200.

Con todas las potencias pares en las que se debe convertir la expresión $axx + cyy$, también es inevitablemente necesario que esta expresión se pueda convertir en un cuadrado, para lo cual basta con que se conozca un solo caso en el que esto suceda; y luego, como hemos visto anteriormente, esta expresión se puede transformar en esta forma $tt + acuu$, donde el primer término solo se multiplica por 1, y por lo tanto se puede considerar como contenido en esta forma $xx + cyy$, que luego, de una manera similar, puede convertirse tanto en una sexta potencia como cualquier otra potencia par aún mayor.

201.

Sin embargo, en el caso de las potencias impares, esta condición no es necesaria; para todo tipo de números a y c, la expresión $axx + cyy$ siempre se podrá convertir en cualquier potencia impar. Porque si p. ej. se pide la quinta potencia, solo se necesita poner

$$x\sqrt{a} + y\sqrt{-c} = (p\sqrt{a} + q\sqrt{-c})^5 \quad y$$
$$x\sqrt{a} - y\sqrt{-c} = (p\sqrt{a} - q\sqrt{-c})^5,$$

ya que entonces obviamente será

$$axx + cyy = (app + cqq)^5.$$

Como ahora la quinta potencia de $p\sqrt{a} + q\sqrt{-c}$ es

$$aap^5\sqrt{a} + 5aap^4q\sqrt{-c} - 10acp^3qq\sqrt{a} - 10acppq^3\sqrt{-c}$$
$$+ 5ccpq^4\sqrt{a} + ccq^5\sqrt{-c},$$

inmediatamente se deduce

$$x = aap^5 - 10acp^3qq + 5ccpq^4 \quad \text{e}$$
$$y = 5aap^4q - 10acppq^3 + ccq^5.$$

Por lo tanto, si se pide que una suma de dos cuadrados $xx + yy$ sea una quinta potencia, entonces serán $a = 1$ y $c = 1$; en consecuencia

$$x = p^5 - 10p^3qq + 5pq^4 \quad \text{e} \quad y = 5p^4q - 10ppq^3 + q^5.$$

Si ahora se toman $p = 2$ y $q = 1$, entonces serán $x = 38$ e $y = 41$, además:

$$xx + yy = 3125 = 5^5.$$

CAPÍTULO 13

DE ALGUNAS EXPRESIONES DE LA FORMA $ax^4 + by^4$, QUE NO SE PUEDEN CONVERTIR EN UN CUADRADO

202.

Se han hecho grandes esfuerzos por encontrar dos bicuadrados cuya suma o diferencia sea un número cuadrado; pero todos los esfuerzos fueron en vano, y finalmente se encontró una demostración de que ni esta expresión $x^4 + y^4$ ni esta $x^4 - y^4$ jamás podrán convertirse en un cuadrado, excepto en dos casos; en el primero es o $x = 0$, o $y = 0$, pero en el otro es o $y = 0$, o $y = x$; en estos casos el asunto salta claramente a la vista. Pero es mucho más notable que en todos los demás casos la cosa es imposible, porque si solo se trata de cuadrados sencillos, hay un número infinito de soluciones.

203.

Para presentar adecuadamente esta demostración, hay que notar ante todo que los dos números x e y pueden considerarse primos entre sí; porque si tendrían un común divisor como p. ej. d, de modo que se podría poner $x=dp$ e $y=dq$, nuestras expresiones serían $d^4p^4+d^4q^4$ y $d^4p^4-d^4q^4$, las cuales, si fueran cuadrados, también tendrían que permanecer siendo cuadrados, si se dividen entre el cuadrado d^4, de modo que estas expresiones p^4+q^4 y p^4-q^4 también serían cuadrados, donde los números p y q ya no tienen común divisor. Por lo tanto, es suficiente demostrar que estas expresiones, donde x e y son primos entre sí, no pueden convertirse en cuadrados, y entonces la demostración se extiende automáticamente a todos los casos, donde x e y tienen divisores comunes.

204.

Por lo tanto, queremos comenzar con la suma de dos bicuadrados, es decir, con la expresión x^4+y^4, y donde podemos considerar x e y números primos entre sí. Para demostrar que x^4+y^4 no puede ser un cuadrado, excepto en los casos indicados arriba, la demostración se realiza de la siguiente manera.

Si alguien quisiera negar el teorema, tendría que afirmar que hay valores para x e y que convierten x^4+y^4 en un cuadrado, los valores tendrán que ser grandes, porque en los pequeños ciertamente no existen.

Pero se puede demostrar claramente que si hubieran tales valores para x e y incluso en los números más grandes, de ellos podrían deducirse también tales valores en números más pequeños, y de estos, además valores aún más pequeños, etc. Pero ahora no hay valores en números pequeños, aparte de los dos indicados, pero los cuales no conducen a otros, entonces se puede concluir con certeza que tampoco existen tales valores para x e y en números grandes, incluso ni en los más grandes,. Y de la misma forma se demuestra el teorema de la diferencia entre dos bicuadrados $x^4 - y^4$, como mostraremos a continuación.

205.

Para demostrar primero que $x^4 + y^4$ no puede ser un cuadrado excepto en los dos casos que son claros por sí mismos, hay que tomar bien cuenta las siguientes consideraciones

I. Supongamos que los números x e y son primos entre sí, o sea que no tienen divisor común; por lo tanto, o ambos son impares, o uno es par y el otro es impar.

II. Pero ambos no pueden ser impares a la vez, porque la suma de dos cuadrados impares nunca puede ser un cuadrado: porque un cuadrado impar siempre está contenido en la forma $4n+1$, por lo que la suma de dos cuadrados impares tendría la forma $4n+2$ que se puede dividir entre 2, pero no entre 4, y entonces no puede ser un cuadrado. Ahora, esto también se aplica a dos bicuadrados impares.

III. En consecuencia, si $x^4 + y^4$ fuera un cuadrado, entonces uno tendría que ser par, pero el otro impar. Pero hemos visto anteriormente que si se supone que la suma de dos cuadrados es un cuadrado, la raíz de uno se expresa por $pp-qq$, pero la otra por $2pq$; lo cual implica que tendrían que ser $xx = pp - qq$ e $yy = 2pq$ y así sería $x^4 + y^4 = (pp+qq)^2$.

IV. Entonces aquí y sería par, pero x sería impar; dado que $xx = pp - qq$, uno de los números p y q también tiene que ser par, pero el otro impar. El primero p, sin embargo, no puede ser par, porque de lo contrario $pp-qq$, siendo un número de la forma $4n-1$ o $4n+3$, nunca puede convertirse en un cuadrado. Consecuentemente, p tendría que ser impar pero q

par, donde se sobreentiende que tienen que ser primos entre sí.

V. Ahora, $pp-qq$ es un cuadrado, ya que es igual a xx, esto sucede, como vimos anteriormente, cuando $p=rr+ss$ y $q=2rs$: porque entonces será $xx=(rr-ss)^2$, y por lo tanto $x=rr-ss$.

VI. Pero yy también tiene que ser un cuadrado; dado que ahora tenemos $yy=2pq$, entonces ahora será $yy=4rs(rr+ss)$; esta expresión tiene que ser un cuadrado, en consecuencia, $rs(rr+ss)$ también tiene que ser un cuadrado, donde r y s son números primos entre sí, de modo que los tres factores aquí presentes, r, s y $rr+ss$, no pueden tener un divisor común.

VII. Ahora, si un producto de varios factores que son primos entre sí debe ser un cuadrado, entonces cada factor mismo tiene que ser un cuadrado, por lo que ponemos $r=tt$ y $s=uu$: entonces también t^4+u^4 tiene que ser un cuadrado. Por lo tanto, si x^4+y^4 fuera un cuadrado, entonces t^4+u^4, que también es una suma de dos bicuadrados, sería un cuadrado. Aquí hay que tener en cuenta que, como $xx=(t^4-u^4)^2$ y $yy=4ttuu(t^4+u^4)$, los números t y u serían evidentemente mucho más pequeños que x e y, porque x e y están determinados por las cuartas potencias de t y u y, por lo tanto, indudablemente tienen que ser mucho mayores.

VIII. Si entonces existieran dos bicuadrados como x^4 e y^4, incluso entre los números más grandes, cuya suma fuera un cuadrado, luego se podría derivar una suma de dos bicuadrados mucho más pequeños que también sería un cuadrado. Y de éstos podría deducirse de nuevo una suma menor del mismo tipo, y así sucesivamente, hasta que finalmente se llegaría a números muy pequeños; pero como no es posible tal suma en números pequeños, esto implica obviamente que tal suma tampoco existirá en los números más grandes.

IX. Se podría objetar aquí que realmente hay números tan pequeños como se señaló al principio, donde uno de los bicuadrados se vuelve cero; pero ciertamente este caso no se da si se retrocede de esta manera de los números más grandes a los más pequeños. Porque si para la suma pequeña $t^4 + u^4$ fuera o $t = 0$ o $u = 0$, entonces también para la suma mayor sería necesariamente $yy = 0$, caso que no se considera aquí.

206.

Ahora vemos el segundo teorema principal, que dice que la diferencia de dos bicuadrados como $x^4 - y^4$ nunca podrá ser un cuadrado, excepto en los casos $y = 0$ e $y = x$; para su demostración, hay que tomar en cuenta los siguientes puntos.

I. Los números x e y tienen que considerarse primos entre sí y, por lo tanto, ambos son impares o uno es par y el otro es impar. Dado que en ambos casos la diferencia de dos cuadrados puede ser de nuevo un cuadrado, hay que tratar estos dos casos por separado.

II. Así que primero los dos números x e y sean impares, y ponemos $x = p + q$ e $y = p - q$; uno de estos números p y q tiene que ser necesariamente impar y el otro par. Ahora $xx - yy = 4pq$ y $xx + yy = 2pp + 2qq$, por lo tanto, nuestra expresión será $x^4 - y^4 = 4pq(2pp + 2qq)$, que debe ser un cuadrado, y así igualmente también la cuarta parte $pq(2pp + 2qq) = 2pq(pp + qq)$, cuyos factores son primos entre sí; en consecuencia, cada uno de estos factores $2p$, q y $pp + qq$ tiene que ser un cuadrado en sí mismo, porque un número, p, es par, pero el otro, q, es impar. Por lo tanto, para representar los dos primeros como cuadrados, ponemos $2p=4rr$ o $p=2rr$, y $q=ss$, donde s tiene que ser impar; entonces el tercer factor $4r^4+s^4$ también tendrá que ser un cuadrado.

III. Como s^4+4r^4 es una suma de dos cuadrados, de los cuales s^4 es impar, pero $4r^4$ es par, ponemos la raíz del primero $ss=tt-uu$, donde t es impar y u es par; y ponemos la raíz del último $2rr=2tu$ o $rr=tu$, donde t y u son primos entre sí.

IV. Como $tu=rr$ tiene que ser un cuadrado, entonces tanto t como u tienen que ser cuadrados; por eso ponemos $t=mm$ y $u=nn$, donde m es impar y n es par, entonces $ss=m^4-n^4$, así que nuevamente una diferencia de dos bicuadrados, es decir, m^4-n^4, tendría que ser un cuadrado. Sin embargo, está claro que estos números serían mucho más pequeños que x e y, porque r y s son obviamente más pequeños que x e y, y además, m y n son más pequeños que r y s; entonces, si el asunto fuera posible en los números más grandes y x^4-y^4 fuera un cuadrado, entonces lo mismo sería posible también en números mucho más pequeños, y así sucesivamente hasta que finalmente se llegaría a los números más pequeños donde la cosa es posible.

V. Pero los números más pequeños, con los cuales esto es posible, se dan si un bicuadrado es igual a 0 o igual al otro: en el primer caso tendría que ser $n=0$, por lo tanto $u=0$, además $r=0$ y $p=0$ y $x^4-y^4=0$, o $x^4=y^4$; pero aquí no se trata de tal caso. Pero si fuera $n=m$, entonces $t=u$, además $s=0$, $q=0$ y finalmente también $x=y$, cuyo caso no se da aquí.

207.

Se podría objetar aquí que dado que m es impar y n es par, la última diferencia ya no es similar a la primera, por lo que de esto no se puede sacar la conclusión sobre números más pequeños. Pero basta con que se pueda llegar de la primera diferencia a la otra, y ahora demostraremos que $x^4 - y^4$ tampoco puede ser un cuadrado, si un bicuadrado es par y el otro es impar.

I. Si el primer bicuadrado x^4 fuera par e y^4 impar, la cosa misma no sería posible porque saldría un número de la forma $4n+3$ que no puede ser un cuadrado. Sea entonces x impar e y par, por lo tanto tiene que ser $xx = pp + qq$ e $y = 2pq$ [$yy = 2pq$], entonces

$$x^4 - y^4 = p^4 - 2ppqq + q^4 = (pp - qq)^2,$$

donde de p y q una tiene que ser par pero la otra tiene que ser impar.

II. Como ahora $pp + qq = xx$ tiene que ser un cuadrado, entonces $p = rr - ss$ y $q = 2rs$; consecuentemente $x = rr + ss$. Pero de esto obtenemos

$$yy = 2(rr - ss)\cdot 2rs \quad \text{o} \quad yy = 4rs(rr - ss),$$

que tiene que ser un cuadrado, y por lo tanto también la cuarta parte $rs(rr - ss)$, cuyos factores son primos entre sí.

III. Por eso se pone $r = tt$ y $s = uu$, entonces el tercer factor será $rr - ss = t^4 - u^4$, que también tiene que ser un cuadrado. Dado que ahora también es una diferencia de dos bicuadrados, los cuales son mucho más pequeños que los primeros, así la demostración anterior obtiene toda su fuerza, de modo que si la diferencia de dos bicuadrados fuera un cuadrado, incluso en los números más grandes, de ellos se encontrarían tales diferencias cada vez más pequeñas, pero sin llegar a los dos casos obvios: por lo tanto, incluso en los números más grandes, esto ciertamente no es posible.

208.

La primera parte de esta demostración, en la que los números x e y se toman impares, se puede abreviar de la siguiente manera. Si x^4-y^4 fuera un cuadrado, entonces tendría que ser $xx=pp+qq$ e $yy=pp-qq$, donde de las letras p y q una sería par, y la otra sería impar; pero entonces $xxyy=p^4-q^4$, en consecuencia p^4-q^4 también tendría que ser un cuadrado, que es una diferencia de dos bicuadrados, de los cuales uno es par, pero el otro es impar. Ahora, que esto es imposible se ha expuesto en la segunda parte de la demostración.

209.

De modo que hemos demostrado estos dos teoremas principales que dicen que ni la suma ni la diferencia de dos bicuadrados jamás pueden ser números cuadrados, excepto en algunos pocos casos obvios.

Si entonces otras expresiones que se deben convertir en cuadrados son de tal naturaleza que implican que una suma o una diferencia de dos bicuadrados también tendría que ser un cuadrado, entonces estas expresiones tampoco son posibles. Esto ahora sucede con las siguientes expresiones, que queremos exponer aquí.

I. No es posible que esta expresión x^4+4y^4 se convierta en un cuadrado: porque como esta expresión es una suma de dos cuadrados, entonces tendrían que ser $xx=pp-qq$ y $2yy=2pq$ o $yy=pq$; ya que ahora p y q son primos entre sí, entonces cada una tendría que ser un cuadrado. Si ahora se pone $p=rr$ y $q=ss$, entonces $xx=r^4-s^4$; por lo tanto una diferencia de dos bicuadrados tendría que ser un cuadrado, lo cual no es posible.

II. Tampoco es posible que esta expresión x^4-4y^4 se convierta en un cuadrado: porque entonces tendrían que ser $xx=pp+qq$ y $2yy=2pq$, porque luego resultaría $x^4-4y^4=(pp-qq)^2$; dado que $yy=pq$, entonces p y q tendrían que ser cada una un cuadrado; si ahora se pone $p = rr$ y $q = ss$, entonces $xx = r^4 + s^4$; en consecuencia, una suma de dos bicuadrados tendría que ser un cuadrado, lo que no es posible.

III. Tampoco es posible que esta expresión $4x^4 - y^4$ se convierta en un cuadrado, porque entonces y necesariamente tendría que ser un número par. Si se pone $y = 2z$, entonces $4x^4 - 16z^4$ y consecuentemente también la cuarta parte $x^4 - 4z^4$ tendría que ser un cuadrado, lo cual es imposible según el caso anterior.

IV. Tampoco es posible que esta expresión $2x^4 + 2y^4$ se convierta en un cuadrado; porque entonces, dado que ella tendría que ser par y entonces sería $2x^4 + 2y^4 = 4zz$, luego sería $x^4 + y^4 = 2zz$, y por lo tanto

$$2zz + 2xxyy = x^4 + 2xxyy + y^4$$

sería un cuadrado. De la misma manera sería

$$2zz - 2xxyy = x^4 - 2xxyy + y^4$$

que también es un cuadrado. Ya que tanto

$$2zz + 2xxyy \text{ como } 2zz - 2xxyy$$

serían cuadrados, entonces también su producto $4z^4 - 4x^4y^4$, y por lo tanto también la cuarta parte, tendrían que ser cuadrados. Pero esta cuarta parte es $z^4 - x^4y^4$ y por lo tanto una diferencia de dos bicuadrados, lo cual no es posible.

V. Finalmente, esta expresión $2x^4 - 2y^4$ tampoco puede ser un cuadrado. Porque los números x e y no son pares a la vez, porque si no, tendrían un divisor común; y tampoco ninguno es par y el otro impar, porque de lo contrario una parte sería divisible entre 4, pero la otra solo entre 2, y por lo tanto también la expresión misma sería divisible solo entre 2; entonces ambos tienen que ser impares. Si ahora se pone

$x=p+q$ e $y=p-q$, entonces uno de los números p y q es par, el otro es impar, y dado que $2x^4-2y^4=2(xx+yy)(xx-yy)$, obtenemos $xx+yy=2pp+2qq=2(pp+qq)$ y $xx-yy=4pq$. Entonces nuestra expresión será $16pq(pp+qq)$ la cual tendría que ser un cuadrado, al igual que su decimosexta parte, es decir, $pq(pp+qq)$. Dado que los factores son primos entre sí, cada uno de ellos tendría que ser un cuadrado. Si ahora se pone $p=rr$ y $q=ss$ para los dos primeros, entonces el tercero se convierte en r^4+s^4, que también tendría que ser un cuadrado: pero esto no es posible.

210.

De la misma forma también se puede demostrar que esta expresión x^4+2y^4 no puede ser un cuadrado, cuya demostración consiste en los siguientes pasos.

I. Primero, x no puede ser par, porque entonces y tendría que ser impar, y la expresión solo podría dividirse entre 2 pero no entre 4: por eso x tiene que ser impar.

II. Entonces ponemos la raíz cuadrada de nuestra expresión $=xx+\frac{2pyy}{q}$, para que la misma sea impar; luego

$$x^4+2y^4=x^4+\frac{4pxxyy}{q}+\frac{4ppy^4}{qq},$$

donde las x^4 se cancelan entre sí, pero los términos restantes, divididos entre yy, y multiplicados por qq, dan

$$4pqxx+4ppyy=2qqyy, \text{ o } 4pqxx=2qqyy-4ppyy,$$

esto se convierte en $\frac{xx}{yy}=\frac{qq-2pp}{2pq}$; de lo cual se deduce

$$xx=qq-2pp \text{ e } yy=2pq,$$

que son justamente las fórmulas que ya hemos dado anteriormente.

III. Entonces $qq - 2pp$ tendría que ser un cuadrado nuevamente, lo que no puede suceder de otra manera que si $q = rr + 2ss$ y $p = 2rs$, porque entonces sería $xx = (rr - 2ss)^2$; además, sería $4rs(rr + 2ss) = yy$, por lo que la cuarta parte $rs(rr + 2ss)$ también tendría que ser un cuadrado y, en consecuencia, r y s cada una por separado. Si ahora se pone $r = tt$ y $s = uu$, el tercer factor se convierte en $rr + 2ss = t^4 + 2u^4$, que también tendría que ser un cuadrado.

