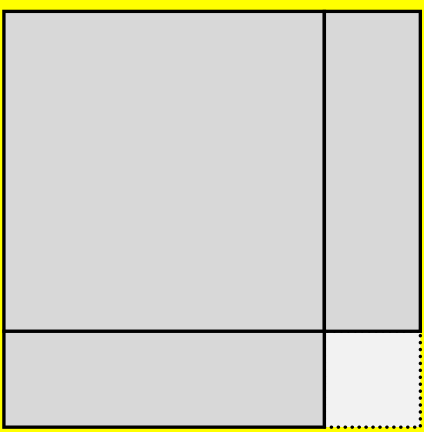
Ecuaciones cuadráticas

en forma gráfica y algebraica

Alexander Roux

3ª edición, revisada y ampliada



Ecuaciones cuadráticas

Ecuaciones cuadráticas

en forma

gráfica y algebraica

Alexander Roux

3ª edición, revisada y ampliada

Edición de autor mediante
Kindle Direct Publishing
Amazon Media EU S.à r.l., 38 avenue John F. Kennedy, L-1855 Luxemburg

Prefacio

El objetivo principal de este pequeño texto es familiarizar al lector con la resolución de ecuaciones cuadráticas.

El lector sólo necesita pocos conocimientos previos. Para el entendimiento de la resolución gráfica es suficiente saber calcular el área de rectángulos y cuadrados, y poder manejar ecuaciones sencillas. La resolución algebraica requiere, además, conocimientos básicos de expresiones algebraicas.

Leyendo el presente libro, el lector emprenderá un viaje en el tiempo que iniciará alrededor del año 2000 a. C. en Mesopotamia con gráficas y terminará en el siglo XVI con el planteamiento de la fórmula general de Vieta.

Al resolver ecuaciones cuadráticas se tienen que sacar raíces cuadradas. Consideramos el método de Herón para calcular raíces. Ya que pueden surgir raíces de números negativos, se da una breve introducción a los números complejos en el apéndice 2.

En las escuelas occidentales existe una tendencia creciente de encubrir las ideas básicas de las matemáticas mediante una gran cantidad de ejemplos supuestamente prácticos o cotidianos.

El presente texto pretende contribuir a que las ideas fundamentales vuelvan a ser visibles con claridad.

Brühl, julio de 2016, Dr. A. Roux

Sobre esta tercera edición

Esta tercera edición contiene correcciones, algunas explicaciones adicionales y un nuevo apéndice con la sencilla variante de Euler de la fórmula de solución de ecuaciones cuadráticas.

Brühl, agosto de 2023,   Dr. A. Roux

Contenido

1. Introducción

En una tablilla de barro babilónica con una antigüedad de aproximadamente 4000 años está escrito el siguiente problema geométrico:

Un rectángulo tiene un área de 60 y su longitud es 7 más que el ancho. ¿Qué tan ancho es?

En escritura moderna el problema se convierte en la ecuación $x^2 + 7x = 60$. Los babilonios desconocían las ecuaciones, las letras (como la x) para denominar las incógnitas, los signos de operación y el signo de igualdad.

En la tablilla de barro se describe la resolución del problema. Hay elementos que indican que ellos se basaban en ideas geométricas.

En su libro *Elementos*, Euclides (aprox. 325 – 265 a. C.) resuelve tales problemas visualmente mediante dibujos geométricos.

El hindú Brahmagupta (598 – 665) inventó los números negativos y los consideró como soluciones de ecuaciones cuadráticas. Él ya usaba letras para representar incógnitas, en su mayoría la letra inicial de una palabra para denominar un color.

Después de introducir letras para representar magnitudes conocidas (como el largo a y el ancho b de un rectángulo), François Viète (1540 – 1603) estaba en la situación de poder plantear ecuaciones cuadráticas generales. De la ecuación cuadrática general $x^2 + px + q = 0$ Viète deduce la fórmula conocida para las soluciones.