IV. Por lo tanto, si $x^4 + 2y^4$ fuera un cuadrado, entonces $t^4 + 2u^4$ también sería un cuadrado, donde los números t y u serían mucho más pequeños que x e y; y de esta manera siempre se pueden obtener números más pequeños. Dado que esta expresión no puede ser un cuadrado en números pequeños, como es fácil de comprobar, tampoco puede ser un cuadrado en los números más grandes.

211.

Pero con respecto a esta expresión $x^4 - 2y^4$, no se puede demostrar que la misma no pueda convertirse en un cuadrado, y si el cálculo se realiza de manera similar, se puede encontrar hasta un número infinito de casos en que realmente se convierta en un cuadrado.

Entonces, si $x^4 - 2y^4$ debe ser un cuadrado, se ha demostrado arriba que será $xx = pp + 2qq$ e $yy = 2pq$, porque entonces se obtiene $x^4 - 2y^4 = (pp - 2qq)^2$. Como ahora $pp + 2qq$ también tiene que ser un cuadrado, esto sucede si $p = rr - 2ss$ y $q = 2rs$; porque entonces será $xx = (rr + 2ss)^2$. Pero aquí puede observarse que esto también sucedería si se ponen $p = 2ss - rr$ y $q = 2rs$; por lo tanto, aquí tienen que considerarse dos casos.

I. Primero sea $p=rr-2ss$ y $q=2rs$, luego $x=rr+2ss$; y como $yy=2pq$, ahora será $yy=4rs(rr-2ss)$; y entonces r y s tienen que ser cuadrados. Por lo tanto, ponemos $r=tt$ y $s=uu$, así $yy=4ttuu(t^4-2u^4)$; entonces

$$y=2tu\sqrt{t^4-2u^4} \quad \text{y} \quad x=t^4+2u^4;$$

por lo tanto, si t^4-2u^4 es un cuadrado, entonces x^4-2y^4 también se convierte en un cuadrado; pero aunque t y u sean números más pequeños que x e y, no se puede concluir, como antes, que x^4-2y^4 no puede ser un cuadrado por llegar a una expresión similar en números más pequeños; porque x^4-2y^4 puede ser un cuadrado sin llegar a esta expresión t^4-2u^4, ya que esto se puede hacer de otra manera, es decir, en el otro caso que todavía tenemos que considerar.

II. Sean $p=2ss-rr$ y $q=2rs$, entonces será como antes, $x=rr+2ss$, sin embargo, para y se obtiene $yy=2pq=4rs(2ss-rr)$. Si ahora se pone $r=tt$ y $s=uu$, entonces resulta

$$yy=4ttuu(2u^4-t^4), \text{ por lo tanto}$$
$$y=2tu\sqrt{2u^4-t^4} \quad y \quad x=t^4+2u^4;$$

de lo cual es evidente que nuestra expresión x^4-2y^4 también puede convertirse en un cuadrado si $2u^4-t^4$ se convierte en un cuadrado. Pero esto ocurre obviamente si $t=1$ y $u=1$; y por lo tanto obtenemos $x=3$ e $y=2$, con los que nuestra expresión x^4-2y^4 se convierte en $81-2\cdot16=49$.

III. También hemos visto anteriormente que $2u^4-t^4$ se convierte en un cuadrado si $u=13$ y $t=1$, porque entonces $\sqrt{2u^4-t^4}=239$. Si ahora ponemos estos valores para t y u, obtenemos un nuevo caso para nuestra expresión, es decir,

$$x = 1 + 2 \cdot 13^4 = 57123 \quad \text{e} \quad y = 2 \cdot 13 \cdot 239 = 6214.$$

IV. Pero tan pronto como se encuentren valores para x e y, se pueden escribir para t y u en las fórmulas no. I., ya que entonces se obtendrán nuevos valores para x e y.

Dado que ahora hemos encontrado $x = 3$ e $y = 2$, pongamos $t = 3$ y $u = 2$ en las fórmulas dadas en el no. I.; ya que entonces $\sqrt{t^4 - 2u^4} = 7$, obtenemos los siguientes valores nuevos

$$x = 81 + 2 \cdot 16 = 113 \quad \text{e} \quad y = 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 7 = 84.$$

De esto obtenemos $xx = 12769$ y $x^4 = 163047361$; además $yy = 7056$ e $y^4 = 49787136$, por lo tanto $x^4 - 2y^4 = 63473089$, cuya raíz cuadrada es 7967, que también concuerda completamente con $pp - 2qq$, planteada al principio. Porque como $t = 3$ y $u = 2$, entonces $r = 9$ y $s = 4$, por lo tanto $p = 81 - 32 = 49$ y $q = 72$, de donde $pp - 2qq = 2401 - 10368 = -7967$.

CAPÍTULO 14

RESOLUCIÓN DE ALGUNAS PREGUNTAS, QUE PERTENECEN A ESTA PARTE DE LA ANALÍTICA

212.

Hasta ahora hemos explicado los métodos que se usan en esta parte de la analítica y que son necesarios para resolver todas aquellas tareas del tema presente; por lo tanto, para darle más luz a esto, queremos presentar aquí algunas preguntas de esta índole y agregar las resoluciones de ellas.

213.

I. Pregunta. Búsquese un número tal que, si se le suma o resta 1, salga un cuadrado en ambos casos.

Si ponemos el número buscado $=x$, entonces tanto $x+1$ como $x-1$ tienen que ser cuadrados. Para el primero ponemos $x+1=pp$, de modo que $x=pp-1$ y $x-1=pp-2$, que también tiene que ser un cuadrado. Planteamos la raíz como $p-q$, entonces $pp-2=pp-2pq+qq$, donde las pp se cancelan entre sí y se encuentra $p=\frac{qq+2}{2q}$; luego también $x=\frac{q^4+4}{4qq}$; donde q puede tener valores arbitrarios, incluso fracciones.

Si entonces ponemos $q=\frac{r}{s}$, obtenemos $x=\frac{r^4+4s^4}{4rrss}$, de los cuales queremos mostrar varios valores pequeños:

si	$r=1$	2	1	3
y	$s=1$	1	2	1
entonces	$x=\frac{5}{4}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{65}{16}$	$\frac{85}{36}$

214.

II. Pregunta. Búsquese un número x tal que, si se le suman 2 números cualesquiera como p. ej. 4 y 7, salga un cuadrado en ambos casos.

Entonces estas dos expresiones $x+4$ y $x+7$ tienen que ser cuadrados; por lo tanto, se pone $x+4=pp$ para la primera, luego $x=pp-4$; pero la segunda expresión será $x+7=pp+3$, que también tiene que ser un cuadrado. Entonces ponemos su raíz $=p+q$, luego $pp+3=pp+2pq+qq$, de lo cual se encuentra $p=\frac{3-qq}{2q}$, en consecuencia $x=\frac{9-22qq+q^4}{4qq}$. Si para q ponemos una fracción como $\frac{r}{s}$, obtenemos $x=\frac{9s^4-22rrss+r^4}{4rrss}$, donde para r y s se pueden poner arbitrariamente todos los números enteros.

Si se toma $r = 1$ y $s = 1$, entonces $x = -3$, y luego $x + 4 = 1$ y $x + 7 = 4$. Pero si se quiere tener un número positivo para x, entonces se pone $s = 2$ y $r = 1$, ahí se obtiene $x = \frac{57}{16}$; por lo tanto $x + 4 = \frac{121}{16}$ y $x + 7 = \frac{169}{16}$; si también se quiere poner $s = 3$ y $r = 1$, se obtiene $x = \frac{133}{9}$, de donde se tiene $x + 4 = \frac{169}{9}$ y $x + 7 = \frac{196}{9}$. Si el último término debe superar al de en medio, entonces se pone $r = 5$ y $s = 1$, así $x = \frac{21}{25}$, y de esto $x + 4 = \frac{121}{25}$ y $x + 7 = \frac{196}{25}$.

215.

III. Pregunta. Búsquese una fracción x tal que si se suma a 1 o se resta de 1, resulte un cuadrado en ambos casos

Como estas dos expresiones $1 + x$ y $1 - x$ deben ser cuadrados, ponemos $1 + x = pp$ para la primera, entonces $x = pp - 1$, y la otra expresión es $1 - x = 2 - pp$, que debe ser un cuadrado. Dado que ni el primer término ni el último son cuadrados, se tiene que ver si se puede adivinar un caso en el que esto suceda; pero uno de ellos salta a la vista inmediatamente, es decir $p = 1$; por eso ponemos $p = 1 - q$, de modo que $x = qq - 2q$; entonces nuestra expresión se convierte en $2 - pp = 1 + 2q - qq$, cuya raíz ponemos $= 1 - qr$, así obtenemos $1 + 2q - qq = 1 - 2qr + qqrr$; de esto $2 - q = -2r + qrr$ y $q = \frac{2r+2}{rr+1}$; de esto sale $x = \frac{4r-4r^3}{(rr+1)^2}$; como r es una fracción, ponemos $r = \frac{t}{u}$, entonces $x = \frac{4tu^3-4t^3u}{(tt+uu)^2} = \frac{4tu(uu-tt)}{(tt+uu)^2}$; por lo tanto, u tiene que ser mayor que t.

Por eso ponemos $u=2$ y $t=1$, entonces $x=\frac{24}{25}$; si se pone $u=3$ y $t=2$, entonces $x=\frac{120}{169}$, y de esto $1+x=\frac{289}{169}$ y $1-x=\frac{49}{169}$, que son ambos cuadrados.

216.

IV. Pregunta. Búsquese números x tales que resulten cuadrados en ambos casos, tanto sumándolos a 10 como restándolos de 10.

Por lo tanto, estas dos expresiones $10+x$ y $10-x$ tienen que ser cuadrados, lo cual se podría lograr de la forma anterior.

Pero para mostrar otro camino se debe considerar que el producto de estas expresiones también tiene que ser un cuadrado, es decir, $100-xx$. Dado que el primer término aquí ya es un cuadrado, ponemos la raíz $=10-px$, entonces $100-xx=100-20px+ppxx$ y así $x=\frac{20p}{pp+1}$; pero esto sólo implica que el producto se vuelve un cuadrado, pero no cada expresión por separado. Sin embargo, si solo una se convierte en un cuadrado, la otra también tiene que serlo necesariamente; pero ahora la primera es

$$10+x=\frac{10pp+20p+10}{pp+1}=\frac{10(pp+2p+1)}{pp+1};$$

y debido a que $pp+2p+1$ ya es un cuadrado, solo esta fracción $\frac{10}{pp+1}$ tiene que ser un cuadrado, por lo tanto también esta $\frac{10pp+10}{(pp+1)^2}$. Entonces, solo es necesario que el número $10pp+10$ se convierta en un cuadrado, donde, de nuevo, hay que adivinar un caso en el que suceda eso. Esto se da si $p=3$ y por eso se pone $p=3+q$, entonces se obtiene $100+60q+10qq$; cuya raíz sea $10+qt$, luego

$100+60q+10qq=100+20qt+qqtt$, de esto $q=\frac{60-20t}{tt-10}$, de esto $p=3+q$ y $x=\frac{20p}{pp+1}$.

Si se toma $t=3$, entonces $q=0$ y $p=3$, en consecuencia $x=6$, por lo tanto $10+x=16$ y $10-x=4$. Pero si $t=1$, entonces $q=-\frac{40}{9}$ y $p=-\frac{13}{9}$ y $x=-\frac{234}{25}$; pero da lo mismo poner $x=+\frac{234}{25}$, entonces serán $10+x=\frac{484}{25}$ y $10-x=\frac{16}{25}$, que son ambos cuadrados.

217.

Nota. Si se quisiera plantear esta pregunta en forma general, y pedir tales números x para cualquier número dado a, de manera que tanto $a+x$ como $a-x$ deberían convertirse en un cuadrado, entonces la solución a menudo sería imposible, es decir, en todos los casos donde el número a no es una suma de dos cuadrados. Pero ya hemos visto anteriormente [§ 168] que de 1 a 50 solo los siguientes números son sumas de dos cuadrados, o sea, son de la forma $xx+yy$:

1, 2, 4, 5, 8, 9, 10, 13, 16, 17, 18, 20, 25, 26, 29, 32, 34, 36, 37, 40, 41, 45, 49, 50,

los demás que van también hasta 50 son:

3, 6, 7, 11, 12, 14, 15, 19, 21, 22, 23, 24, 27, 28, 30, 31, 33, 35, 38, 39, 42, 43, 44, 46, 47, 48,

y no se pueden descomponer en dos cuadrados; siempre que a sea uno de estos últimos números, la pregunta será imposible.

Para demostrar esto, ponemos $a+x=pp$ y $a-x=qq$, y la suma da $2a=pp+qq$; de modo que $2a$ tiene que ser una suma de dos cuadrados, pero si $2a$ es tal suma, entonces a también tiene que ser tal $[(\frac{p+q}{2})^2+(\frac{p-q}{2})^2]$, de modo que si a no es una suma de dos cuadrados, entonces tampoco es posible que $a+x$ y $a-x$ puedan ser cuadrados al mismo tiempo.

218.

Entonces, si $a=3$, la pregunta sería imposible, y eso es porque 3 no es una suma de dos cuadrados; se podría objetar que quizás hayan dos cuadrados en fracciones, cuya suma sea 3; pero esto tampoco es posible, porque si fuera $3=\frac{pp}{qq}+\frac{rr}{ss}$ y se multiplicara por $qqss$, entonces sería $3qqss=ppss+qqrr$, donde $ppss+qqrr$ es una suma de dos cuadrados que se puede dividir entre 3; pero ya hemos visto [§ 170] que una suma de dos cuadrados no puede tener otros divisores que los que en sí sean tales sumas.

Bien es verdad que los números 9 y 45 se pueden dividir entre 3, pero también son divisibles entre 9, e incluso cada uno de los dos cuadrados que los componen son divisibles entre 9, porque $9=3^2+0^2$ y $45=6^2+3^2$; pero esto es un caso diferente, por lo tanto aquella conclusión es correcta, que si un número a no es una suma de dos cuadrados con números enteros, esto tampoco puede suceder con fracciones; pero si el número a es una suma de dos cuadrados con números enteros, entonces también puede ser una suma de dos cuadrados con fracciones en un número infinito de formas, lo cual queremos mostrar.

219.

V. Pregunta. Descomponer un número, que es la suma de dos cuadrados, en una suma de otros dos cuadrados de infinitamente muchas maneras.

Entonces, el número dado sea $ff+gg$ y se deben buscar otros dos cuadrados, como xx e yy, cuya suma $xx+yy$ sea igual al número $ff+gg$, de modo que $xx+yy=ff+gg$. Aquí está claro inmediatamente que si x es mayor o menor que f, entonces, al revés, y tiene que ser menor o mayor que g. Por lo tanto, ponemos $x = f + pz$ e $y = g - qz$, así obtenemos

$$ff + 2fpz + ppzz + gg - 2gqz + qqzz = ff + gg,$$

donde se cancelan ff y gg, pero los demás términos se pueden dividir entre z. Así, $2fp + ppz - 2gq + qqz = 0$, o $ppz + qqz = 2gq - 2fp$, y por lo tanto $z = \frac{2gq-2fp}{pp+qq}$, de lo cual se encuentran los siguientes valores para x e y:

$$x = \frac{2gpq + f(qq-pp)}{pp+qq} \quad \text{e} \quad y = \frac{2fpq + g(pp-qq)}{pp+qq},$$

donde para p y q se pueden tomar arbitrariamente todos los números posibles.

El número dado sea 2, de modo que $f = 1$ y $g = 1$, entonces será

$$xx + yy = 2, \quad \text{si} \quad x = \frac{2pq+qq-pp}{pp+qq} \quad \text{e} \quad y = \frac{2pq+pp-qq}{pp+qq};$$

si se pone $p = 2$ y $q = 1$, entonces serán $x = \frac{1}{5}$ e $y = \frac{7}{5}$.

220.

VI. Pregunta. Si el número a es una suma de dos cuadrados, encontrar números x tales que tanto $a + x$ como $a - x$ se conviertan en cuadrados.

Sea el número $a = 13 = 9 + 4$, y ponemos

$$13 + x = pp \quad \text{y} \quad 13 - x = qq,$$

entonces, primero, la suma da $26 = pp + qq$, pero la resta da $2x = pp - qq$; por lo tanto, p y q tienen que ser de tal naturaleza que $pp + qq$ sea igual al número 26, que también es una suma de dos cuadrados, es decir, $25 + 1$; en consecuencia, este número 26 tiene que descomponerse en dos cuadrados, el mayor de los cuales sea pp, pero el menor sea qq. De esto, primero se obtiene $p = 5$ y $q = 1$ y así $x = 12$; pero luego, según lo anterior, el número 26 se puede descomponer en dos cuadrados de infinitas maneras. Porque como $f = 5$ y $g = 1$, si en las fórmulas anteriores en lugar de las letras p y q escribimos t y u, pero para x e y ponemos las letras p y q, entonces encontramos

$$p = \frac{2tu+5(uu-tt)}{tt+uu} \quad \text{y} \quad q = \frac{10tu+tt-uu}{tt+uu}.$$

Si ahora se toman números para t y u arbitrariamente y de ellos se determinan las letras p y q, se obtiene el número $x = \frac{pp-qq}{2}$.

Sea p. ej. $t = 2$ y $u = 1$, entonces $p = -\frac{11}{5}$ y $q = \frac{23}{5}$; y por lo tanto $pp - qq = -\frac{408}{25}$ y $x = \frac{204}{25}$.

221.

Para resolver esta cuestión en forma general, sea el número dado $a = cc + dd$, pero el buscado $= z$, de modo que estas expresiones $a + z$ y $a - z$ deben ser convertidas en cuadrados.

Ahora ponemos

$$a + z = xx \quad \text{y} \quad a - z = yy,$$

entonces primero $2a = 2(cc + dd) = xx + yy$, y después $2z = xx - yy$. Por lo tanto, los dos cuadrados xx e yy tienen que ser de tal naturaleza que $xx + yy = 2(cc + dd)$, donde $2(cc + dd)$ también es una suma de dos cuadrados, es decir, $(c + d)^2 + (c - d)^2$. Para abreviar, ponemos $c + d = f$ y $c - d = g$: de modo que tiene que ser $xx + yy = ff + gg$; ahora, según lo anterior, esto se cumple si se toman

$$x = \frac{2gpq + f(qq-pp)}{pp+qq} \quad \text{e} \quad y = \frac{2fpq + g(pp-qq)}{pp+qq}.$$

De esto se obtiene la solución más fácil poniendo $p = 1$ y $q = 1$, porque entonces $x = \frac{2g}{2} = g = c - d$ e

$y = f = c + d$, y en consecuencia $z = 2cd$. Por eso obviamente serán

$$cc + dd + 2cd = (c+d)^2 \quad \text{y} \quad cc + dd - 2cd = (c-d)^2.$$

Para encontrar una resolución diferente, sea $p = 2$ y $q = 1$, entonces $x = \frac{c-7d}{5}$ e $y = \frac{7c+d}{5}$, donde tanto c y d como x e y pueden tomarse negativos, porque solo aparecen sus cuadrados. Dado que x ahora debe ser mayor que y, tomamos d negativa y así obtenemos $x = \frac{c+7d}{5}$ e $y = \frac{7c-d}{5}$. Esto implica $z = \frac{24dd+14cd-24cc}{25}$, este valor sumado a $a = cc + dd$ da $\frac{cc+14cd+49dd}{25}$, cuya raíz cuadrada es $\frac{c+7d}{5}$. Pero si se resta z de a, entonces sale $\frac{49cc-14cd+dd}{25}$, cuya raíz cuadrada es $\frac{7c-d}{5}$; aquella raíz es x, pero esta es y.

222.

VII. Pregunta. Se busca un número x tal que si se suma uno tanto al número mismo como a su cuadrado xx, resulte un cuadrado en ambos casos.

Entonces, estas dos expresiones $x+1$ y $xx+1$ tienen que convertirse en cuadrados. Por lo tanto, ponemos $x+1 = pp$ para la primera, así $x = pp-1$, y la segunda expresión será $xx+1 = p^4 - 2pp + 2$, esta expresión debe ser un cuadrado; pero la misma es del tipo que no permite encontrar una solución a menos que ya se conozca un caso; pero tal caso salta a la vista inmediatamente, es decir, cuando $p = 1$. Por eso ponemos $p = 1+q$, entonces será

$$xx + 1 = 1 + 4qq + 4q^3 + q^4,$$

que se puede convertir en un cuadrado de muchas maneras.

I. Primero ponemos su raíz como $1+qq$, entonces

$$1+4qq+4q^3+q^4=1+2qq+q^4,$$

esto se convierte en $4q+4qq=2q$, o sea $4+4q=2$, y $q=-\frac{1}{2}$, en consecuencia $p=\frac{1}{2}$ y $x=-\frac{3}{4}$.

II. Si ponemos la raíz como $1-qq$, entonces

$$1+4qq+4q^3+q^4=1-2qq+q^4,$$

y por eso $q=-\frac{3}{2}$ y $p=-\frac{1}{2}$, en consecuencia $x=-\frac{3}{4}$, como antes.

III. Si ponemos la raíz como $1+2q+qq$, para que se cancelen los primeros y los dos últimos términos, entonces

$$1+4qq+4q^3+q^4=1+4q+6qq+4q^3+q^4,$$

por lo tanto, $q=-2$ y $p=-1$, así $x=0$.

IV. Pero también se puede tomar la raíz $1-2q-qq$, entonces será

$$1+4qq+4q^3+q^4=1-4q+2qq+4q^3+q^4,$$

de lo cual resulta $q=-2$, como antes.

V. Para que se cancelen los dos primeros términos, sea la raíz $1+2qq$, entonces será

$$1+4qq+4q^3+q^4=1+4qq+4q^4,$$

y de esto salen $q=\frac{4}{3}$ y $p=\frac{7}{3}$; por lo tanto $x=\frac{40}{9}$; lo cual implica

$$x+1=\frac{49}{9}=\left(\frac{7}{3}\right)^2 \quad \text{y} \quad xx+1=\frac{1681}{81}=\left(\frac{41}{9}\right)^2.$$

Si se quisieran encontrar aún más valores para q, se tendría que tomar uno de los aquí encontrados, p. ej. $-\frac{1}{2}$, y poner además $q=-\frac{1}{2}+r$; pero de eso resultaría

$$p = \tfrac{1}{2} + r; \quad pp = \tfrac{1}{4} + r + rr \quad \text{y} \quad p^4 = \tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{2}r + \tfrac{3}{2}rr + 2r^3 + r^4,$$

en consecuencia, nuestra expresión sería

$$\tfrac{25}{16} - \tfrac{3}{2}r - \tfrac{1}{2}rr + 2r^3 + r^4,$$

la cual debe ser un cuadrado igual que la expresión multiplicada por 16, es decir:

$$25 - 24r - 8rr + 32r^3 + 16r^4.$$

Ahora planteamos:

I. La raíz $= 5 + fr \pm 4rr$, de modo que

$$25 - 24r - 8rr + 32r^3 + 16r^4 =$$
$$25 + 10fr \pm 40rr + ffrr \pm 8fr^3 + 16r^4.$$

Dado que los primeros y últimos términos desaparecen, entonces determinamos f de tal manera que desaparezcan también los segundos términos, lo cual sucede si $-24 = 10f$ y por lo tanto $f = -\tfrac{12}{5}$; entonces los demás términos, divididos entre rr, dan

$$-8 + 32r = \pm 40 + ff \pm 8fr.$$

En el caso de los signos superiores se obtiene

$$-8 + 32r = 40 + ff + 8fr,$$

y entonces $r = \frac{48+ff}{32-8f}$. Como ahora $f = -\tfrac{12}{5}$, será $r = \tfrac{21}{20}$, en consecuencia $p = \tfrac{31}{20}$ y $x = \tfrac{561}{400}$, de esto se obtiene $x + 1 = \left(\tfrac{31}{20}\right)^2$ y $xx + 1 = \left(\tfrac{689}{400}\right)^2$.

II. Pero si se aplica el signo inferior, tenemos

$$-8 + 32r = -40 + ff - 8fr,$$

y entonces $r=\frac{ff-32}{32+8f}$. Como ahora $f=-\frac{12}{5}$, será $r=-\frac{41}{20}$, en consecuencia $p=-\frac{31}{20}$, de lo cual surge la ecuación anterior.

III. Sea la raíz $4rr+4r\pm 5$, de modo que

$$16r^4+32r^3-8rr-24r+25=$$
$$16r^4+32r^3\pm 40rr+16rr\pm 40r+25,$$

donde los dos primeros y los últimos términos desaparecen, pero los demás términos, divididos entre r, dan $-8r-24=\pm 40r+16r\pm 40$, o sea

$$-24r-24=\pm 40r\pm 40.$$

Si se aplica el signo superior, entonces será

$$-24r-24=40r+40,$$

o sea $0=64r+64$, o $0=r+1$, es decir, $r=-1$ y $p=-\frac{1}{2}$, que es un caso que ya hemos visto; justo el mismo también sale aplicando el signo inferior.

IV. Ponemos como raíz $5+fr+grr$, y determinamos f y g tal que desaparezcan los tres primeros términos. Como ahora

$$25-24r-8rr+32r^3+16r^4=$$
$$25+10fr+10grr+ffrr+2fgr^3+ggr^4.$$

Entonces primero $-24=10f$, y por lo tanto $f=-\frac{12}{5}$; además, $-8=10g+ff$, y por lo tanto $g=\frac{-8-ff}{10}$, o sea $g=-\frac{344}{250}=-\frac{172}{125}$; pero los dos últimos términos, divididos entre r^3, dan $32+16r=2fg+ggr$ y luego $r=\frac{2fg-32}{16-gg}$. El numerador aquí será

$2fg - 32 = \frac{+24\cdot172 - 32\cdot625}{5\cdot125} = \frac{-32\cdot496}{625}$, o este numerador $= \frac{-16\cdot32\cdot31}{625}$;

pero el denominador da

$$16 - gg = (4-g)(4+g) = \frac{328\cdot672}{125\cdot125}, \quad \text{o}$$

$$16 - gg = \frac{8\cdot32\cdot41\cdot21}{25\cdot625};$$

de esto resulta $r = -\frac{1550}{861}$, luego $p = -\frac{2239}{1722}$, y de esto se encuentra un nuevo valor para x, que es $x = pp - 1$.

223.

VIII. Pregunta. Para tres números dados a, b y c encontrar un número x tal que, si se suma a cada uno de ellos, salga un cuadrado.

Entonces, estas tres expresiones tienen que convertirse en cuadrados: $x+a$, $x+b$ y $x+c$.

Para la primera ponemos $x+a=zz$, de modo que $x = zz - a$, entonces las dos otra expresiones serán $zz+b-a$ y $zz+c-a$, cada una de las cuales debe ser un cuadrado. Pero no se puede dar una solución general para esto, porque la cuestión a menudo es imposible, y la posibilidad se origina únicamente en la naturaleza de los dos números $b-a$ y $c-a$. Porque si p. ej. $b-a=1$ y $c-a=-1$, es decir, $b=a+1$ y $c=a-1$, entonces $zz+1$ y $zz-1$ tendrían que convertirse en cuadrados, y z indudablemente debería ser una fracción. Por lo tanto, ponemos $z = \frac{p}{q}$, entonces estas dos expresiones $pp+qq$ y $pp-qq$ tendrían que ser cuadrados, por lo que su producto, es decir, $p^4 - q^4$, también tendría que ser un cuadrado, pero que esto no es posible, ha sido demostrado anteriormente.

Si, además, $b-a=2$ y $c-a=-2$, es es decir, $b=a+2$ y $c=a-2$, entonces, si se pone de nuevo $z=\frac{p}{q}$, estas dos expresiones $pp+2qq$ y $pp-2qq$ tendrían que convertirse en cuadrados, al igual que su producto p^4-4q^4, lo cual tampoco es posible.

En forma general, planteamos $b-a=m$ y $c-a=n$, y también $z=\frac{p}{q}$, entonces estas expresiones $pp+mqq$ y $pp+nqq$ tienen que ser cuadrados; lo cual, como acabamos de ver, es imposible si $m=+1$ y $n=-1$, o si $m=+2$ y $n=-2$.

Además, tampoco es posible si $m=ff$ y $n=-ff$. Porque entonces el producto de las expresiones, $p^4-f^4q^4$, sería una diferencia de dos bicuadrados, que nunca puede convertirse en un cuadrado.

Asimismo, si $m=2ff$ y $n=-2ff$, entonces estas expresiones $pp+2ffqq$ y $pp-2ffqq$ no pueden convertirse ambas en cuadrados, porque su producto $p^4-4f^4q^4$ también tendría que ser un cuadrado; en consecuencia, si se pone $fq=r$, esta expresión p^4-4r^4, cuya imposibilidad también se ha demostrado anteriormente.

Además, si fuera $m=1$ y $n=2$, de modo que estas expresiones $pp+qq$ y $pp+2qq$ tendrían que ser cuadrados, entonces ponemos

$$pp+qq=rr \quad \text{y} \quad pp+2qq=ss;$$

luego la primera se convierte en $pp=rr-qq$, y así la otra será $rr+qq=ss$; en consecuencia, tanto $rr-qq$ como $rr+qq$ tendrían que ser cuadrados; y su producto r^4-q^4 también tendría que ser un cuadrado, lo cual es imposible.

Ahora, de ello se puede ver suficientemente que no es fácil escoger tales números para m y n que la solución sea posible. La única forma de encontrar los valores adecuados para m y n es adivinar esos casos o encontrarlos de la siguiente manera.

Planteamos $ff+mgg=hh$ y $ff+ngg=kk$, entonces, de la primera ecuación obtenemos $m=\frac{hh-ff}{gg}$, y de la segunda $n = \frac{kk - ff}{gg}$. Si ahora tomamos números arbitrarios para f, g, h y k, entonces se obtienen valores para m y n con los cuales la resolución es posible.

Sean p. ej. $h = 3$, $k = 5$, $f = 1$, $g = 2$; entonces serán $m = 2$ y $n = 6$. Ahora estamos seguros de que es posible convertir las dos expresiones $pp + 2qq$ y $pp + 6qq$ en cuadrados, porque esto sucede si $p = 1$ y $q = 2$. Pero la primera es, en una forma general, un cuadrado si $p = rr - 2ss$ y $q = 2rs$; porque entonces será $pp + 2qq = (rr + 2ss)^2$. Pero la otra expresión se convierte entonces en $pp + 6qq = r^4 + 20rrss + 4s^4$, de la cual se conoce un caso, en el que se convierte en un cuadrado, es decir, cuando $p = 1$ y $q = 2$, y que sucede si $r = 1$ y $s = 1$, o, en general, si $r = s$; porque entonces nuestra expresión se convierte en $25s^4$. Ahora que conocemos este caso, ponemos $r = s + t$, entonces

$$rr = ss + 2st + tt \quad \text{y} \quad r^4 = s^4 + 4s^3t + 6sstt + 4st^3 + t^4,$$

por lo tanto nuestra expresión será

$$25s^4 + 44s^3t + 26sstt + 4st^3 + t^4,$$

cuya raíz sea $5ss + fst + tt$, cuyo cuadrado es

$$25s^4 + 10fs^3t + 10sstt + ffsstt + 2fst^3 + t^4,$$

donde el primer y último término se cancelan automáticamente. Ahora ponemos f tal que los penúltimos se cancelen entre sí, lo que sucede si $4 = 2f$ y $f = 2$; entonces los otros divididos entre sst dan esta ecuación $44s + 26t = 10fs + 10t + fft = 20s + 14t$, o sea $2s = -t$ y $\frac{s}{t} = -\frac{1}{2}$, y por eso $s = -1$ y $t = 2$, o $t = -2s$, por lo tanto, $r = -s$ y $rr = ss$, que es el caso conocido mismo.

Ahora ponemos f tal que los segundos términos se cancelen entre sí, lo que sucede si $44 = 10f$, o $f = \frac{22}{5}$.

Entonces los términos restantes divididos entre stt dan $26s+4t=10s+ffs+2ft$, es decir $-\frac{84}{25}s=\frac{24}{5}t$, consecuentemente $t=-\frac{7}{10}s$ y luego $r=s+t=\frac{3}{10}s$, o sea $\frac{r}{s}=\frac{3}{10}$; por lo tanto $r=3$ y $s=10$; de esto obtenemos $p=2ss-rr=191$ y $q=2rs=60$, por lo que nuestras expresiones se convierten en

$$pp+2qq=43681=209^2, \quad \text{y} \quad pp+6qq=58081=241^2.$$

224.

Nota. De la manera anterior se pueden encontrar más de estos números para m y n que permitan convertir nuestras expresiones en cuadrados. Sin embargo, cabe señalar que la relación de estos números m y n puede tomarse arbitrariamente. Esta relación sea como a a b, y ponemos $m=az$ y $n=bz$, entonces ahora se trata de determinar z tal que las dos expresiones $pp+azqq$ y $pp+bzqq$ se puedan convertir en cuadrados, lo que queremos mostrar en el siguiente ejercicio.

225.

IX. Pregunta. Dados dos números a y b, se debe encontrar el número z, tal que estas dos expresiones $pp+azqq$ y $pp+bzqq$ se pueden convertir en cuadrados y determinar al mismo tiempo los valores más pequeños para p y q.

Ponemos $pp+azqq=rr$ y $pp+bzqq=ss$, y multiplicamos la primera por b pero la otra por a, entonces la diferencia de ellas da esta ecuación $(b-a)pp=brr-ass$ y luego $pp=\frac{brr-ass}{b-a}$, así esta expresión tiene que ser un cuadrado. Dado que esto sucede si $r=s$, se pone $r=s+(b-a)t$ para eliminar las fracciones, entonces

$$pp = \frac{brr-ass}{b-a}$$
$$= \frac{bss+2b(b-a)st+b(b-a)^2tt-ass}{b-a}$$
$$= \frac{(b-a)ss+2b(b-a)st+b(b-a)^2tt}{b-a} = ss+2bst+b(b-a)tt.$$

Ahora ponemos $p = s+\frac{x}{y}t,$ entonces será

$$pp = ss+\frac{2x}{y}\cdot st+\frac{xx}{yy}tt = ss+2bst+b(b-a)tt;$$

donde se cancelan las ss, pero los otros términos divididos entre t y multiplicados por yy dan

$$2bsyy+b(b-a)tyy = 2sxy+txx,$$

de eso

$$t = \frac{2sxy-2bsyy}{b(b-a)yy-xx}, \quad \text{por lo tanto} \quad \frac{t}{s} = \frac{2xy-2byy}{b(b-a)yy-xx}.$$

De esto se obtienen $t = 2xy-2byy$ y $s = b(b-a)yy-xx$, además, $r = 2(b-a)xy-b(b-a)yy-xx$; y por eso

$$p = s+\frac{x}{y}\cdot t = b(b-a)yy+xx-2bxy = (x-by)^2-abyy.$$

Como ahora hemos encontrado p junto con r y s, nos queda buscar z. Para este fin, restamos la primera ecuación $pp+azqq = rr$ de la otra $pp+bzqq = ss$, entonces resulta $zqq(b-a) = ss-rr = (s+r)\cdot(s-r)$. Dado que

$$s+r = 2(b-a)xy-2xx \quad \text{y}$$
$$s-r = 2b(b-a)yy-2(b-a)xy,$$

o sea,

$$s+r = 2x((b-a)y-x) \quad \text{y} \quad s-r = 2(b-a)y(by-x),$$

entonces

$$(b-a)zqq = 2x((b-a)y-x)\cdot 2(b-a)y(by-x),$$

o sea,

$$zqq = 2x((b-a)y-x)\cdot 2y(by-x), \quad \text{o}$$
$$zqq = 4xy((b-a)y-x)(by-x);$$

en consecuencia

$$z = \frac{4xy((b-a)y-x)(by-x)}{qq}.$$

Por lo tanto, para qq se tiene que tomar el cuadrado más grande entre el cual se pueda dividir el numerador; pero para p ya hemos encontrado

$$p = b(b-a)yy + xx - 2bxy = (x-by)^2 - abyy,$$

de lo cual se puede ver que estas fórmulas se vuelven más fáciles y sencillas, si se pone $x = v + by$, o $x - by = v$; porque entonces será $p = vv - abyy$, además

$$z = \frac{4(v+by)\cdot y\cdot v(v+ay)}{qq} \quad \text{o} \quad z = \frac{4vy(v+ay)(v+by)}{qq},$$

donde los números v e y se pueden tomar arbitrariamente, y luego primero se encuentra qq tomando el cuadrado más grande que esté contenido en el numerador, de lo cual entonces resulta z; luego $m = az$ y $n = bz$, finalmente $p = vv - abyy$; y de esto se obtienen las fórmulas buscadas:

I.) $pp + azqq = (vv - abyy)^2 + 4avy(v+ay)(v+by)$,

que es un cuadrado cuya raíz es $r = -vv - 2avy - abyy$.

II.) La segunda fórmula será

$$pp + bzqq = (vv - abyy)^2 + 4bvy(v+ay)(v+by),$$

que también es un cuadrado, cuya raíz es $s = -vv - 2bvy - abyy$; donde los valores de r y s también pueden tomarse positivos. Será útil explicar esto con algunos ejemplos.

226.

I. Ejemplo. Sean $a=-1$ y $b=+1$, y búsquense números para z de modo que estas dos expresiones $pp-zqq$ y $pp+zqq$ puedan convertirse en cuadrados, es decir, la primera $= rr$ y la segunda $= ss$.

Aquí $p=vv+yy$ y para encontrar z hay que considerar esta fórmula $z=\frac{4vy(v-y)(v+y)}{qq}$, entonces queremos tomar diferentes números para v e y, y buscar mediante ellos los valores para z, como sigue:

	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.
v	2	3	4	5	16	8
y	1	2	1	4	9	1
$v-y$	1	1	3	1	7	7
$v+y$	3	5	5	9	25	9
zqq	$4\cdot 6$	$4\cdot 30$	$16\cdot 15$	$9\cdot 16\cdot 5$	$36\cdot 25\cdot 16\cdot 7$	$16\cdot 9\cdot 14$
qq	4	4	16	$9\cdot 16$	$36\cdot 25\cdot 16$	$16\cdot 9$
z	6	30	15	5	7	14
p	5	13	17	41	337	65

Por eso las siguientes expresiones pueden ser resueltas y convertidas en cuadrados.

I. Estas dos expresiones $pp-6qq$ y $pp+6qq$ pueden ser convertidas en cuadrados, lo cual sucede si $p=5$ y $q=2$. Porque entonces la primera será $=25-24=1$; y la segunda $=25+24=49$.

II. También estas dos expresiones $pp-30qq$ y $pp+30qq$ pueden ser convertidas en cuadrados, lo cual sucede si $p=13$ y $q=2$. Porque entonces la primera será $=169-120=49$; pero la segunda será $=169+120=289$.

III. También estas dos expresiones $pp-15qq$ y $pp+15qq$ pueden ser convertidas en cuadrados, lo cual sucede si $p=17$ y $q=4$. Porque entonces la primera será $= 289 - 240 = 49$; y la segunda será $289 + 240 = 529$.

IV. También estas dos expresiones $pp - 5qq$ y $pp + 5qq$ pueden ser convertidas en cuadrados, lo cual sucede si $p = 41$ y $q = 12$. Porque entonces la primera será $1681 - 720 = 961 = 31^2$; en cambio, la segunda será $1681 + 720 = 2401 = 49^2$.

V. También estas dos expresiones $pp - 7qq$ y $pp + 7qq$ pueden ser convertidas en cuadrados, lo cual sucede si $p = 337$ y $q = 120$. Porque entonces la primera será $113569 - 100800 = 12769 = 113^2$; y la segunda será $113569 + 100800 = 214369 = 463^2$.

VI. También estas dos expresiones $pp - 14qq$ y $pp + 14qq$ pueden ser convertidas en cuadrados, lo cual sucede si $p = 65$ y $q = 12$. Porque entonces la primera será $4225 - 2016 = 2209 = 47^2$; y la segunda será $4225 + 2016 = 6241 = 79^2$.

227.

II. Ejemplo. Si los dos números m y n son como 1 a 2, es decir, si $a = 1$ y $b = 2$, por lo tanto $m = z$ y $n = 2z$, entonces deben encontrarse los valores de z tales que las expresiones $pp + zqq$ y $pp + 2zqq$ se puedan convertir en cuadrados.