Esencialmente seguiremos el desarrollo histórico descrito.

2. Resolución gráfica

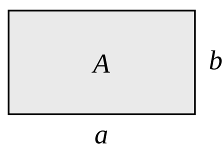
2.1 Cuadrados y rectángulos

Un **rectángulo** es un cuadrilátero con cuatro ángulos de 90°. El área de un rectángulo es:

$$\text{área} \quad = \quad \text{largo por ancho.}$$

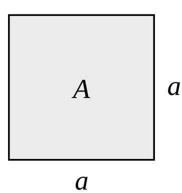
Si *A* es el área del rectángulo, *a* el largo y *b* el ancho, tenemos por lo tanto que:

$$A = a \cdot b \,.$$



Los **cuadrados** son los rectángulos particulares que tienen los cuatro lados igual de largos. Por tanto, el área *A* de un cuadrado con los lados *a* es:

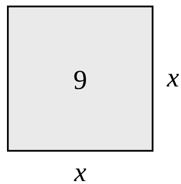
$$A = a^2 \,.$$



Aquí a^2 solamente es una abreviación del producto $a \cdot a$ y se le dice *a cuadrada*, lo que es un bonito modo geométrico de hablar.

Cuando se calcula los lados de un triángulo rectángulo mediante el

teorema de Pitágoras, hay que proceder al revés y determinar el lado, conociendo el área del cuadrado.
Por ejemplo:



La fórmula para el área se convierte en una *ecuación cuadrática* sencilla, es decir

$$x^2 = 9.$$

Así que buscamos un número x, que multiplicándolo por sí mismo dé 9. Aquí obviamente tiene que ser $x = 3$. Se dice que 3 es la **raíz cuadrada** de 9, y se escribe:

$$\sqrt{9} = 3.$$

El símbolo de la raíz surgió históricamente de la siguiente manera. Antiguamente, la lengua de la ciencia en Europa era latín. Así, no se decía *raíz* de 9, sino *radix* de 9, y abreviando se escribía solamente la letra inicial *r*, que, estilizada, se convirtió en √. Finalmente, se le agrego la línea superior para evitar paréntesis: $\sqrt{}$. Por ej., es más fácil escribir y leer $\sqrt{4+5}$ que $\surd(4+5)$.

Resumimos:

1. Hasta las ecuaciones cuadráticas tan sencillas como

$$x^2 = 9$$

están relacionadas geométricamente con *cuadrados*.

2. Hasta para resolver ecuaciones cuadráticas sencillas se necesita sacar la raíz, lo que no siempre es tan fácil como en $x^2 = 9$, donde

$$x = \sqrt{9} = 3.$$

En el capítulo 7 se expone el método de Herón (siglo I d. C.) para calcular raíces.

2.2 Resolución gráfica de ecuaciones cuadráticas

Ahora también resolvemos ecuaciones cuadráticas más complicadas como por ejemplo:

$$x^2 + 6x = 16.$$

Interpretamos esta ecuación geométricamente, es decir, la traducimos del lenguaje del álgebra al lenguaje de las figuras. Ya habíamos considerado x^2 como *área* de un *cuadrado* cuyos lados tienen una longitud de x. En consecuencia, también $6x$ tiene que ser visto como un *área*, concretamente el área de un rectángulo con los lados 6, respectivamente x. Ahora partimos el rectángulo por la mitad y pegamos las partes al cuadrado. Resulta un cuadrado más grande con un hueco (un pequeño cuadrado). Después de llenar el hueco obtenemos un cuadrado completo cuya área es conocida. Del área sale el largo de los lados, y finalmente el valor de x.