No es necesario utilizar aquí las fórmulas generales anteriores, sino que este ejemplo se puede reducir directamente al anterior. Porque si se ponen $pp + zqq = rr$ y $pp + 2zqq = ss$, se obtiene de la primera $pp = rr - zqq$, cuyo valor sustituido en la segunda para pp da $rr + zqq = ss$; en consecuencia, estas dos expresiones $rr - zqq$ y $rr + zqq$ tienen que poder ser convertidas en cuadrados, que es el caso del ejemplo anterior. Entonces aquí también se tienen los siguientes valores para z: 6, 30, 15, 5, 7, 14, etc.

Una transformación de este tipo también se puede realizar en forma general. Si suponemos que estas dos expresiones $pp+mqq$ y $pp+nqq$ se pueden convertir en cuadrados, entonces ponemos $pp+mqq=rr$ y $pp+nqq=ss$, entonces la primera da $pp=rr-mqq$, por lo que la segunda será $ss=rr-mqq+nqq$ o $rr+(n-m)qq=ss$; por lo tanto, si las primeras expresiones son posibles, entonces $rr-mqq$ y $rr+(n-m)qq$ también son posibles; y como podemos intercambiar m y n, también son posibles $rr-nqq$ y $rr+(m-n)qq$; pero si aquellas expresiones son imposibles, estas también son imposibles.

228.

III. Ejemplo. Sean los números m y n como 1 a 3, o sea, $a=1$ y $b=3$, es decir, $m=z$ y $n=3z$, de modo que estas expresiones $pp+zqq$ y $pp+3zqq$ deben convertirse en cuadrados.

Porque aquí $a=1$ y $b=3$, el asunto se vuelve posible siempre y cuando que

$$zqq=4vy(v+y)(v+3y), \quad \text{y} \quad p=vv-3yy.$$

Por tanto, se toman los siguientes valores para v e y:

	I.	II.	III.	IV.	V.
v	1	3	4	1	16
y	1	2	1	8	9
$v+y$	2	5	5	9	25
$v+3y$	4	9	7	25	43
zqq	$16\cdot2$	$4\cdot9\cdot30$	$4\cdot4\cdot35$	$4\cdot9\cdot25\cdot4\cdot2$	$4\cdot9\cdot16\cdot25\cdot43$
qq	16	$4\cdot9$	$4\cdot4$	$4\cdot4\cdot9\cdot25$	$4\cdot9\cdot16\cdot25$
z	2	30	35	2	43
p	2	3	13	191	13

Aquí tenemos dos casos para $z=2$, por lo cual podemos convertir estas expresiones $pp+2qq$ y $pp+6qq$ en cuadrados de dos formas: primero, esto sucede si $p=2$ y $q=4$, y por lo tanto también si $p=1$ y $q=2$; porque entonces serán $pp+2qq=9$ y $pp+6qq=25$. Luego también sucede si $p=191$ y $q=60$, porque entonces serán $pp+2qq=(209)^2$ y $pp+6qq=(241)^2$. Pero, ¿no podría ser también $z=1$? Esto sucedería si saliera un cuadrado para zqq, lo cual es difícil de decidir. Si se quisiera considerar ahora la pregunta si estas dos expresiones $pp+qq$ y $pp+3qq$ se pueden convertir en cuadrados o no, entonces la investigación podría realizarse de la siguiente manera.

229.

Se debe examinar si estas dos expresiones $pp+qq$ y $pp+3qq$ pueden convertirse en cuadrados o no. Ponemos $pp+qq=rr$ y $pp+3qq=ss$, entonces hay que considerar los siguientes puntos:

I. Los números p y q pueden considerarse primos entre sí; porque si tuvieran un divisor común, las expresiones seguirían siendo cuadrados si p y q se dividieran entre él.

II. p no puede ser un número par; porque entonces q sería impar y, por tanto, la segunda expresión sería un número de este tipo $4n+3$, que no puede convertirse en un cuadrado; por tanto, p es necesariamente impar y pp un número de este tipo $8n+1$.

III. Como ahora p es impar, la primera forma implica que q no sólo tiene que ser par, sino incluso divisible entre 4, para que qq se convierta en un número de este tipo $16n$; y $pp+qq$ en uno de este tipo $8n+1$.

IV. Además, p no puede ser divisible entre 3; porque entonces pp se podría dividir entre 9, pero qq no, de modo que $3qq$ solo sería divisible entre 3, pero no entre 9, y por lo tanto también $pp+3qq$ sería divisible entre 3, pero no entre 9, y por lo tanto no sería un cuadrado; en consecuencia, el número p no puede ser divisible entre 3, por lo que pp será del tipo $3n+1$

V. Dado que p no se puede dividir entre 3, entonces q tiene que ser divisible entre 3; porque si q no fuera divisible entre 3, luego qq sería un número del tipo $3n+1$ y por lo tanto $pp+qq$ de este tipo $3n+2$, que no puede ser un cuadrado: por lo tanto, q tiene que ser divisible entre 3.

VI. Además, p no puede ser divisible entre 5; porque si esto fuera así, q no sería divisible entre 5 y qq sería un número del tipo $5n+1$ o $5n+4$, es decir, $3qq$ sería un número del tipo $5n+3$ o $5n+2$, y $pp+3qq$ sería también de uno de estos dos tipos, por lo que esta expresión no podría ser un cuadrado; por lo tanto, necesariamente, p no puede ser divisible entre 5, y así pp tiene que ser un número del tipo $5n+1$ o $5n+4$.

VII. Dado que p no es divisible entre 5, queremos ver si q se puede dividir entre 5 o no. Si q no fuera divisible entre 5, entonces $3qq$ sería del tipo $5n+2$ o $5n+3$, como hemos visto; y dado que pp es del tipo $5n+1$ o $5n+4$, $pp+3qq$ sería del tipo $5n+1$ o $5n+4$ al igual que pp; sea $pp=5n+1$, entonces tendría que ser $qq=5n+4$, porque de lo contrario $pp+qq$ no podría ser un cuadrado: pero entonces sería $3qq=5n+2$, y $pp+3qq=5n+3$, que no puede ser un cuadrado; pero si $pp=5n+4$, entonces tendrán que ser $qq=5n+1$ y $3qq=5n+3$, consecuentemente, $pp+3qq=5n+2$, que tampoco puede ser un cuadrado: lo cual implica que qq tiene que ser divisible entre 5.

VIII. Como q primero tiene que ser divisible entre 4, luego entre 3, y en tercer lugar también entre 5, entonces q tiene que ser un número de la forma $4\cdot 3\cdot 5m$ o $q=60m$; por lo tanto, nuestras expresiones serían $pp+3600mm=rr$ y $pp+10800mm=ss$; entonces, la primera restada de la segunda da

$7200mm = ss - rr = (s+r)(s-r)$; de modo que $s+r$ y $s-r$ tienen que ser factores de $7200mm$, donde hay que tener en cuenta que s y r tienen que ser números impares y, al mismo tiempo, primos entre sí.

IX. Sea $7200mm = 4fg$, o sus factores sean $2f$ y $2g$, y ponemos $s+r = 2f$ y $s-r = 2g$, entonces $s = f+g$ y $r = f-g$, por lo tanto f y g tienen que ser primos entre sí, y uno par y otro impar. Dado que $fg = 1800mm$, se tiene que descomponer $1800mm$ en dos factores, uno de los cuales es par y el otro impar, pero ambos no tienen divisor común.

X. También hay que tener en cuenta que, como $rr = pp+qq$ y entonces r es un divisor de $pp+qq$, el número $r = f-g$ también es una suma de dos cuadrados, y como es impar, tiene que estar contenido en la forma $4n+1$.

XI. Si primero suponemos m = 1, entonces $fg = 1800 = 8 \cdot 9 \cdot 25$, de donde surgen las siguientes descomposiciones: $f = 1800$ y $g = 1$, o $f = 200$ y $g = 9$, o $f = 72$ y $g = 25$, o $f = 225$ y $g = 8$; la primera se convierte en $r = f-g = 1799 = 4n+3$; según la segunda sería $r = f-g = 191 = 4n+3$; según la tercera sería $r = f-g = 47 = 4n+3$; según la cuarta, sin embargo, $r = f-g = 217 = 4n+1$; por lo tanto, se descartan las tres primeras y sólo queda la cuarta; de lo cual se puede concluir, en general, que el factor mayor tiene que ser impar, pero el factor menor tiene que ser par; pero aquí tampoco puede proceder el valor $r = 217$, porque este número se puede dividir entre 7, que no es una suma de dos cuadrados.

XII. Si se toma m = 2, entonces $fg = 7200 = 32 \cdot 225$, por lo tanto se toma $f = 225$ y $g = 32$, de modo que $r = f-g = 193$, este número es una suma de dos cuadrados y por lo tanto merece ser probado; ya que ahora $q = 120$ y $r = 193$, entonces, porque $pp = rr - qq = (r+q)\cdot(r-q)$, así $r+q = 313$ y

$r-q=73$, por lo tanto se ve bien que no sale ningún cuadrado para pp porque estos factores no son cuadrados. Si se quisiera hacer el esfuerzo de tomar otros números para m, todo el trabajo sería en vano, como mostraremos ahora.

230.

Teorema. No es posible que estas dos expresiones $pp+qq$ y $pp+3qq$ se conviertan en cuadrados al mismo tiempo; o en los casos en que uno sea un cuadrado, el otro ciertamente no lo es.

Lo que se demuestra de la siguiente manera.

Hemos visto que p es impar y q es par, entonces $pp+qq$ solo puede ser un cuadrado si $q=2rs$ y $p=rr-ss$. Pero la segunda expresión $pp+3qq$, no puede ser un cuadrado excepto cuando $q=2tu$ y $p=tt-3uu$ o $p=3uu-tt$. Dado que en ambos casos q tiene que ser un producto doble, ponemos $q=2abcd$ para ambos y tomamos $r=ab$ y $s=cd$ para la primera; pero para la segunda tomamos $t=ac$ y $u=bd$, entonces para la primera será $p=aabb-ccdd$, para la segunda $p=aacc-3bbdd$, o $p=3bbdd-aacc$; ambos valores tienen que ser iguales; por lo tanto obtenemos o

$$aabb-ccdd=aacc-3bbdd, \text{ o}$$
$$aabb-ccdd=3bbdd-aacc;$$

donde hay que tener en cuenta que los números a, b, c y d son menores que p y q. Entonces, tenemos que considerar cada uno de estos dos casos por separado. Del primero obtenemos $aabb+3bbdd=aacc+ccdd$ o $bb(aa+3dd)=cc(aa+dd)$, de esto obtenemos $\frac{bb}{cc}=\frac{aa+dd}{aa+3dd}$, esta fracción tiene que ser un cuadrado. Pero aquí el numerador y el denominador no pueden tener ningún otro divisor común que 2, porque la diferencia entre ellos es $2dd$. Si 2 fuera un divisor común, entonces tanto $\frac{aa+dd}{2}$ como $\frac{aa+3dd}{2}$

tendrían que ser cuadrados, pero ambos números a y d son impares en este caso y sus cuadrados son de la forma $8n+1$, por eso la última expresión $\frac{aa+3dd}{2}$ tendrá esta forma $4n+2$ y no puede ser un cuadrado; en consecuencia, 2 no puede ser un divisor común, pero el numerador $aa+dd$ y el denominador $aa+3dd$ son primos entre sí; entonces cada uno tiene que ser un cuadrado por separado. Dado que estas expresiones son similares a las primeras, resulta que si las expresiones iniciales fueran cuadrados, entonces las mismas expresiones también serían cuadrados en números más pequeños; y así siempre se podrían obtener números más pequeños. Dado que no existen tales cuadrados en números pequeños, tampoco puede haberlos en los números más grandes.

Esta conclusión solo es correcta en la medida en que el segundo caso anterior $aabb-ccdd=3bbdd-aacc$ conduzca a lo mismo; pero esto se convierte en $aabb+aacc=3bbdd+ccdd$, o $aa(bb+cc)=dd(3bb+cc)$, y por lo tanto $\frac{aa}{dd}=\frac{bb+cc}{3bb+cc}=\frac{cc+bb}{cc+3bb}$, esta fracción tiene que ser un cuadrado, de modo que esto confirma completamente la conclusión anterior; porque si existieran casos en los números más grandes donde $pp+qq$ y $pp+3qq$ serían cuadrados, lo mismo tendría que darse también en los números más pequeños, lo que sin embargo no ocurre.

231.

XII. Pregunta. Se deben encontrar tres números x, y, z, de modo que si dos se multiplican entre sí y se suma 1 al producto, salga un cuadrado.

Es decir, hay que convertir estas tres expresiones en cuadrados:

$$\text{I.)}\ xy+1; \qquad \text{II.)}\ xz+1; \qquad \text{III.)}\ yz+1.$$

Para los dos últimos ponemos $xz+1=pp$ y $yz+1=qq$, entonces se encuentran $x=\frac{pp-1}{z}$ e $y=\frac{qq-1}{z}$, por lo cual la primera expresión se convierte en $\frac{(pp-1)(qq-1)}{zz}+1$, que debe ser un cuadrado, y por lo tanto también si es multiplicada por zz; es decir, $(pp-1)(qq-1)+zz$ debe ser un cuadrado, lo cual es fácil de lograr. Porque si se pone su raíz $= z+r$, entonces se obtiene

$$(pp-1)(qq-1) = 2rz+rr, \quad \text{y así} \quad z = \frac{(pp-1)(qq-1)-rr}{2r},$$

donde se pueden tomar números arbitrarios para p, q y r.

Sea p. ej. $r = -pq-1$, entonces $rr = ppqq+2pq+1$ y

$$z = \frac{-2pq-pp-qq}{-2pq-2} = \frac{pp+2pq+qq}{2pq+2},$$

en consecuencia

$$x = \frac{(pp-1)(2pq+2)}{pp+2pq+qq} = \frac{2(pq+1)(pp-1)}{(p+q)^2} \quad \text{e} \quad y = \frac{2(pq+1)(qq-1)}{(p+q)^2}.$$

Pero si se quieren tener números enteros, entonces se pone $xy+1 = pp$ para la primera expresión y se toma $z = x+y+q$, entonces la segunda expresión se convierte en

$$xx+xy+xq+1 = xx+qx+pp,$$

pero la tercera será

$$xy+yy+qy+1 = yy+qy+pp,$$

que obviamente se vuelven cuadrados, si se toma $q = \pm 2p$; porque entonces la segunda se convierte en $xx \pm 2px+pp$, cuya raíz es $x \pm p$, pero la tercera se convierte en $yy \pm 2py+pp$, cuya raíz es $y \pm p$. Así que tenemos esta solución muy bonita: $xy+1 = pp$ o $xy = p-1$, que se puede lograr fácilmente para cualquier número que se ponga para p; y después, el tercer número se determina de dos maneras, o $z = x+y+2p$ o $z = x+y-2p$, lo cual queremos explicar con los siguientes ejemplos.

I. Tomamos $p = 3$, entonces $pp - 1 = 8$; ahora ponemos $x = 2$ e $y = 4$, entonces $z = 12$ o $z = 0$; y así los tres números buscados son 2, 4 y 12.

II. Sea $p = 4$, entonces $pp - 1 = 15$; ahora tomamos $x = 5$ e $y = 3$, entonces $z = 16$ o $z = 0$; y los tres números buscados son 3, 5 y 16.

III. Sea $p = 5$, entonces $pp - 1 = 24$; ahora tomamos $x = 3$ e $y = 8$, entonces $z = 21$ o también $z = 1$; de donde surgen los siguientes números, ya sean 1, 3 y 8, o 3, 8 y 21.

232.

XIII. Pregunta. Búsquense tres números enteros x, y, z, de modo que si a los productos de dos de ellos se suma un número dado a, siempre salga un cuadrado.

Entonces estas tres expresiones tienen que convertirse en cuadrados:

$$\text{I.)}\ xy + a; \qquad \text{II.)}\ xz + a; \qquad \text{III.)}\ yz + a.$$

Ahora ponemos $xy + a = pp$ para la primera expresión y tomamos $z = x + y + q$, entonces la segunda se convierte en $xx + xy + xq + a = xx + qx + pp$ y la tercera será $xy + yy + yq + a = yy + qy + pp$, donde ambos se vuelven cuadrados, si $q = \pm 2p$; así que $z = x + y \pm 2p$, y por lo tanto se pueden encontrar dos valores para z.

233.

XIV. Pregunta. Se piden cuatro números enteros x, y, z y v de modo que si a los productos de dos de ellos se suma un número dado a, siempre salga un cuadrado.

Entonces las siguientes seis expresiones tienen que ser convertidas en cuadrados:

$$\text{I.)}\ xy + a; \qquad \text{II.)}\ xz + a; \qquad \text{III.)}\ yz + a;$$
$$\text{IV.)}\ xv + a; \qquad \text{V.)}\ yv + a; \qquad \text{VI.)}\ zv + a.$$

Ahora ponemos $xy+a=pp$ para la primera expresión y tomamos $z=x+y+2p$, entonces la segunda y la tercera expresión se convierten en cuadrados. Además, tomamos $v=x+y-2p$, entonces la cuarta y la quinta expresión también se convierten en cuadrados, así que solo queda la sexta, que será $xx+2xy+yy-4pp+a$, la cual tiene que ser un cuadrado. Como ahora $pp=xy+a$, la última expresión será $xx-2xy+yy-3a$; en consecuencia todavía hay que convertir las siguientes expresiones en cuadrados:

$$\text{I.)}\ xy+a=pp \quad \text{y} \quad \text{II.)}\ (x-y)^2-3a.$$

La raíz de la última sea $(x-y)-q$, entonces

$$(x-y)^2-3a=(x-y)^2-2q(x-y)+qq,$$

y luego $-3a=-2q(x-y)+qq$ y en consecuencia $x-y=\frac{qq+3a}{2q}$ o $x=y+\frac{qq+3a}{2q}$; y así $pp=yy+\frac{qq+3a}{2q}y+a$.

Tomamos $p=y+r$, luego $2ry+rr=\frac{qq+3a}{2q}y+a$, o sea

$$4qry+2qrr=(qq+3a)y+2aq, \text{ o sea}$$

$$2qrr-2aq=(qq+3a)y-4qry \quad \text{e}$$

$$y=\frac{2qrr-2aq}{qq+3a-4qr},$$

donde q y r pueden tomarse arbitrariamente, siempre y cuando resulten números enteros para x e y. Porque, debido a que $p=y+r$, entonces z y v también serán enteros. Aquí, sin embargo, todo depende principalmente de la naturaleza del número dado a, que podría generar algunas dificultades en el asunto de los números enteros; cabe señalar que esta resolución ya ha sido muy limitada por el hecho de que a las letras z y v se les ha dado los valores $x+y\pm 2p$, ya que necesariamente podrían tener muchos otros. Para este fin queremos hacer las siguientes consideraciones sobre esta cuestión, que también pueden ser útiles en otros casos.

I. Si $xy+a$ debe ser un cuadrado y por lo tanto $xy=pp-a$, los números x e y siempre tienen que estar contenidos en esta forma similar $rr-ass$; si entonces ponemos $x=bb-acc$ e $y=dd-aee$, obtenemos $xy=(bd-ace)^2-a(be-cd)^2$. Si ahora es $be-cd=\pm 1$, entonces $xy=(bd-ace)^2-a$, y así $xy+a=(bd-ace)^2$.

II. Si ahora además ponemos $z=ff-agg$ y asumimos los números f y g de modo que $bg-cf=\pm 1$ y $dg-ef=\pm 1$, entonces estas expresiones $xz+a$ y $yz+a$ también se convertirán en cuadrados. Por lo tanto, se trata de encontrar números para b, c y d, e y también para f y g tal que se cumpla la propiedad anterior.

III. Queremos representar estos tres pares de letras con estas fracciones $\frac{b}{c}, \frac{d}{e}$, y $\frac{f}{g}$, que por lo tanto tienen que ser tales que la diferencia entre cada dos se exprese con una fracción cuyo numerador = 1. Porque dado que $\frac{b}{c}-\frac{d}{e}=\frac{be-dc}{ce}$, entonces su numerador tiene que ser ± 1, como hemos visto. Una de estas fracciones puede tomarse arbitrariamente y se puede encontrar fácilmente otra tal que se cumpla la condición planteada.

Sea p. ej la primera fracción $\frac{b}{c}=\frac{3}{2}$, entonces la segunda, $\frac{d}{e}$, tiene que ser casi igual a ella. Sea $\frac{d}{e}=\frac{4}{3}$, entonces la diferencia será $z=\frac{1}{6}$. La segunda fracción también se puede determinar de forma general en base a la primera; porque como $\frac{3}{2}-\frac{d}{e}=\frac{3e-2d}{2e}$, entonces tiene que ser $3e-2d=1$, o sea $2d=3e-1$ y $d=e+\frac{e-1}{2}$. Por eso tomamos $\frac{e-1}{2}=m$ o $e=2m+1$, así obtenemos $d=3m+1$ y nuestra segunda fracción será $\frac{d}{e} = \frac{3m+1}{2m+1}$. De la misma manera se puede encontrar la segunda fracción para cada primera fracción, de lo cual queremos agregar los siguientes ejemplos.

$\frac{b}{c} = \frac{3}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{7}{3}$	$\frac{8}{5}$	$\frac{11}{4}$	$\frac{13}{8}$	$\frac{17}{7}$
$\frac{d}{e} = \frac{3m+1}{2m+1}$	$\frac{5m+2}{3m+1}$	$\frac{7m+2}{3m+1}$	$\frac{8m+3}{5m+2}$	$\frac{11m+3}{4m+1}$	$\frac{13m+5}{8m+3}$	$\frac{17m+5}{7m+2}$

IV. Si ya se han encontrado dos de tales fracciones para $\frac{b}{c}$ y $\frac{d}{e}$, es muy fácil encontrar una tercera $\frac{f}{g}$ que esté en la misma relación con las dos primeras. Solo se necesita poner $f = b + d$ y $g = c + e$, de modo que $\frac{f}{g} = \frac{b+d}{c+e}$, porque como las dos primeras cumplen con $be - cd = \pm 1$, entonces $\frac{f}{g} - \frac{b}{c} = \frac{\pm 1}{cc+ce}$. De la misma manera, también la segunda menos la tercera será $\frac{f}{g} - \frac{d}{e} = \frac{be-cd}{ee+ce} = \frac{\pm 1}{ce+ee}$.

V. Si se han encontrado tres de esas fracciones $\frac{b}{c}$, $\frac{d}{e}$ y $\frac{f}{g}$, se puede resolver inmediatamente nuestra pregunta para tres números x, y y z, de modo que estas tres expresiones $xy + a$, $xz + a$ y $yz + a$ se conviertan en cuadrados. Porque solo se necesita poner $x = bb - acc$, $y = dd - aee$ y $z = ff - agg$. Por ejemplo, tomamos $\frac{b}{c} = \frac{5}{3}$ y $\frac{d}{e} = \frac{7}{4}$ de la tabla anterior, entonces $\frac{f}{g} = \frac{12}{7}$; de lo cual se obtiene $x = 25 - 9a$, $y = 49 - 16a$ y $z = 144 - 49a$; por lo tanto serán

$$xy + a = 1225 - 840a + 144aa = (35 - 12a)^2,$$

además

$$xz + a = 3600 - 2520a + 441aa = (60 - 21a)^2,$$

y

$$yz + a = 7056 - 4704a + 784aa = (84 - 28a)^2.$$

234.

Pero si, según lo planteado en la pregunta, se tienen que encontrar cuatro números x, y, z y v, se tiene que agregar una cuarta fracción a las tres anteriores. Entonces, las tres primeras sean $\frac{b}{c}, \frac{d}{e}$, y $\frac{f}{g} = \frac{b+d}{c+e}$, ponemos la cuarta fracción $\frac{h}{k} = \frac{d+f}{e+g} = \frac{2d+b}{2e+c}$, de modo que esté en la relación apropiada con la segunda y tercera fracción; si ahora se toman

$$x = bb - acc, \quad y = dd - aee, \quad z = ff - agg \quad \text{y} \quad v = hh - akk,$$

ya se cumplen las siguientes condiciones:

I. $xy + a = \square$ *); II. $xz + a = \square$; III. $yz + a = \square$;
IV. $yv + a = \square$; V. $zv + a = \square$;

ahora solo falta que también $xv + a$ sea un cuadrado, lo que no se da automáticamente, porque la primera fracción no está en una relación adecuada con la cuarta. Por eso es necesario conservar el número indeterminado m, y determinarlo de tal manera que $xv + a$ también se vuelva un cuadrado.

VI. Así que tomamos el primer caso de la tabla anterior y ponemos $\frac{b}{c} = \frac{3}{2}$ y $\frac{d}{e} = \frac{3m+1}{2m+1}$, así $\frac{f}{g} = \frac{3m+4}{2m+3}$ y $\frac{h}{k} = \frac{6m+5}{4m+4}$, de esto obtenemos $x = 9 - 4a$ y $v = (6m + 5)^2 - a(4m + 4)^2$, por lo tanto

*) Aquí $\square$ siempre indica un número cuadrado.

$$xv+a=9(6m+5)^2-4a(6m+5)^2-9a(4m+4)^2$$
$$+4aa(4m+4)^2$$

o sea

$$xv+a=9(6m+5)^2-a(288mm+528m+244)$$
$$+4aa(4m+4)^2,$$

que se puede convertir fácilmente en un cuadrado porque mm está multiplicada por un cuadrado; pero no queremos demorarnos en eso.

VII. También se pueden indicar las fracciones necesarias de una manera más general: porque sean

$$\frac{b}{c}=\frac{I}{1},\ \ \frac{d}{e}=\frac{nI-1}{n};\ \ \text{así}\ \ \frac{f}{g}=\frac{nI+I-1}{n+1}\ \ \text{y}\ \ \frac{h}{k}=\frac{2nI+I-2}{2n+1};$$

si ponemos $2n+1=m$ en la última fracción, la misma se convierte en $\frac{\mathrm{Im}-2}{m}$, en consecuencia, la primera da $x=II-a$ y la última da $v=(Im-2)^2-amm$. Así que solo falta que $xv+a$ se convierta en un cuadrado. Como ahora $v=(II-a)mm-4Im+4$, entonces

$$xv+a=(II-a)^2mm-4(II-a)Im+4II-3a,$$

que tiene que ser un cuadrado; planteamos su raíz como $(II-a)m-p$, cuyo cuadrado es

$$(II-a)^2mm-2(II-a)mp+pp,$$

de lo cual obtenemos

$$-4(II-a)Im+4II-3a=-2(II-a)mp+pp, \quad \text{y}$$
$$m=\frac{pp-4II+3a}{(II-a)(2p-4I)}.$$

Tomamos $p=2I+q$, entonces será $m=\frac{4Iq+qq+3a}{2q(II-a)}$, donde para I y q se pueden tomar números arbitrarios.

Si p. ej. fuera $a = 1$, y se toma $I = 2$, entonces será $m = \frac{4q+qq+3}{6q}$; si se pone q = 1, entonces serán $m = \frac{4}{3}$ y $m = 2n+1$.*) Pero no queremos detenernos aquí, sino que pasamos a la siguiente pregunta.

235.

XV. Pregunta. Se piden tres números x, y y z, de modo que tanto la suma como la diferencia de cada dos se conviertan en un cuadrado.

Así que las siguientes seis expresiones tienen que convertirse en cuadrados:

$$\text{I.)}\ x+y; \quad \text{II.)}\ x+z; \quad \text{III.)}\ y+z;$$
$$\text{IV.)}\ x-y; \quad \text{V.)}\ x-z; \quad \text{VI.)}\ y-z.$$

Empecemos con las tres últimas y pongamos $x-y = pp$, $x-z = qq$ e $y-z = rr$, entonces obtenemos de las dos últimas

$$x = qq+z \quad \text{e} \quad y = rr+z,$$

por lo tanto, la primera da $x-y = qq-rr = pp$, o sea $qq = pp+rr$, de modo que la suma de los cuadrados $pp+rr$ tiene que ser un cuadrado, es decir qq, lo que sucede si $p = 2ab$ y $r = aa-bb$, entonces $q = aa+bb$. Por el momente queremos mantener las letras p, q y r, y consideramos las tres primeras expresiones; entonces obtenemos primero $x+y = qq+rr+2z$; segundo, $x+z = qq+2z$; en tercer lugar, $y+z = rr+2z$. Para la primera ponemos

*) Como señaló Heinrich Weber en la edición de 1911, aquí hay una equivocación. Para $I = 2$ resulta $m = \frac{8q+qq+3}{6q}$; para $q = 1$ esto nos lleva a $m = 2$. Entonces será $v = 0$.

$$qq+rr+2z=tt, \text{ luego } 2z=tt-qq-rr;$$

por lo tanto, estas dos expresiones se tienen que convertir en cuadrados: $tt-rr=\square$ y $tt-qq=\square$, es decir

$$tt-(aa-bb)^2=\square \quad \text{y} \quad tt-(aa+bb)^2=\square,$$

que toman estas formas,

$$tt-a^4-b^4+2aabb \quad \text{y} \quad tt-a^4-b^4-2aabb;$$

ya que tanto $cc+dd+2cd$ como $cc+dd-2cd$ son cuadrados, se puede ver que alcanzamos nuestro objetivo final si comparamos $tt-a^4-b^4$ con $cc+dd$ y $2aabb$ con $2cd$. Para realizar esto, planteamos $cd=aabb=ffgghhkk$ y tomamos $c=ffgg$ y $d=hhkk$; $aa=ffhh$ y $bb=ggkk$, o sea $a=fh$ y $b=gk$, por lo cual la primera ecuación

$$tt-a^4-b^4=cc+dd$$

toma esta forma

$$tt-f^4h^4-g^4k^4=f^4g^4+h^4k^4 \quad \text{y así}$$
$$tt=f^4g^4+f^4h^4+h^4k^4+g^4k^4,$$

es decir, $tt=(f^4+k^4)(g^4+h^4)$, por lo tanto, este producto tiene que ser un cuadrado, pero la resolución de esto debería ser difícil.

Por eso, atacamos el asunto de una manera diferente, y a partir de las tres primeras ecuaciones $x-y=pp$; $x-z=qq$; e $y-z=rr$, determinamos las letras y y z, que serán $y=x-pp$ y $z=x-qq$, de modo que $qq=pp+rr$. Ahora las primeras expresiones se convierten en

$$x+y=2x-pp, \quad x+z=2x-qq;$$

e

$$y+z=2x-pp-qq;$$

para esta última expresión ponemos $2x-pp-qq=tt$, de modo que $2x=tt+pp+qq$, y solo quedan estas expresiones $tt+qq$ y $tt+pp$, las cuales tienen que ser convertidas en cuadrados. Pero como ahora tiene que ser $qq = pp + rr$, se pone $q = aa + bb$ y $p = aa - bb$, entonces $r = 2ab$; por lo cual nuestras expresiones serán

$$\text{I.)}\quad tt + (aa+bb)^2 = tt + a^4 + b^4 + 2aabb = \square$$

$$\text{II.)}\quad tt + (aa-bb)^2 = tt + a^4 + b^4 - 2aabb = \square.$$

Si ahora aquí comparamos otra vez $tt + a^4 + b^4$ con $cc + dd$, y $2aabb$ con $2cd$, logramos nuestro objetivo final. Para eso ponemos como arriba $c = ffgg$, $d = hhkk$ y $a = fh$, $b = gk$; entonces será $cd = aabb$, y además tiene que ser $tt + f^4h^4 + g^4k^4 = cc + dd = f^4g^4 + h^4k^4$; de lo cual resulta

$$tt = f^4g^4 - f^4h^4 + h^4k^4 - g^4k^4 = (f^4 - k^4)(g^4 - h^4).$$

Por lo tanto se trata de encontrar dos diferencias de bicuadrados, como $f^4 - k^4$ y $g^4 - h^4$, que multiplicadas entre sí den un cuadrado.

Para este fin queremos considerar la expresión $m^4 - n^4$ y mirar cuáles números surgen de ella, si se toman números dados para m y n, y notar particularmente los cuadrados que estén contenidos en ellos. Como ahora $m^4 - n^4 = (mm - nn)(mm + nn)$, queremos hacer la siguiente tablita a partir de ello.

Tabla

para los números contenidos en la forma $m^4 - n^4$

mm	nn	$mm-nn$	$mm+nn$	m^4-n^4
4	1	3	5	$3\cdot 5$
9	1	8	10	$16\cdot 5$
9	4	5	13	$5\cdot 13$
16	1	15	17	$3\cdot 5\cdot 17$
16	9	7	25	$25\cdot 7$
25	1	24	26	$16\cdot 3\cdot 13$
25	9	16	34	$16\cdot 2\cdot 17$
49	1	48	50	$25\cdot 16\cdot 2\cdot 3$
49	16	33	65	$3\cdot 5\cdot 11\cdot 13$
64	1	63	65	$9\cdot 5\cdot 7\cdot 13$
81	49	32	130	$64\cdot 5\cdot 13$
121	4	117	125	$25\cdot 9\cdot 5\cdot 13$
121	9	112	130	$16\cdot 2\cdot 5\cdot 7\cdot 13$
121	49	72	170	$144\cdot 5\cdot 17$
144	25	119	169	$169\cdot 7\cdot 17$
169	1	168	170	$16\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 17$
169	81	88	250	$25\cdot 16\cdot 5\cdot 11$
225	64	161	289	$289\cdot 7\cdot 23$

De esto ya podemos dar algunas soluciones. Así pues tomamos $ff = 9$ y $kk = 4$, entonces $f^4 - k^4 = 13\cdot 5$; además tomamos $gg = 81$ y $hh = 49$, entonces será $g^4 - h^4 = 64\cdot 5\cdot 13$, por lo tanto $tt = 64\cdot 25\cdot 169$; en consecuencia $t = 520$. Como ahora $tt = 270400$, $f = 3$, $g = 9$, $k = 2$, $h = 7$, obtenemos $a = 21$, $b = 18$, de esto $p = 117$, $q = 765$ y $r = 756$; de lo cual se encuentra

$$2x = tt + pp + qq = 869314 \quad \text{y así} \quad x = 434657;$$

por eso además $y = x - pp = 420968$; y finalmente $z = x - qq = -150568$, este número también se puede tomar positivo, porque entonces se convierten la suma en una diferencia y, al revés, la diferencia en una suma. En consecuencia, nuestros tres números buscados son:

$$x = 434657$$
$$y = 420968$$
$$z = 150568$$

por lo tanto
$$x + y = 855625 = (925)^2$$
$$x + z = 585225 = (765)^2$$
$$y + z = 571536 = (756)^2$$

y además
$$x - y = 13689 = (117)^2$$
$$x - z = 284089 = (533)^2$$
$$y - z = 270400 = (520)^2$$

Se pueden encontrar otros números mediante la tabla anterior si ponemos $ff = 9$, $kk = 4$ y $gg = 121$, $hh = 4$; porque esto da $tt = 13 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 9 \cdot 25 = 9 \cdot 25 \cdot 25 \cdot 169$, de modo que $t = 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 13 = 975$. Ya que ahora $f = 3$, $g = 11$, $k = 2$ y $h = 2$, entonces $a = fh = 6$ y $b = gk = 22$, de esto $p = aa - bb = -448$, $q = aa + bb = 520$ y $r = 2ab = 264$, por lo tanto obtenemos

$$2x = tt + pp + qq = 950625 + 200704 + 270400 = 1421729,$$

por lo tanto $x = \frac{1421729}{2}$, de eso $y = x - pp = \frac{1020321}{2}$ y $z = x - qq = \frac{880929}{2}$. Ahora hay que notar que si estos números tienen la propiedad buscada, los mismos multiplicados por cualquier cuadrado, tienen que mantener esta misma propiedad. Si entonces tomamos los números encontrados cuatro veces más grandes, los siguientes tres también cumplen el requisito:

$$x = 2843458, \quad y = 2040642 \quad \text{y} \quad z = 1761858,$$

que son más grandes que los anteriores; de modo que aquellos pueden considerarse los más pequeños posibles.

236.

XVI. Pregunta. Se piden tres números cuadrados tales que la diferencia entre cada dos sea un cuadrado.

La resolución anterior también sirve para resolver esta cuestión. Porque si x, y y z son números tales que estas expresiones se convierten en cuadrados

$$\text{I.)}\ x+y;\qquad \text{III.)}\ x+z;\qquad \text{V.)}\ y+z;$$
$$\text{II.)}\ x-y;\qquad \text{IV.)}\ x-z;\qquad \text{VI.)}\ y-z;$$

entonces el producto del primero y el segundo, $xx-yy$, también será un cuadrado, al igual que el producto del tercero y el cuarto, $xx-zz$, y finalmente también el producto del quinto y el sexto, $yy-zz$, será un cuadrado. Por lo tanto, los tres cuadrados buscados aquí serán xx, yy, zz. Sin embargo, estos números se vuelven muy grandes, y sin duda hay otros mucho más pequeños; porque para convertir $xx-yy$ en un cuadrado no es necesario que también $x+y$ y $x-y$ sean cuadrados por separado; ya que p. ej. $25-9$ es un cuadrado, aunque ni $5+3$ ni $5-3$ sean cuadrados. Así que resolveremos esta cuestión por separado, y primero notamos que se puede poner 1 para uno de los cuadrados. Porque si $xx-yy$, $xx-zz$ y $yy-zz$ son cuadrados, entonces siguen siendo cuadrados si se dividen entre zz; por lo tanto, las siguientess expresiones tienen que convertirse en cuadrados: $\frac{xx}{zz}-\frac{yy}{zz}=\square$, $\frac{xx}{zz}-1=\square$, y $\frac{yy}{zz}-1=\square$. Entonces, el asunto sólo depende de estas dos fracciones $\frac{x}{z}$ e $\frac{y}{z}$; si ahora se plantea

$$\frac{x}{z}=\frac{pp+1}{pp-1}\quad \text{e}\quad \frac{y}{z}=\frac{qq+1}{qq-1},$$

entonces las dos últimas condiciones se cumplen, porque luego

$$\frac{xx}{zz}-1=\frac{4pp}{(pp-1)^2} \quad \text{e} \quad \frac{yy}{zz}-1=\frac{4qq}{(qq-1)^2}.$$

Por lo tanto solo falta convertir en un cuadrado la primera expresión, que es

$$\frac{xx}{zz}-\frac{yy}{zz}=\frac{(pp+1)^2}{(pp-1)^2}-\frac{(qq+1)^2}{(qq-1)^2}=\left(\frac{pp+1}{pp-1}+\frac{qq+1}{qq-1}\right)\left(\frac{pp+1}{pp-1}-\frac{qq+1}{qq-1}\right).$$

Aquí el primer factor es $=\frac{2(ppqq-1)}{(pp-1)(qq-1)}$, pero el segundo $=\frac{2(qq-pp)}{(pp-1)(qq-1)}$, cuyo producto es $\frac{4(ppqq-1)(qq-pp)}{(pp-1)^2(qq-1)^2}$. Como ahora el denominador ya es un cuadrado y el numerador está multiplicado por el cuadrado 4, todavía es necesario convertir en un cuadrado la expresión $(ppqq-1)(qq-pp)$, o también esta $(ppqq-1)\left(\frac{qq}{pp}-1\right)$; lo que sucede si se toman

$$pq=\frac{ff+gg}{2fg} \quad \text{y} \quad \frac{q}{p}=\frac{hh+kk}{2hk},$$

porque entonces cada factor se vuelve un cuadrado. De ello tenemos

$$qq=\frac{ff+gg}{2fg}\cdot\frac{hh+kk}{2hk};$$

consecuentemente estas dos fracciones, multiplicadas entre sí, tienen que dar un cuadrado, y también si se multiplican por $4ffgg\cdot hhkk$, es decir $fg(ff+gg)hk(hh+kk)$; esta expresión se vuelve perfectamente similar a la encontrada anteriormente, si se pone

$$f=a+b, \quad g=a-b, \quad h=c+d \quad \text{y} \quad k=c-d;$$

porque resulta $2(a^4-b^4)\cdot 2(c^4-d^4)=4(a^4-b^4)(c^4-d^4)$, que, como hemos visto, sucede si $aa=9$, $bb=4$, $cc=81$ y $dd=49$, o sea $a=3$, $b=2$, $c=9$ y $d=7$. De esto obtenemos $f = 5$, $g = 1$, $h = 16$ y $k = 2$, y por lo tanto $pq = \frac{13}{5}$ y $\frac{q}{p} = \frac{260}{64} = \frac{65}{16}$; estas dos ecuaciones multiplicadas entre sí dan $qq = \frac{65 \cdot 13}{16 \cdot 5} = \frac{13 \cdot 13}{16}$, por lo tanto $q = \frac{13}{4}$, por eso será $p = \frac{4}{5}$; entonces obtenemos $\frac{x}{z} = \frac{pp+1}{pp-1} = -\frac{41}{9}$ e $\frac{y}{z} = \frac{qq+1}{qq-1} = \frac{185}{153}$. Dado que ahora $x = -\frac{41z}{9}$ e $y = \frac{185z}{153}$, entonces, para obtener números enteros, tomamos $z = 153$, así obtenemos $x = -697$ e $y = 185$, entonces los tres números cuadrados que estamos buscando son los siguientes:

$$\begin{aligned} xx &= 485809 \quad \text{entonces será} & xx - yy &= 451584 = (672)^2 \\ yy &= 34225 & yy - zz &= 10816 = (104)^2 \\ zz &= 23409 & xx - zz &= 462400 = (680)^2 \end{aligned}$$

Estos cuadrados son mucho más pequeños que los que hubiéramos obtenido tomando los cuadrados de los tres números x, y y z encontrados en la pregunta anterior.