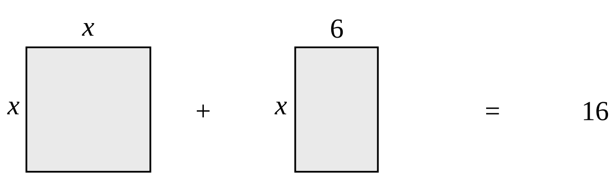
Detallamos los pasos planteados a grandes rasgos:

Paso 1

Traducir la ecuación

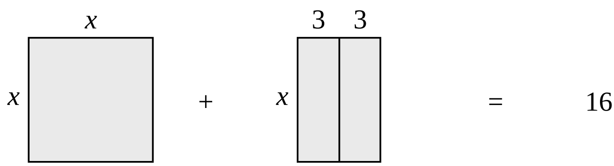
$$x^2 + 6x = 16$$

al lenguaje de las figuras. Consideramos x^2 como el área de un cuadrado, y $6x$ como el área de un rectángulo:



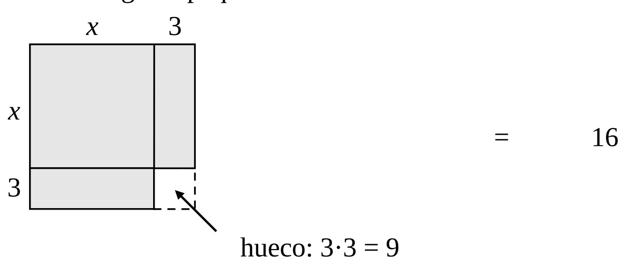
Paso 2

Partir el rectángulo en dos mitades:



Paso 3

Pegar los rectángulos pequeños al cuadrado:



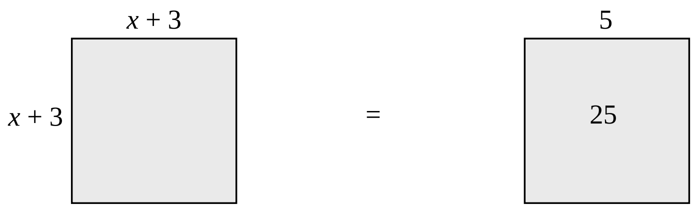
El hueco es un cuadrado y tiene el área de 9.

Paso 4

Completar el cuadrado agregando 9. Por lo tanto el área aumenta a $16+9=25$.

Paso 5

Interpretar el 25 del lado derecho como el área de un cuadrado. El largo de los lados de este cuadrado es $\sqrt{25}=5$:



Paso 6

Ya que los dos cuadrados tienen la misma área, sus *lados* tienen la misma longitud:

$$x+3 = 5\,.$$

Restando 3 de ambos lados, se obtiene la solución:

$$x=2\,.$$

Ejercicios

1. Encontrar gráficamente una solución de cada una de las ecuaciones cuadráticas:

a) $x^2 + 2x = 3$

b) $x^2 + 4x = 12$

c) $x^2 + 6x = 7$

d) $x^2 + 8x = 9$

e) $x^2 + 8x = 65$

f) $x^2 + 4x = 21$

g) $x^2 + 3x = 10$

h) $x^2 + x = 12$ (Nota: $x = 1x$)

i) $x^2 + 5x = 66$

j) $x^2 + 12x = 64$

2. Encontrar gráficamente una solución de cada una de las ecuaciones cuadráticas:

a) $x^2 + 10x = 24$

b) $x^2 + 9x = 36$

3. Un rectángulo tiene un área de 60 y su longitud es 7 más que el ancho. ¿Qué tan ancho es el rectángulo?
(Nota: $\text{rectángulo} = \text{cuadrado} + \text{rectángulo}$)

3. Resolución algebraica

3.1 Completar el cuadrado

Ahora traducimos la resolución geométrica al lenguaje algebraico. Sólo un punto se complica: mientras que al llenar el hueco geométricamente se obtiene un cuadrado inmediatamente, en la versión algebraica se necesita el binomio cuadrado. Ese procedimiento de llenar el hueco cuadrático para obtener un cuadrado se llama *completación de cuadrados*.