237.

Se objetará aquí que esta resolución se ha encontrado mediante prueba y error, porque la realizamos con la ayuda de la tabla anterior. Pero solo hemos utilizado este medio para encontrar la resolución más pequeña; pero si no se quiere considerar eso, entonces, se puede dar un número infinito de soluciones con la ayuda de las reglas dadas anteriormente. Dado que en la última pregunta se trata de convertir el producto

$$(ppqq - 1)\left(\frac{qq}{pp} - 1\right)$$

en un cuadrado, porque ya tenemos

$$\frac{x}{z} = \frac{pp+1}{pp-1} \quad \text{e} \quad \frac{y}{z} = \frac{qq+1}{qq-1},$$

entonces ponemos $\frac{q}{p} = m$, o sea $q = mp$, así que nuestra expresión será $(mmp^4 - 1)(mm - 1)$, que obviamente se convierte en un cuadrado si $p = 1$; y este valor nos llevará a otros, si ponemos $p = 1 + s$, y entonces la expresión

$$(mm - 1) \cdot (mm - 1 + 4mms + 6mmss + 4mms^3 + mms^4)$$

tiene que ser un cuadrado y también será un cuadrado si se divide entre el cuadrado $(mm - 1)^2$, lo cual da

$$1 + \frac{4mms}{mm-1} + \frac{6mmss}{mm-1} + \frac{4mms^3}{mm-1} + \frac{mms^4}{mm-1}.$$

Para abreviar, aquí ponemos $\frac{mm}{mm-1} = a$, de modo que

$$1 + 4as + 6ass + 4as^3 + as^4$$

debe convertirse en un cuadrado. Su raíz sea $1 + fs + gss$, cuyo cuadrado es $1 + 2fs + 2gss + ffss + 2fgs^3 + ggs^4$, y determinamos f y g tal que desaparezcan los tres primeros términos, lo cual sucede si $4a = 2f$ o $f = 2a$, y $6a = 2g + ff$, en consecuencia $g = \frac{6a - ff}{2} = 3a - 2aa$; entonces los dos últimos términos dan esta ecuación $4a + as = 2fg + ggs$, de la cual se encuentra

$$s = \frac{4a - 2fg}{gg - a} = \frac{4a - 12aa + 8a^3}{4a^4 - 12a^3 + 9aa - a}, \quad \text{o sea} \quad s = \frac{4 - 12a + 8aa}{4a^3 - 12aa + 9a - 1},$$

esta fracción, simplificada con $a - 1$, da $\frac{4(2a-1)}{4aa - 8a + 1}$. Este valor ya nos da una infinidad de soluciones, porque el número m, del cual surge $a = \frac{mm}{mm-1}$, puede ser tomado arbitrariamente. Es necesario explicar esto con algunos ejemplos.

I. Sea $m = 2$, luego $a = \frac{4}{3}$ y así $s = 4 \cdot \frac{\frac{5}{3}}{-\frac{23}{9}} = -\frac{60}{23}$ y de esto $p = -\frac{37}{23}$, en consecuencia $q = -\frac{74}{23}$; finalmente $\frac{x}{z} = \frac{949}{420}$ e $\frac{y}{z} = \frac{6005}{4947}$.

II. Sea $m = \frac{3}{2}$, luego $a = \frac{9}{5}$ y $s = 4 \cdot \frac{\frac{13}{5}}{-\frac{11}{24}} = -\frac{260}{11}$, por eso $p = -\frac{249}{11}$, y $q = -\frac{747}{22}$, de lo cual se pueden encontrar las fracciones $\frac{x}{z}$ e $\frac{y}{z}$.

Un caso especial que merece ser notado es cuando a es un cuadrado, como sucede si $m = \frac{5}{3}$, porque entonces será $a = \frac{25}{16}$. Para abreviar, ponemos nuevamente $a = bb$, de modo que nuestra expresión será

$$1 + 4bbs + 6bbss + 4bbs^3 + bbs^4;$$

cuya raíz sea $1 + 2bbs + bss$, su cuadrado será

$$1 + 4bbs + 2bss + 4b^4ss + 4b^3s^3 + bbs^4,$$

donde los dos primeros y los últimos términos se cancelan entre sí, pero los otros, divididos entre ss, dan $6bb + 4bbs = 2b + 4b^4 + 4b^3s$, por lo cual

$$s = \frac{6bb - 2b - 4b^4}{4b^3 - 4bb} = \frac{3b - 1 - 2b^3}{2bb - 2b};$$

esta fracción se puede simplificar con $b - 1$, entonces sale

$$s = \frac{1 - 2b - 2bb}{2b} \quad \text{y} \quad p = \frac{1 - 2bb}{2b}.$$

También se podría haber puesto la raíz cuadrada de la expresión anterior $1 + 2bs + bss$, cuyo cuadrado es

$$1 + 4bs + 2bss + 4bbss + 4bbs^3 + bbs^4,$$

donde el primero y los dos últimos términos se cancelan entre sí, pero los otros divididos entre s dan

$$4bb + 6bbs = 4b + 2bs + 4bbs.$$

Dado que $bb = \frac{25}{16}$ y $b = \frac{5}{4}$, se obtendría $s = -2$ y $p = -1$, en consecuencia $pp - 1 = 0$; de lo cual no se encuentra nada, porque sería $z = 0$.

En el caso anterior, sin embargo, dado que $p = \frac{1-2bb}{2b}$, si $m = \frac{5}{3}$ y luego $a = \frac{25}{16} = bb$, por lo tanto $b = \frac{5}{4}$, entonces resultan $p = -\frac{17}{20}$ y $q = mp = -\frac{17}{12}$, en consecuencia $\frac{x}{z} = \frac{689}{111}$ y $\frac{y}{z} = \frac{433}{145}$.

238.

XVII. Pregunta. Se piden tres números cuadrados xx, yy y zz, de modo que la suma de cada dos vuelva a ser un cuadrado.

Dado que estas tres expresiones $xx + yy$, $xx + zz$ e $yy + zz$ deben convertirse en cuadrados, se dividen las mismas entre zz, obteniendo las siguientes tres expresiones:

$$\text{I.)}\ \frac{xx}{zz} + \frac{yy}{zz} = \square; \qquad \text{II.)}\ \frac{xx}{zz} + 1 = \square; \qquad \text{III.)}\ \frac{yy}{zz} + 1 = \square.$$

Ya que las dos últimas cumplen con las condiciones si

$$\frac{x}{z} = \frac{pp-1}{2p} \quad \text{e} \quad \frac{y}{z} = \frac{qq-1}{2q},$$

con las cuales la primera expresión se convierte en $\frac{(pp-1)^2}{4pp} + \frac{(qq-1)^2}{4qq}$, que también tiene que ser un cuadrado si se multiplica por 4, es decir $\frac{(pp-1)^2}{pp} + \frac{(qq-1)^2}{qq}$; o también multiplicada por $ppqq$, es decir,

$$qq(pp-1)^2 + pp(qq-1)^2 = \square,$$

que es difícil de conseguir sin conocer un caso en el que la expresión sea un cuadrado; pero no es fácil adivinar un caso así, por lo que hay que recurrir a otros métodos, algunos de los cuales expondremos.

I. Como la expresión puede tomar la forma siguiente

$$qq(p+1)^2(p-1)^2 + pp(q+1)^2(q-1)^2 = \square,$$

entonces hacemos que se pueda dividir entre el cuadrado $(p+1)^2$; lo cual sucede si se toma $q-1=p+1$ o $q=p+2$, entonces será $q+1=p+3$, por lo tanto nuestra expresión se convierte en

$$(p+2)^2(p+1)^2(p-1)^2 + pp(p+3)^2(p+1)^2 = \square,$$

que, dividida entre $(p+1)^2$, tiene que ser un cuadrado, es decir

$$(p+2)^2(p-1)^2 + pp(p+3)^2,$$

y en forma desarrollada, $2p^4+8p^3+6pp-4p+4$. Como aquí el último término es un cuadrado, ponemos la raíz $2+fp+gpp$ o $gpp+fp+2$, cuyo cuadrado es

$$ggp^4+2fgp^3+4gpp+ffpp+4fp+4,$$

donde se tienen que determinar f y g de manera que desaparezcan los tres últimos términos, lo que sucede si $-4=4f$, o sea $f=-1$, y $6=4g+1$, o sea $g=\frac{5}{4}$, entonces los primeros términos divididos entre p^3 dan $2p+8=ggp+2fg=\frac{25}{16}p-\frac{5}{2}$, de donde encontramos $p=-24$ y $q=-22$; por lo tanto obtenemos $\frac{x}{z}=\frac{pp-1}{2p}=-\frac{575}{48}$ o $x=-\frac{575}{48}z$, e $\frac{y}{z}=\frac{qq-1}{2q}=-\frac{483}{44}$ o $y=-\frac{483}{44}z$.

Ahora tomamos $z=16\cdot 3\cdot 11$, luego $x=575\cdot 11$ e $y=483\cdot 12$; por lo tanto, las raíces de los tres cuadrados buscados son las siguientes:

$$x = 6325 = 11 \cdot 23 \cdot 25, \quad y = 5796 = 12 \cdot 21 \cdot 23 \quad \text{y}$$
$$z = 528 = 3 \cdot 11 \cdot 16,$$

porque entonces

$$xx + yy = 23^2(275^2 + 252^2) = 23^2 \cdot 373^2$$
$$xx + zz = 11^2(575^2 + \ \ 48^2) = 11^2 \cdot 577^2$$
$$yy + zz = 12^2(483^2 + \ \ 44^2) = 12^2 \cdot 485^2.$$

II. Además hay una infinidad de maneras de hacer que nuestra expresión sea divisible entre un cuadrado; ponemos p. ej. $(q+1)^2 = 4(p+1)^2$ o $q+1 = 2(p+1)$, es decir, $q = 2p+1$ y $q-1 = 2p$, por lo cual nuestra expresión se convierte en

$$(2p+1)^2(p+1)^2(p-1)^2 + pp \cdot 4 \cdot (p+1)^2(4pp) = \square,$$

que dividida entre $(p+1)^2$ da

$$(2p+1)^2(p-1)^2 + 16p^4 = \square, \quad \text{o}$$
$$20p^4 - 4p^3 - 3pp + 2p + 1 = \square,$$

pero de la cual no se puede encontrar nada.

III. Por lo tanto ponemos $(q-1)^2 = 4(p+1)^2$, o $q-1 = 2(p+1)$, entonces $q = 2p+3$ y $q+1 = 2p+4$ o $q+1 = 2(p+2)$; por lo cual nuestra expresión dividida entre $(p+1)^2$ será:

$$(2p+3)^2(p-1)^2 + 16pp(p+2)^2,$$

eso es $9 - 6p + 53pp + 68p^3 + 20p^4$; su raíz sea $3 - p + gpp$, cuyo cuadrado es

$$9 - 6p + 6gpp + pp - 2gp^3 + ggp^4.$$

Aquí se toma $53 = 6g + 1$ o $g = \frac{26}{3}$ para hacer desaparecer los terceros términos, entonces los otros términos divididos entre p^3 dan $20p + 68 = ggp - 2g$

o $\frac{256}{3} = \frac{496}{9}p$, por lo tanto $p = \frac{48}{31}$ y $q = \frac{189}{31}$, de lo cual sale nuevamente una solución.

IV. Ponemos $q - 1 = \frac{4}{3}(p - 1)$, entonces

$$q = \frac{4}{3}p - \frac{1}{3} \quad \text{y} \quad q + 1 = \frac{4}{3}p + \frac{2}{3} = \frac{2}{3}(2p + 1),$$

por lo tanto, nuestra expresión dividida entre $(p-1)^2$ será

$$\frac{(4p-1)^2}{9}(p+1)^2 + \frac{64}{81}pp(2p+1)^2,$$

que multiplicada por 81 será

$$9(4p - 1)^2(p+1)^2 + 64pp(2p+1)^2 =$$
$$400p^4 + 472p^3 + 73pp - 54p + 9,$$

donde tanto el primer como el último término son cuadrados. Así que se pone la raíz $20pp - 9p + 3$, cuyo cuadrado es

$$400p^4 - 360p^3 + 201pp - 54p + 9$$

y por eso se obtiene $472p + 73 = -360p + 201$, por lo tanto

$$p = \frac{2}{13} \quad \text{y} \quad q = \frac{8}{39} - \frac{1}{3} = -\frac{5}{39}.$$

También se puede poner $20pp + 9p - 3$ para la raíz anterior, cuyo cuadrado es

$$400p^4 + 360p^3 - 120pp + 81pp - 54p + 9,$$

comparado con nuestra expresión da $472p + 73 = 360p - 39$, y de lo cual sale $p = -1$, pero el valor no sirve de nada.

V. También se puede hacer que nuestra expresión se pueda dividir incluso entre ambos cuadrados $(p+1)^2$

y $(p-1)^2$ al mismo tiempo. Para este fin se pone $q=\frac{pt+1}{p+t}$, entonces serán

$$q+1=\frac{pt+p+t+1}{p+t}=\frac{(p+1)(t+1)}{p+t}$$

y

$$q-1=\frac{pt-p-t+1}{p+t}=\frac{(p-1)(t-1)}{p+t},$$

por lo cual nuestra expresión dividida entre $(p+1)^2(p-1)^2$ es

$$=\frac{(pt+1)^2}{(p+t)^2}+pp\frac{(t+1)^2(t-1)^2}{(p+t)^4},$$

que, multiplicada por el cuadrado $(p+t)^4$, también tiene que ser un cuadrado, es decir,

$$(pt+1)^2(p+t)^2+pp(t+1)^2(t-1)^2 \quad \text{o}$$
$$\text{ttp}^4+2t(tt+1)p^3+2ttpp+(tt+1)^2pp+(tt-1)^2pp$$
$$+2t(tt+1)p+tt,$$

donde tanto el primer término como el último son cuadrados. Por eso ponemos la raíz $tpp+(tt+1)p-t$, cuyo cuadrado es

$$ttp^4+2t(tt+1)p^3-2ttpp+(tt+1)^2pp-2t(tt+1)p+tt,$$

comparado con nuestra expresión da:

$$2ttp+(tt+1)^2p+(tt-1)^2p+2t(tt+1)$$
$$=-2ttp+(tt+1)^2p-2t(tt+1),$$

o sea

$$4ttp+(tt-1)^2p+4t(tt+1)=0 \quad \text{o}$$
$$(tt+1)^2p+4t(tt+1)=0,$$

es decir, $tt+1=-\frac{4t}{p}$, de lo cual obtenemos $p=\frac{-4t}{tt+1}$; por lo cual serán $pt+1=\frac{-3tt+1}{tt+1}$ y $p+t=\frac{t^3-3t}{tt+1}$, en consecuencia $q = \frac{-3tt+1}{t^3-3t}$, donde t puede ser tomada arbitrariamente.

Sea p. ej. $t = 2$, entonces $p = -\frac{8}{5}$ y $q = -\frac{11}{2}$, de lo cual encontramos

$$\frac{x}{z} = \frac{pp-1}{2p} = -\frac{39}{80} \quad \text{e} \quad \frac{y}{z} = \frac{qq-1}{2q} = -\frac{117}{44}$$

o sea $x = \frac{3\cdot 13}{4\cdot 4\cdot 5}z$ e $\mathrm{y} = \frac{9\cdot 13}{4\cdot 11}z$. Ahora tomamos $z = 4\cdot 4\cdot 5\cdot 11$, entonces serán $x = 3\cdot 13\cdot 11$ e $y = 4\cdot 5\cdot 9\cdot 13$: por lo tanto las raíces de los tres cuadrados buscados son

$$x = 3\cdot 11\cdot 13 = 429,$$
$$y = 4\cdot 5\cdot 9\cdot 13 = 2340 \text{ y}$$
$$z = 4\cdot 4\cdot 5\cdot 11 = 880.$$

Las cuales son aún más pequeñas que las encontradas anteriormente.

Pero de estas resultan

$$xx + yy = 3^2 \cdot 13^2 (121 + 3600) = 3^2 \cdot 13^2 \cdot 61^2;$$
$$xx + zz = 11^2 \cdot (1521 + 6400) = 11^2 \cdot 89^2;$$
$$yy + zz = 20^2 \cdot (13689 + 1936) = 20^2 \cdot 125^2.$$

VI. Finalmente, observamos en esta pregunta que se puede encontrar fácilmente otra solución a partir de cualquier solución: porque si se han encontrado estos valores $x = a$, $y = b$ y $z = c$, de modo que $aa + bb = \square$, $aa + cc = \square$ y $bb + cc = \square$, entonces los siguientes valores también satisfarán las condiciones: $x = ab$, $y = bc$ y $z = ac$, porque tendremos

$$xx + yy = aabb + bbcc = bb(aa + cc) = \square$$
$$xx + zz = aabb + aacc = aa(bb + cc) = \square$$
$$yy + zz = aacc + bbcc = cc(aa + bb) = \square.$$

Como acabamos de encontrar

$$x = a = 3\cdot 11\cdot 13;$$
$$y = b = 4\cdot 5\cdot 9\cdot 13 \text{ y}$$
$$z = c = 4\cdot 4\cdot 5\cdot 11,$$

entonces de ello obtenemos, según la nueva solución:

$$x = ab = 3\cdot 4\cdot 5\cdot 9\cdot 11\cdot 13\cdot 13$$
$$y = bc = 4\cdot 4\cdot 4\cdot 5\cdot 5\cdot 9\cdot 11\cdot 13$$
$$z = ac = 3\cdot 4\cdot 4\cdot 5\cdot 11\cdot 11\cdot 13$$

Todas las tres soluciones se pueden dividir entre $3\cdot 4\cdot 5\cdot 11\cdot 13$ y, por lo tanto, se pueden reducir a la siguiente forma

$$x = 9\cdot 13,\quad y = 3\cdot 4\cdot 4\cdot 5 \quad \text{y} \quad z = 4\cdot 11,$$

es decir

$$x = 117,\quad y = 240 \quad \text{y} \quad z = 44,$$

las cuales son aún más pequeñas que las anteriores; así, ahora tenemos

$$xx + yy = 71289 = 267^2$$
$$xx + zz = 15625 = 125^2$$
$$yy + zz = 59536 = 244^2.$$

239.

XVIII. Pregunta. Se piden dos números x e y, tal que si se suma uno al cuadrado del otro, salga un cuadrado, de modo que estas dos expresiones $xx + y$ e $yy + x$ deben ser cuadrados.

Si se quisiera plantear inmediatamente $xx + y = pp$ para la primera y deducir $y = pp - xx$ de esto, la otra expresión sería $p^4 - 2ppxx + x^4 + x = \square$, cuya resolución no salta a la vista.