Resolvemos otra vez la ecuación

$$x^2 + 6x = 16,$$

pero ahora algebraicamente.

Paso 1

Dividimos el rectángulo 6*x* en dos mitades. Para eso calculamos $6:2=3$. Obtenemos dos rectángulos pequeños (3*x*):

$$x^2 + 2 \cdot 3x = 16$$

Paso 2

Agregamos el cuadrado 3^2 en ambos lados de la ecuación (para llenar el hueco).

$$x^2 + 2 \cdot 3x + 3^2 = 16 + 3^2$$

Paso 3

En el lado izquierdo aplicamos el binomio cuadrado

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

El lado derecho da 25.

$$(x+3)^2 = 25$$

Paso 4

Tenemos que encontrar el valor del término ($x + 3$). Multiplicándolo por sí mismo da 25. Por lo tanto, ($x + 3$) es la raíz de 25, es decir 5. Incluyendo números negativos, el valor de ($x + 3$) también podría ser –5. Porque multiplicando –5 por sí mismo da 25 al igual que antes:

$$(-5)\cdot(-5) = 25 .$$

Con estos razonamientos en la mente, decimos en forma abreviada que sacamos la *raíz* en la ecuación

$$(x+3)^2 = 25 ,$$

y escribimos:

$$x+3 = \pm 5 .$$

Paso 5

Distinguimos los casos +5 y –5. Obtenemos dos valores de *x*. Usualmente, se denominan x_1 y x_2.

Caso +5:

$$\begin{aligned} x_1 + 3 &= 5 \qquad |-3 \\ x_1 &= 2 \end{aligned}$$

Caso –5:

$$\begin{aligned} x_2 + 3 &= -5 \qquad |-3 \\ x_2 &= -8 \end{aligned}$$

Luego entonces, la ecuación tiene las dos soluciones:

$$\begin{aligned} x_1 &= 2 \\ x_2 &= -8 \end{aligned}$$

Ahora consideramos otros cinco ejemplos de ecuaciones cuadráticas. En ellos se presenta el manejo de algunas situaciones peculiares:

- Aplicación de la *diferencia* al cuadrado, $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.
- Coeficiente de x^2.
- Ausencia de un coeficiente de x.
- Ecuaciones cuadráticas *sin* solución.
- Ecuaciones cuadráticas con solamente *una* solución.

Ejemplo 1 (Aplicación de la *diferencia* al cuadrado)
$x^2 - 8x = -15$

Solución

$$
\begin{aligned}
x^2 - 8x &= -15 && | \, 8:2=4 \\
x^2 - 2\cdot 4x &= -15 && | +4^2 \text{ (completar el cuadrado)} \\
x^2 - 2\cdot 4x + 4^2 &= -15 + 4^2 && | \text{ diferencia al cuadrado} \\
(x-4)^2 &= 1 && | \text{ sacar la raíz} \\
x - 4 &= \pm 1 && | +4 \\
x &= \pm 1 + 4 && | \text{ considerar casos} \\
x_1 &= +1 + 4 = 5 \\
x_2 &= -1 + 4 = 3
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, la ecuación tiene estas dos soluciones:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= 5 \\
x_2 &= 3
\end{aligned}
$$

Ejemplo 2 (Coeficiente de x^2)
$5x^2 + 10x - 15 = 0$

Solución

$$
\begin{aligned}
5x^2+10x-15 &= 0 && \mid +15 \text{ (incógnita a la izquierda)}\\
5x^2+10x &= 15 && \mid :5 \ \text{(coeficiente de } x^2\text{)}\\
x^2+2x &= 3 && \mid 2:2=1\\
x^2+2\cdot 1x &= 3 && \mid +1^2 \ \text{(completar el cuadrado)}\\
x^2+2\cdot 1x+1^2 &= 3+1^2 && \mid \text{suma al cuadrado}\\
(x+1)^2 &= 4 && \mid \text{sacar la raíz}\\
x+1 &= \pm 2 && \mid -1\\
x &= \pm 2-1 && \mid \text{considerar casos}\\
x_1 &= +2-1 = 1\\
x_2 &= -2-1 = -3
\end{aligned}
$$