Pero planteamos para ambas expresiones a la vez

$$xx + y = (p - x)^2 = pp - 2px + xx \quad \text{e}$$
$$yy + x = (q - y)^2 = qq - 2qy + yy,$$

de donde obtenemos estas dos ecuaciones:

$$\text{I.)}\ y + 2px = pp \quad \text{y} \quad \text{II.)}\ x + 2qy = qq,$$

a partir de las cuales se pueden encontrar fácilmente x e y, obteniendo

$$x = \frac{2qpp - qq}{4pq - 1} \quad \text{e} \quad y = \frac{2pqq - pp}{4pq - 1};$$

donde se pueden tomar p y q arbitrariamente.

Por ejemplo, ponemos $p = 2$ y $q = 3$, entonces se obtienen estos dos números buscados $x = \frac{15}{23}$ e $y = \frac{32}{23}$, porque entonces serán

$$xx + y = \frac{225}{529} + \frac{32}{23} = \frac{961}{529} = \left(\frac{31}{23}\right)^2 \quad \text{e}$$

$$yy + x = \frac{1024}{529} + \frac{15}{23} = \frac{1369}{529} = \left(\frac{37}{23}\right)^2.$$

Además, tomamos $p = 1$ y $q = 3$, entonces serán $x = -\frac{3}{11}$ e $y = \frac{17}{11}$; pero como un número es negativo, no se quisiera aceptar esta solución.

Ponemos $p = 1$ y $q = \frac{3}{2}$, entonces $x = \frac{3}{20}$ e $y = \frac{7}{10}$, porque entonces serán

$$xx + y = \frac{9}{400} + \frac{7}{10} = \frac{289}{400} = \left(\frac{17}{20}\right)^2 \quad \text{e}$$

$$yy + x = \frac{49}{100} + \frac{3}{20} = \frac{64}{100} = \left(\frac{8}{10}\right)^2.$$

240.

XIX. Pregunta. Hay que encontrar dos números cuya suma sea un cuadrado, y cuyos cuadrados sumados sean un bicuadrado.

Los números buscados sean x e y, y como $xx + yy$ tiene que ser un bicuadrado, primero convertimos el mismo en un cuadrado, lo que sucede si $x = pp - qq$ e $y = 2pq$, porque entonces $xx + yy = (pp + qq)^2$. Para que esto se convierta en un bicuadrado, $pp + qq$ tiene que ser un cuadrado, por eso además se pone $p = rr - ss$ y $q = 2rs$, entonces será $pp + qq = (rr + ss)^2$; en consecuencia

$$xx + yy = (rr + ss)^4,$$

que por lo tanto es un bicuadrado. Pero entonces

$$x = r^4 - 6rrss + s^4 \quad \text{e} \quad y = 4r^3s - 4rs^3.$$

Entonces, lo que queda es que esta expresión

$$x + y = r^4 + 4r^3s - 6rrss - 4rs^3 + s^4$$

se convierta en un cuadrado; ponemos su raíz $rr + 2rs + ss$, por lo que nuestra expresión es igual a este cuadrado $r^4 + 4r^3s + 6rrss + 4rs^3 + s^4$, donde los dos primeros y últimos términos se cancelan entre sí, pero los demás divididos entre rss dan $6r + 4s = -6r - 4s$, o sea $12r + 8s = 0$; así $s = -\frac{12r}{8} = -\frac{3}{2}r$. O también se puede poner la raíz $rr - 2rs + ss$, para que desaparezcan los cuartos términos; como el cuadrado de ella es $r^4 - 4r^3s + 6rrss - 4rs^3 + s^4$, los términos restantes divididos entre rrs dan $4r - 6s = -4r + 6s$, o sea $8r = 12s$, por lo tanto $r = \frac{3}{2}s$; si ahora $r = 3$ y $s = 2$, entonces $x = -119$ sería negativo.

Pongamos además $r = \frac{3}{2}s + t$; para nuestra expresión ahora calculamos

$$rr = \frac{9}{4}ss + 3st + tt, \quad r^3 = \frac{27}{8}s^3 + \frac{27}{4}sst + \frac{9}{2}stt + t^3,$$

en consecuencia

$$\begin{aligned}
r^4 &= \tfrac{81}{16}s^4 + \tfrac{27}{2}s^3t + \tfrac{27}{2}sstt + 6st^3 + t^4 \\
+4r^3s &= \tfrac{27}{2}s^4 + 27s^3t + 18sstt + 4st^3 \\
-6rrss &= -\tfrac{27}{2}s^4 - 18s^3t - 6sstt \\
-4rs^3 &= -6s^4 - 4s^3t \\
+s^4 &= +s^4
\end{aligned}$$

así nuestra expresión es $\frac{1}{16}s^4 + \frac{37}{2}s^3t + \frac{51}{2}sstt + 10st^3 + t^4$,

la cual tiene que ser un cuadrado, y por lo tanto también si se multiplica por 16; entonces se obtiene esta expresión

$$s^4 + 296s^3t + 408sstt + 160st^3 + 16t^4;$$

su raíz sea $ss + 148st - 4tt$, cuyo cuadrado es

$$s^4 + 296s^3t + 21896sstt - 1184st^3 + 16t^4.$$

Aquí los dos primeros y últimos términos se cancelan entre sí, pero los demás, divididos entre stt, dan

$$21896s - 1184t = 408s + 160t$$

y entonces

$$\frac{s}{t} = \frac{1344}{21488} = \frac{336}{5372} = \frac{84}{1343}.$$

Por lo tanto, tómense $s = 84$ y $t = 1343$, en consecuencia r = 1469; y de estos números $r = 1469$ y $s = 84$ encontramos

$$x = r^4 - 6rrss + s^4 = 4565486027761 \quad \text{e}$$

$$y = 1061652293520.$$

CAPÍTULO 15

RESOLUCIÓN DE AQUELLAS PREGUNTAS QUE REQUIEREN CUBOS

241.

En el capítulo anterior se trataron preguntas en las que se tenían que convertir ciertas expresiones en cuadrados, y ahí tuvimos la oportunidad de explicar varias herramientas mediante los cuales se pueden poner en práctica las reglas dadas anteriormente. Ahora todavía falta considerar aquellas preguntas, donde ciertas expresiones se deben convertir en cubos; las reglas para esto ya se dieron en el capítulo anterior, pero ahora se aclararán más al resolver las siguientes preguntas.

242.

I. Pregunta. Se piden dos cubos x^3 e y^3 cuya suma también debería ser un cubo

Como x^3+y^3 debe convertirse en un cubo, entonces esta expresión dividida entre y^3 también tiene que ser un cubo, o sea $\frac{x^3}{y^3}+1=\text{cubo}$. Ponemos $\frac{x}{y}=z-1$, entonces obtenemos $z^3-3zz+3z$, que debe ser un cubo; si, según las reglas anteriores, se quisiera poner la raíz cúbica $z-u$, cuyo cubo es $z^3-3uzz+3uuz-u^3$, y determinar u de tal manera que los segundos términos también desaparezcan, entonces sería $u=1$; pero los términos restantes darían

$$3z=3uuz-u^3=3z-1,$$

de lo cual resulta que z es igual al infinito, valor que no nos ayuda. Pero si dejamos u indeterminada, obtenemos esta ecuación:

$$-3zz+3z=-3uzz+3uuz-u^3;$$

de esta ecuación cuadrática determinamos el valor de z; obtenemos ahora $3uzz - 3zz = 3uuz - 3z - u^3$, es decir, $3(u-1)zz = 3(uu-1)z - u^3$, o sea $zz = (u+1)z - \frac{u^3}{3(u-1)}$, de la cual se encuentra

$$z = \frac{u+1}{2} \pm \sqrt{\frac{uu+2u+1}{4} - \frac{u^3}{3(u-1)}}$$

o

$$z = \frac{u+1}{2} \pm \sqrt{\frac{-u^3+3uu-3u-3}{12(u-1)}}.$$

Entonces, se trata de convertir esta fracción en un cuadrado, por lo que multiplicamos la fracción arriba y abajo por $3(u-1)$ para que haya un cuadrado abajo, es decir, $\frac{-3u^4+12u^3-18uu+9}{36(u-1)^2}$, cuyo numerador todavía tiene que ser convertido en un cuadrado. De hecho, el último término del mismo ya es un cuadrado, pero si, según la regla, ponemos la raíz $guu + fu + 3$, cuyo cuadrado es

$$ggu^4 + 2fgu^3 + 6guu + ffuu + 2fu + 9$$

y hacemos desaparecer los tres últimos términos, entonces primero será $0 = 2f$, o sea $f = 0$, y luego $6g + ff = -18$, y por eso $g = -3$; por lo tanto los dos primeros términos divididos entre u^3 dan $-3u + 12 = ggu + 2fg = 9u$; y luego $u = 1$, valor que no nos lleva a ninguna parte. Si queremos poner además $u = 1 + t$, nuestra expresión se convierte en $-12t - 3t^4$, que debería ser un cuadrado, lo que no puede suceder a menos que t sea negativo. Por lo tanto sea $t = -s$, así nuestra expresión se convierte en $12s - 3s^4$, que en el caso $s = 1$ se convierte en un cuadrado, pero luego serían $t = -1$ y $u = 0$, de lo cual no se puede encontrar nada. No importa cómo se ataque el asunto, nunca se encontrará un valor que nos lleve a nuestro fin; de ello se puede concluir con bastante seguridad que no es posible encontrar dos cubos, cuya suma sea un cubo; pero esto también se puede demostrar de la siguiente forma.

243.

Teorema. No es posible encontrar dos cubos cuya suma o diferencia sea un cubo.

Lo principal a tener en cuenta aquí es que si la suma es imposible, la diferencia también tiene que ser imposible. Porque si es imposible que $x^3+y^3=z^3$, entonces también es imposible que $z^3-y^3=x^3$, pero ahora z^3-y^3 es la diferencia de dos cubos. Por lo tanto, basta con demostrar la imposibilidad solo de la suma, o también sólo de la diferencia, porque de cada una de ellas resulta la otra. Pero la demostración en sí consistirá en los siguientes pasos.

I. Se puede suponer que los números x e y son primos entre sí. Porque si tuvieran un divisor común, se podrían dividir los cubos entre el cubo del mismo. Si p. ej. fueran $x=2a$ e $y=2b$, entonces sería $x^3+y^3=8a^3+8b^3$, y si esto fuera un cubo, entonces a^3+b^3 también tendría que ser un cubo.

II. Como x e y no tienen divisor común, estos dos números son o ambos impares o uno es par y el otro es impar. En el primer caso, z tendría ser par; en el otro caso, sin embargo, z tendría que ser impar. Entonces, de los tres números x, y y z, siempre dos son impares y uno es par. Por lo tanto, tomaremos los dos números impares para nuestra demostración, porque no importa si demostramos la imposibilidad de la suma o la diferencia, porque la suma se convierte en la diferencia si una raíz se vuelve negativa.

III. Por lo tanto, sean x e y dos números impares, así tanto su suma como su diferencia serán pares. Por eso ponemos $\frac{x+y}{2}=p$ y $\frac{x-y}{2}=q$, entonces $x=p+q$ e $y=p-q$, de lo cual es evidente que de los dos números p y q uno tiene que ser par, el otro tiene que ser impar. Entonces ahora tenemos

$$x^3 + y^3 = 2p^3 + 6pqq = 2p(pp + 3qq);$$

por lo tanto se tiene que demostrar que el producto $2p(pp+3qq)$ no puede ser un cubo. Pero si el asunto se demostrara para la diferencia, entonces sería $x^3 - y^3 = 6ppq + 2q^3 = 2q(qq+3pp)$, expresión que es bastante similar a la anterior, en que solo las letras p y q están intercambiadas. Por lo tanto, es suficiente demostrar la imposibilidad de esta expresión $2p(pp+3qq)$, porque de ello resulta necesariamente que ni la suma ni la diferencia de dos cubos pueden convertirse en un cubo.

IV. Si $2p(pp+3qq)$ fuera un cubo, sería par y entonces divisible entre 8: por tanto, la octava parte de nuestra expresión también tendría que ser un número entero y además un cubo, es decir, $\frac{1}{4}p(pp+3qq)$. Dado que uno de los números p y q es par, pero el otro es impar, $pp+3qq$ será un número impar y no se puede dividir entre 4, de lo cual se deduce que p tiene que ser divisible entre 4 y, por lo tanto, $\frac{p}{4}$ será un número entero.

V. Si este producto $\frac{p}{4}\cdot(pp+3qq)$ fuera un cubo, entonces cada factor por separado, es decir, $\frac{p}{4}$ y $pp+3qq$, tendría que ser un cubo, siempre y cuando no tengan un divisor común. Porque si un producto de dos factores que son primos entre sí debe ser un cubo, cada uno tiene que ser necesariamente un cubo; pero si tienen un factor común, este tiene que considerarse por separado. Entonces, aquí la pregunta es si estos dos factores p y $pp+3qq$ no podrían tener un factor común; lo cual se investigará de la siguiente manera. Si tuvieran un divisor común, entonces estos pp y $pp+3qq$ también tendrían el mismo divisor común y, por lo tanto, su diferencia, que es $3qq$, tendría el mismo divisor común con pp; dado que p y q son primos entre sí, los números pp y $3qq$ no pueden tener ningún otro divisor común que 3, lo que sucede si p se puede dividir entre 3.

VI. Por eso tenemos que considerar dos casos: el primero es cuando los factores p y $pp+3qq$ no tienen un divisor común, lo que siempre ocurre cuando p no se puede dividir entre 3; el otro caso es cuando tienen un divisor común, lo que sucede cuando p se puede dividir entre 3, y entonces ambos serán divisibles entre 3. Estos dos casos tienen que distinguirse cuidadosamente entre sí, porque la demostración tiene que darse para cada caso por separado.

VII. Primer caso. Suponemos que p no sea divisible entre 3 y, por lo tanto, nuestros dos factores $\frac{p}{4}$ y $pp+3qq$ sean primos entre sí, por lo que cada uno de ellos tendría que ser un cubo por sí mismo. Así que hagamos de $pp+3qq$ un cubo, lo que sucede si se pone como se ha indicado arriba:

$p+q\sqrt{-3}=(t+u\sqrt{-3})^3$ y $p-q\sqrt{-3}=(t-u\sqrt{-3})^3$.

Para que entonces sea $pp+3qq=(tt+3uu)^3$ y por lo tanto un cubo; pero entonces será

$$p=t^3-9tuu=t(tt-9uu) \quad \text{y}$$
$$q=3ttu-3u^3=3u(tt-uu);$$

como ahora q es un número impar, entonces u tiene que ser impar también, pero t tiene que ser par, porque de lo contrario $tt-uu$ sería un número par.

VIII. Dado que se ha convertido $pp+3qq$ en un cubo y se ha encontrado

$$p=t(tt-9uu)=t(t+3u)(t-3u),$$

entonces ahora $\frac{p}{4}$, y por lo tanto también $2p$, tendrían que ser cubos; por eso, esta expresión $2t(t+3u)(t-3u)$ tendría que ser un cubo. Cabe señalar aquí que t es en primer lugar un número par y no divisible entre 3, porque de lo contrario p también sería divisible entre 3, caso que aquí se excluye expresamente; entonces, estos tres factores $2t$, $t+3u$ y $t-3u$ son primos entre sí y, por lo tanto, cada uno tendría que ser un cubo en sí mismo. Por eso, ponemos $t+3u=f^3$ y $t-3u=g^3$, de modo que $2t=f^3+g^3$. Pero ahora $2t$ también es un cubo, y en consecuencia tendríamos dos cubos f^3 y g^3 cuya suma volvería a ser un cubo, los cuales obviamente serían mucho más pequeños que los cubos x^3 e y^3 planteados al principio. Porque después de haber puesto $x=p+q$ e $y=p-q$, ahora hemos determinado p y q por las letras t y u, los números p y q tienen que ser mucho mayores que t y u.

IX. Entonces, si hubiera dos de esos cubos en los números más grandes, también se podrían indicar cubos en números mucho más pequeños cuya suma también sería un cubo, y de esta manera siempre se podrían obtener cubos más pequeños del mismo tipo. Dado que ciertamente no existen tales cubos en números pequeños, tampoco son posibles en los más grandes. Esta conclusión es confirmada por el hecho de que el otro caso también conduce a lo mismo, como veremos a continuación.

X. Segundo caso. Sea p divisible entre 3, pero q no, y ponemos $p=3r$, entonces nuestra expresión se convierte en

$$\frac{3r}{4}\cdot(9rr+3qq), \quad \text{o} \quad \frac{9}{4}r(3rr+qq),$$

donde ambos factores son primos entre sí, porque $3rr+qq$ no se puede dividir ni entre 2 ni entre 3, y r tiene que ser par al igual que p, por lo tanto cada uno de estos dos factores tiene que ser un cubo en sí mismo.

XI. Si ahora convertimos el segundo $3rr+qq$, o $qq+3rr$, en un cubo, encontramos, como arriba, $q=t(tt-9uu)$ y $r=3u(tt-uu)$; donde hay que tener en cuenta que, debido a que q era impar, t también aquí tiene que ser impar, pero u tiene que ser un número par.

XII. Porque ahora $\frac{9r}{4}$ también tiene que ser un cubo, y por lo tanto también si se multiplica por el cubo $\frac{8}{27}$, entonces $\frac{2r}{3}$, es decir $2u(tt-uu)=2u(t+u)(t-u)$, tiene que ser un cubo. Los tres factores son primos entre sí y por lo tanto cada uno tendría que ser un cubo en sí mismo; pero si se ponen $t+u=f^3$ y $t-u=g^3$, entonces eso implica que $2u=f^3-g^3$, que también tendría que ser un cubo, ya que $2u$ es un cubo. De modo que se tendrían dos cubos f^3 y g^3 mucho más pequeños cuya diferencia sería un cubo, y en consecuencia también se tendrán tales cuya suma sería un cubo; porque solo se necesita poner $f^3-g^3=h^3$, luego $f^3=h^3+g^3$, por lo que se tendrían dos cubos cuya suma sería un cubo. Esto confirma completamente la conclusión anterior de que incluso en los números más grandes no existen tales cubos, cuya suma o diferencia sea un cubo, y esto se debe a que no se puede encontrar lo mismo en los números más pequeños.

244.

Debido a que ahora no es posible encontrar dos cubos cuya suma o diferencia sea un cubo, también nuestra primera pregunta es obsoleta, y se suele comenzar con la pregunta cómo se encuentran tres cubos cuya suma dé un cubo; pero se pueden tomar dos de ellos arbitrariamente, de modo que solo se debe encontrar el tercero; ahora trataremos esta pregunta.

245.

II. Pregunta. Para dos cubos dados a^3 y b^3 se pide un tercer cubo x^3 que junto con ellos forme nuevamente un cubo.

Entonces, esta expresión $a^3+b^3+x^3$ se debe convertir en un cubo; dado que eso no puede suceder a menos que ya se conozca un caso, pero uno de tales casos salta a la vista, es decir, $x=-a$, entonces ponemos $x=y-a$, obteniendo $x^3=y^3-3ayy+3aay-a^3$, y por eso nuestra expresión, que debe convertirse en un cubo, será $y^3-3ayy+3aay+b^3$, cuyo primer y último término ya son cubos; por lo tanto se pueden encontrar dos resoluciones inmediatamente.

I. Según la primera, ponemos la raíz $y+b$, cuyo cubo es $y^3+3byy+3bby+b^3$; del cual obtenemos $-3ay+3aa=3by+3bb$, luego $y=\frac{aa-bb}{a+b}=a-b$; en consecuencia $x=-b$, que no nos sirve para nada.

II. Pero también se puede poner la raíz $b+fy$, cuyo cubo es $f^3y^3+3bffyy+3bbfy+b^3$; y determinamos f tal que los terceros términos también desaparezcan, lo que sucede si $3aa=3bbf$, o sea $f=\frac{aa}{bb}$, porque entonces los dos primeros términos divididos entre yy dan

$$y-3a=f^3y+3bff=\frac{a^6y}{b^6}+\frac{3a^4}{b^3},$$

que multiplicado por b^6 da

$$b^6y-3ab^6=a^6y+3a^4b^3;$$

de lo cual encontramos

$$y=\frac{3a^4b^3+3ab^6}{b^6-a^6}=\frac{3ab^3(a^3+b^3)}{b^6-a^6}=\frac{3ab^3}{b^3-a^3},$$

y así

$$x=y-a=\frac{2ab^3+a^4}{b^3-a^3}=a\cdot\frac{2b^3+a^3}{b^3-a^3}.$$

Si están dados los dos cubos a^3 y b^3, hemos encontrado la raíz del buscado tercer cubo, y para que sea positiva, solo necesitamos poner b^3 para el cubo más grande, lo cual queremos explicar mediante algunos ejemplos.

I. Sean los dos cubos dados 1 y 8, de modo que $a = 1$ y $b = 2$, entonces esta expresión $9 + x^3$ se convierte en un cubo si $x = \frac{17}{7}$; porque entonces será $9 + x^3 = \frac{8000}{343} = \left(\frac{20}{7}\right)^3$.

II. Sean los dos cubos dados 8 y 27, de modo que $a = 2$ y $b = 3$, entonces esta expresión $35 + x^3$ se convierte en un cubo si $x = \frac{124}{19}$.

III. Sean los dos cubos dados 27 y 64, de modo que $a = 3$ y $b = 4$, entonces esta expresión $91 + x^3$ se convierte en un cubo si $x = \frac{465}{37}$.

Si se quisieran encontrar más de esos terceros términos para dos cubos dados, entonces en la primera expresión $a^3 + b^3 + x^3$ se tendría que poner $x = \frac{2ab^3 + a^4}{b^3 - a^3} + z$, ya que luego se llegaría a una fórmula similar , mediante la cual se podrían determinar nuevos valores para z, pero lo cual conduciría a cálculos demasiado extensos.

246.

Pero en esta pregunta ocurre un caso curioso; si los dos cubos dados son iguales entre sí, o sea $b = a$; entonces obtenemos $x = \frac{3a^4}{0}$, que es infinito, por lo cual no llegamos a una solución. Por eso, la cuestión de convertir $2a^3 + x^3$ en un cubo aún no se ha resuelto. Sea p. ej. $a = 1$ y por lo tanto nuestra expresión será $2 + x^3$, entonces hay que notar que, sin importar los cambios que se hagan, cualquier esfuerzo será en vano, y nunca se podrá encontrar un valor adecuado para x. Entoces, se puede deducir con bastante seguridad que para un cubo doble no se puede encontrar ningún cubo que junto con aquel forme un cubo, es decir, que esta ecuación $2a^3+x^3=y^3$ es imposible; pero de ella surge esta $2a^3=y^3-x^3$, y por lo tanto tampoco es posible encontrar dos cubos cuya diferencia sea un cubo doble, lo cual también es cierto para la suma de dos cubos y se puede demostrar de la siguiente manera.

247.

Teorema. Ni la suma ni la diferencia de dos cubos nunca pueden ser iguales a un cubo doble, es decir, esta ecuación $x^3 \pm y^3 = 2z^3$ es imposible en sí misma, excepto en el caso en que $y=x$, el cual es evidente.

Aquí nuevamente se puede suponer que x e y son primos entre sí, porque si tuvieran un divisor común, entonces z también tendría que ser divisible entre él y, por lo tanto, toda la ecuación podría dividirse entre su cubo. Dado que $x^3 \pm y^3$ ahora debe ser un número par, x e y ambos tienen que ser impares, por lo que tanto su suma como su diferencia serán pares. Por lo tanto ponemos $\frac{x+y}{2}=p$ y $\frac{x-y}{2}=q$, entonces $x=p+q$ e $y=p-q$; por lo tanto, uno de los números p y q tiene que ser par, pero el otro tiene que ser impar. Y de esto resultan

$$x^3+y^3=2p^3+6pqq=2p(pp+3qq) \quad \text{y}$$
$$x^3-y^3=6ppq+2q^3=2q(3pp+qq),$$

que son dos fórmulas completamente similares. Por eso es suficiente demostrar que esta expresión $2p(pp+3qq)$ no puede ser un cubo doble, y que por ende esta $p(pp+3qq)$ no puede ser un cubo, cuya demostración está contenida en los siguientes puntos.

I. Aquí nuevamente hay que considerar dos casos, el primero de los cuales es cuando los dos factores p y $pp+3qq$ no tienen divisor común, entonces cada uno tiene que ser un cubo por separado; pero el otro caso es cuando tienen un divisor común que, como hemos visto anteriormente, no puede ser otro que 3.

II. Primer caso. Así pues, p no sea divisible entre 3, por lo que los dos factores son primos entre sí; entonces, primero convertimos $pp+3qq$ en un cubo, lo que sucede si $p=t(tt-9uu)$ y $q=3u(tt-uu)$, de modo que el valor de p aún tendría que ser un cubo. Como t no es divisible entre 3, porque de lo contrario p también sería divisible entre 3, estos dos factores t y $tt-9uu$ son primos entre sí y, en consecuencia, cada uno tiene que ser un cubo por separado.

III. Este último, sin embargo, tiene dos factores, es decir, $t+3u$ y $t-3u$, que son primos entre sí, primero porque t no se puede dividir entre 3, pero luego porque de los números t y u, uno es par y el otro es impar. Porque si ambos fueran impares, entonces no solo p sino también q se volverían impares [pares], lo que no puede ser, por lo tanto, cada uno de estos factores $t+3u$ y $t-3u$ tiene que ser un cubo por separado.

IV. Por lo tanto, ponemos $t+3u=f^3$ y $t-3u=g^3$, luego $2t=f^3+g^3$. Pero ahora t es en sí mismo un cubo que sea $=h^3$, de modo que sería $f^3+g^3=2h^3$, es decir, tendríamos dos cubos mucho más pequeños, f^3 y g^3, cuya suma también sería un cubo doble.

V. Segundo caso. Ahora sea p divisible entre 3 y, por lo tanto q no. Entonces ponemos $p=3r$, así nuestra expresión se convierte en

$$3r(9rr+3qq)=9r(3rr+qq),$$

cuyos factores son ahora primos entre sí y por eso cada uno tiene que ser un cubo.

VI. Para convertir el último $qq+3rr$ en un cubo, ponemos $q=t(tt-9uu)$ y $r=3u(tt-uu)$, entonces de nuevo uno de los números t y u uno tiene que ser par, pero el otro tiene que ser impar, porque de lo contrario los dos números q y r serían pares. De esto obtenemos ahora el primer factor $9r = 27u(tt - uu)$, que tendría que ser un cubo y, en consecuencia, también dividido entre 27, es decir, $u(tt - uu)$, que es $u(t + u)(t - u)$.

VII. Como estos tres factores son primos entre sí, cada uno tiene que ser un cubo por separado. En consecuencia, si se pone $t + u = f^3$ y $t - u = g^3$ para los dos últimos, se obtiene $2u = f^3 - g^3$; como u ahora también tiene que ser un cubo, obtenemos dos cubos f^3 y g^3 en números mucho más pequeños, cuya diferencia sería un cubo doble también.

VIII. Como no existen tales cubos en números pequeños cuya suma o diferencia sería un cubo doble, está claro que tampoco existen en los números más grandes.

IX. Se podría objetar que como existe tal caso en números más pequeños, es decir, si $f = g$, la conclusión anterior podría ser engañosa. Sin embargo, si $f = g$, entonces en el primer caso se tendría $t + 3u = t - 3u$ y luego $u = 0$, en consecuencia sería también $q = 0$ y como habíamos puesto $x = p + q$ e $y = p - q$, entonces los dos primeros cubos x^3 e y^3 habrían sido iguales entre sí, caso que se excluyó expresamente. Del mismo modo en el otro caso, si $f = g$, entonces tendrían que ser $t + u = t - u$ y luego de nuevo $u = 0$, por eso también $r = 0$ y, en consecuencia, $p = 0$, entonces de nuevo los dos primeros cubos x^3 e y^3 serían iguales entre sí, caso que no se considera en absoluto.

248.

III. Pregunta. Se piden de manera general tres cubos x^3, y^3 y z^3 cuya suma dé también un cubo.

Ya hemos visto que se puede suponer que dos de estos cubos son conocidos y el tercero siempre se puede determinar basándose en ellos, siempre y cuando los dos primeros no sean iguales entre sí; sin embargo, utilizando el método anterior, se encontrará solo un valor para el tercer cubo en cada caso y sería muy difícil encontrar varios más de él.

Así que aquí consideramos que los tres cubos sean desconocidos; y para dar una resolución general ponemos $x^3+y^3+z^3=v^3$, y llevamos uno de los primeros cubos al otro lado para obtener $x^3+y^3=v^3-z^3$; ecuación que se puede satisfacer de la siguiente manera.

I. Ponemos $x=p+q$ e $y=p-q$, entonces, como hemos visto, $x^3+y^3=2p(pp+3qq)$; además, ponemos $v=r+s$ y $z=r-s$, entonces $v^3-z^3=2s(ss+3rr)$; por lo tanto tiene que ser

$$2p(pp+3qq)=2s(ss+3rr),$$

o sea

$$p(pp+3qq)=s(ss+3rr).$$

II. Hemos visto anteriormente que un número como $pp+3qq$ no tiene otros divisores que los contenidos en esta misma forma. Dado que estas dos expresiones $pp+3qq$ y $ss+3rr$ tienen que tener necesariamente un divisor común, el cual entonces sea $=tt+3uu$.

III. Para este fin ponemos

$$pp+3qq=(ff+3gg)(tt+3uu) \quad \text{y}$$
$$ss+3rr=(hh+3kk)(tt+3uu),$$

entonces será $p=ft+3gu$ y $q=gt-fu$; en consecuencia

$$pp=fftt+6fgtu+9gguu \quad \text{y}$$
$$qq=ggtt-2fgtu+ffuu;$$

de ello

$$pp+3qq=(ff+3gg)tt+(3ff+9gg)uu,$$

esto es

$$pp+3qq=(ff+3gg)(tt+3uu).$$

IV. De la misma manera obtenemos de la otra expresión:

$$s=ht+3ku \quad \text{y} \quad r=kt-hu,$$

de lo cual surge la siguiente ecuación

$$(ft+3gu)(ff+3gg)(tt+3uu)=$$
$$(ht+3ku)(hh+3kk)(tt+3uu),$$

que dividida entre $tt+3uu$ da

$$ft(ff+3gg)+3gu(ff+3gg)=$$
$$ht(hh+3kk)+3ku(hh+3kk),$$

o sea

$$ft(ff+3gg)-ht(hh+3kk)=$$
$$3ku(hh+3kk)-3gu(ff+3gg),$$

de lo cual tenemos

$$t=\frac{3k(hh+3kk)-3g(ff+3gg)}{f(ff+3gg)-h(hh+3kk)}u.$$

V. Para obtener números enteros se toma

$$u=f(ff+3gg)-h(hh+3kk),$$

entonces

$$t=3k(hh+3kk)-3g(ff+3gg),$$

donde las cuatro letras f, g, h y k pueden ser tomadas arbitrariamente.

VI. Si ahora se han encontrado los valores de t y u por medio de estos cuatro números, se obtienen

I.) $p=ft+3gu,$ II.) $q=gt-fu,$

III.) $s=ht+3ku,$ IV.) $r=kt-hu,$

y esto finalmente da la solución a nuestra pregunta,

$$x=p+q, \quad y=p-q, \quad z=r-s \quad \text{y} \quad v=r+s.$$

Esta solución es tan general que contiene todos los casos posibles, porque en ninguno de los cálculos se ha hecho una restricción arbitraria.

La clave consiste en hacer que nuestra ecuación sea divisible entre $tt+3uu$, lo que permite que las letras t y u se determinen mediante una ecuación sencilla. La aplicación de estas fórmulas se puede realizar de infinitas formas, de las que daremos algunos ejemplos.

I. Sean $k=0$ y $h=1$, entonces

$$t=-3g(ff+3gg) \quad \text{y} \quad u=f(ff+3gg)-1;$$

así $p=-3fg(ff+3gg)+3fg(ff+3gg)-3g=-3g$, $q=-(ff+3gg)^2+f$, además, $s=-3g(ff+3gg)$ y $r=-f(ff+3gg)+1$, de lo cual finalmente obtenemos

$$x=-3g-(ff+3gg)^2+f,$$
$$y=-3g+(ff+3gg)^2-f,$$
$$z=(3g-f)(ff+3gg)+1 \quad \text{y por fin}$$
$$v=-(3g+f)(ff+3gg)+1.$$

Ahora pongamos $f=-1$ y $g=+1$, así obtenemos

$$x=-20, \quad y=14, \quad z=17 \quad \text{y} \quad v=-7;$$

por eso tenemos esta ecuación:

$$-20^3+14^3+17^3=-7^3 \quad \text{o} \quad 14^3+17^3+7^3=20^3.$$

II. Sean $f=2$, $g=1$ y así $ff+3gg=7$; además $h=0$ y $k=1$, por lo tanto $hh+3kk=3$, entonces serán $t=-12$ y $u=14$; de esto resultan

$$p=2t+3u=18, \quad q=t-2u=-40, \quad r=t=-12 \quad \text{y}$$
$$s=3u=42;$$

por eso obtenemos

$$x = p + q = -22, \quad y = p - q = 58, \quad z = r - s = -54 \quad \text{y}$$
$$v = r + s = 30;$$

de modo que

$$-22^3 + 58^3 - 54^3 = 30^3 \quad \text{o} \quad 58^3 = 30^3 + 54^3 + 22^3.$$

Dado que ahora todas las raíces se pueden dividir entre 2, también será

$$29^3 = 15^3 + 27^3 + 11^3.$$

III. Sean $f = 3$, $g = 1$, $h = 1$ y $k = 1$, por lo tanto $ff + 3gg = 12$ y $hh + 3kk = 4$, luego $t = -24$ y $u = 32$, los cuales se pueden dividir entre 8; y dado que solo importa su razón, ponemos $t = -3$ y $u = 4$. De esto obtenemos

$$p = 3t + 3u = +3, \quad q = t - 3u = -15, \quad r = t - u = -7 \quad \text{y}$$
$$s = t + 3u = +9;$$

entonces $x = -12$, $y = 18$, $z = -16$ y $v = 2$; de modo que

$$-12^3 + 18^3 - 16^3 = 2^3 \quad \text{o} \quad 18^3 = 16^3 + 12^3 + 2^3,$$

o, simplificado con 2, también

$$9^3 = 8^3 + 6^3 + 1^3.$$

IV. Pongamos $g = 0$ y $k = h$, de modo que f y h no se determinan. Entonces ahora $ff + 3gg = ff$ y $hh + 3kk = 4hh$; así que obtenemos $t = 12h^3$ y $u = f^3 - 4h^3$; por eso, además, $p = ft = 12fh^3$, $q = -f^4 + 4fh^3$, $\mathrm{r} = 12h^4 - hf^3 + 4h^4 = 16h^4 - hf^3$ y $s = 3hf^3$, de esto finalmente

$$x = p + q = 16fh^3 - f^4, \qquad y = p - q = 8fh^3 + f^4,$$
$$z = r - s = 16h^4 - 4hf^3, \quad \text{y} \quad v = r + s = 16h^4 + 2hf^3.$$

Si ahora tomamos $f = h = 1$, obtenemos $x = 15$, $y = 9$, $z = 12$ y $v = 18$, que, simplificados con 3, dan $x = 5$, $y = 3$, $z = 4$ y $v = 6$, de modo que

$$3^3+4^3+5^3=6^3.$$

Aquí es notable que estas tres raíces 3, 4, 5 aumentan en uno, por lo que queremos investigar si hay más de este tipo.

249.

IV. Pregunta. Se piden tres números en una progresión aritmética, cuya diferencia $=1$, de modo que la suma de los cubos de estos números dé otra vez un cubo.

Sea x el número de en medio, el más pequeño será $=x-1$ y el más grande $=x+1$; la suma de sus cubos ahora da

$$3x^3+6x=3x(xx+2),$$

que debe ser un cubo. Para esto, ahora es necesario que se conozca un caso donde esto sucede, y después de un poco de tanteo se encuentra $x=4$, por lo que ponemos $x=4+y$ según las reglas dadas anteriormente, entonces tenemos

$$xx=16+8y+yy \quad \text{y} \quad x^3=64+48y+12yy+y^3,$$

por lo que nuestra expresión se convierte en

$$216+150y+36yy+3y^3,$$

donde el primer término es un cubo, pero el último no. Por eso ponemos la raíz $6+fy$ y hacemos desaparecer los dos primeros términos. Ya que su cubo es

$$216+108fy+18ffyy+f^3y^3,$$

entonces tiene que ser $150=108f$, luego $f=\frac{25}{18}$. Pero los términos restantes divididos entre yy dan

$$36+3y=18ff+f^3y=\frac{25^2}{18}+\frac{25^3}{18^3}y, \quad \text{o}$$

$$18^3\cdot 36+18^3\cdot 3y=18^2\cdot 25^2+25^3y, \quad \text{o}$$

$$18^3\cdot 36-18^2\cdot 25^2=25^3y-18^3\cdot 3y,$$

por eso

$$y = \frac{18^3 \cdot 36 - 18^2 \cdot 25^2}{25^3 - 3 \cdot 18^3} = \frac{18^2(18 \cdot 36 - 25^2)}{25^3 - 3 \cdot 18^3},$$

y por lo tanto

$$y = -\frac{324 \cdot 23}{1871} = -\frac{7452}{1871}; \quad \text{luego} \quad x = \frac{32}{1871}.$$

Dado que podría parecer difícil seguir con esta reducción a un cubo, debe tenerse en cuenta que la pregunta siempre se puede reducir a cuadrados. Porque como $3x(xx+2)$ debe ser un cubo, lo ponemos $= x^3y^3$, entonces se obtiene $3xx + 6 = xxy^3$ y así $xx = \frac{6}{y^3 - 3} = \frac{36}{6y^3 - 18}$. Como ahora el numerador de esta fracción ya es un cuadrado, solo es necesario convertir el denominador $6y^3 - 18$ en un cuadrado; para lo cual, a su vez, es necesario adivinar un caso. Pero como 18 se puede dividir entre 9, pero 6 solo entre 3, entonces y también tiene que poder dividirse entre 3. Por eso ponemos $y = 3z$, por lo que nuestro denominador será $= 162z^3 - 18$ que dividido entre 9, es decir, $18z^3 - 2$, todavía tiene que ser un cuadrado. Esto ahora sucede obviamente si $z = 1$; por lo tanto se plantea $z = 1 + v$, entonces tiene que ser $16 + 54v + 54vv + 18v^3 = \square$. Su raíz sea $4 + \frac{27}{4}v$, cuyo cuadrado es $16 + 54v + \frac{729}{16}vv$, y entonces $54 + 18v = \frac{729}{16}$; o sea $18v = -\frac{135}{16}$, por lo tanto $2v = -\frac{15}{16}$, y $v = -\frac{15}{32}$, de esto obtenemos $z = 1 + v = \frac{17}{32}$, además $y = \frac{51}{32}$.

Ahora veamos el denominador de arriba, que era

$$6y^3 - 18 = 162z^3 - 18 = 9(18z^3 - 2).$$

Pero de este factor $18z^3 - 2$ tenemos la raíz cuadrada $4 + \frac{27}{4}v = \frac{107}{128}$, así que la raíz cuadrada del denominador completo es $\frac{321}{128}$; pero la del numerador es $= 6$, por lo cual

$x = \frac{6}{\frac{321}{128}} = \frac{256}{107}$, que es un valor completamente diferente al encontrado antes. Así que las raíces de nuestros tres cubos son las siguientes:

$$\text{I.)}\ x-1=\frac{149}{107};\qquad \text{II.)}\ x=\frac{256}{107};\qquad \text{III.)}\ x+1=\frac{363}{107},$$

cuyos cubos sumados dan un cubo, cuya raíz será $xy = \frac{256}{107}\cdot\frac{51}{32} = \frac{408}{107}$.

250.

Aquí queremos cerrar esta sección de la analítica indefinida, porque con las preguntas planteadas hemos encontrado suficiente oportunidad para explicar las herramientas más importantes que se han utilizado hasta ahora en esta ciencia.

FIN DE LA SEGUNDA PARTE