Por lo tanto la ecuación tiene las dos soluciones:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= 1\\
x_2 &= -3
\end{aligned}
$$

Ejemplo 3 (Ausencia de un coeficiente de *x*)

$x^2+x = 12$

Solución

$$\begin{aligned}
x^2 + x &= 12 && |\text{escribe } x \text{ como } 1x \\
x^2 + 1x &= 12 && |1:2 = 0,5 \\
x^2 + 2\cdot 0,5x &= 12 && |+0,5^2 \text{ (compl. el cuadrado)} \\
x^2 + 2\cdot 0,5x + 0,5^2 &= 12 + 0,5^2 && |\text{suma al cuadrado} \\
(x+0,5)^2 &= 12,25 && |\text{sacar la raíz} \\
x + 0,5 &= \pm 3,5 && |-0,5 \\
x &= \pm 3,5 - 0,5 && |\text{considerar casos}
\end{aligned}$$

$$x_1 = +3,5 - 0,5 = 3$$

$$x_2 = -3,5 - 0,5 = -4$$

Por lo tanto la ecuación tiene las dos soluciones:

$$x_1 = 3$$

$$x_2 = -4$$

Ejemplo 4 (Ecuación cuadrática sin solución)

$x^2 + 6x = -18$

Solución

$$\begin{aligned}
x^2 + 6x &= -18 && |6:2 = 3 \\
x^2 + 2\cdot 3x &= -18 && |+3^2 \text{ (completar el cuadrado)} \\
x^2 + 2\cdot 3x + 3^2 &= -18 + 3^2 && |\text{suma al cuadrado} \\
(x+3)^2 &= -9
\end{aligned}$$

Si se multiplica un número por sí mismo, siempre resulta un número positivo o cero. Luego entonces $(x+3)^2$ nunca podrá ser un número negativo como –9.

Por lo tanto, la ecuación no tiene **ninguna** solución.

Ejemplo 5 (Ecuación cuadrática con solamente una solución)
$x^2 + 6x = -9$

Solución

$$
\begin{aligned}
x^2 + 6x &= -9 && |\, 6:2=3 \\
x^2 + 2\cdot 3x &= -9 && |\, +3^2 \text{ (completar el cuadrado)} \\
x^2 + 2\cdot 3x + 3^2 &= -9 + 3^2 && |\, \text{suma al cuadrado} \\
(x+3)^2 &= 0 && |\, \text{sacar la raíz } (-0=0) \\
x+3 &= 0 && |\, -3 \\
x &= -3
\end{aligned}
$$

Por lo tanto la ecuación sólo tiene **una** solución: $x = -3$.

3.2 Casos especiales

Consideramos dos tipos de ecuaciones cuadráticas que se pueden resolver fácilmente **sin** la completación de cuadrados:

- Ecuaciones cuadráticas que contienen la incógnita **solamente** al **cuadrado**.
- Ecuaciones cuadráticas que no contienen el término **constante** (porque es **cero**).

Ejemplo 1
$3x^2 = 12$

Solución

$$
\begin{aligned}
3x^2 &= 12 && |\, :3 \text{ (coeficiente de } x^2\text{)} \\
x^2 &= 4 && |\, \text{sacar la raíz} \\
x &= \pm 2
\end{aligned}
$$

Por lo tanto la ecuación tiene las dos soluciones:

$$x_1 = 2$$
$$x_2 = -2$$

Ejemplo 2
$x^2 + 6x = 0$

Solución

$$x^2 + 6x = 0 \qquad |\text{ factorizar } x$$
$$x(x+6) = 0$$

Un producto es cero, si y solamente si uno de los factores es cero. Por lo tanto tenemos que considerar dos casos:

El primer factor es cero:

$$x = 0.$$

El segundo factor es cero:

$$x + 6 = 0 \qquad |-6$$
$$x = -6$$

Por lo tanto la ecuación tiene las dos soluciones:

$$x_1 = 0$$
$$x_2 = -6$$

Ejercicios

1. Encontrar todas las soluciones de la ecuación cuadrática:

a) $x^2 = 4$

b) $x^2 = 49$

c) $x^2 = 0$

d) $x^2 = 50$

e) $x^2 = 2$

f) $x^2 = -2$

g) $x^2 = 3$

h) $x^2 = 10$

i) $x^2 = 10\,000$

2. Encontrar todas las soluciones de la ecuación cuadrática mediante la completación de cuadrados:

a) $x^2 + 2x = 3$

b) $x^2 + 4x = 12$

c) $x^2 + 6x = 7$

d) $x^2 + 8x = 9$

e) $x^2 + 3x = 10$

f) $x^2 + x = 12$

g) $x^2 + 5x = 66$

3. Encontrar todas las soluciones de la ecuación cuadrática mediante la completación de cuadrados:

a) $x^2 - 6x + 8 = 0$

b) $2x^2 - 8x + 6 = 0$

c) $3x^2 - 9x + 6 = 0$

d) $x^2 + x - 2 = 0$

e) $x^2 - 7x + 12 = 0$

f) $x^2 - 7x + 10 = 0$

g) $x^2 + 2x - 3 = 0$

h) $x^2 - 4x - 12 = 0$

4. Resolver la ecuación: $2x^2 + x - 4 = -x^2 + 4x + 2$.
(Sugerencia: Transformar para obtener una ecuación como las del ejercicio 3.)

5. Resolver la ecuación: $-4x^2 - 6x + 3 = -5 - 2x$.

6. Un rectángulo tiene un área de 45 cm² y su longitud es 4 cm más larga que su ancho. ¿Qué tan ancho es el rectángulo?

4. Fórmula de solución

4.1 Introducción y desarrollo de la fórmula

Cualquier ecuación cuadrática concreta puede ser resuelta por medio de la completación de cuadrados. Si se sustituyen los *números concretos* en las ecuaciones cuadráticas, como

$$x^2 + 6x - 16 = 0,$$

por *letras*, se obtiene una ecuación cuadrática *general*:

$$x^2 + px + q = 0\,.$$

(En el ejemplo sería $p = 6$ y $q = -16$.)

Ahora vamos a resolver esta ecuación cuadrática general mediante la completación de cuadrados. El resultado, por supuesto, no consistirá de números concretos, sino de una *expresión general*. Ese término general nos da una *fórmula* para las soluciones de una ecuación cuadrática.

El primer hombre quien usara letras en ese sentido de describir una *situación general* fue François Viète (1540 – 1603). La elección de la letra p para el coeficiente de x, y la letra q para el sumando constante se debe a él, al igual que la fórmula de solución en su escritura actual.

Resolvemos, pues, la ecuación

$$x^2 + px + q = 0$$

completando cuadrados:

$$x^2 + px + q = 0 \qquad |-q \text{ (pasar la constante } q \text{ a la derecha)}$$

$$x^2 + px = -q \qquad |\text{escribir } p = 2\cdot\frac{p}{2}$$

$$x^2 + 2\cdot\frac{p}{2}x = -q \qquad |+\left(\frac{p}{2}\right)^2 \text{ (compl. el cuadr.)}$$

$$x^2 + 2\cdot\frac{p}{2}x + \left(\frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \qquad |\text{suma al cuadrado}$$

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \qquad |\text{ sacar la raíz}$$

$$x + \frac{p}{2} = \pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \qquad |-\frac{p}{2}$$

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Para señalar que, en general, existen dos soluciones, se acostumbra reemplazar *x* por $x_{1/2}$ (lo que incluye los casos x_1 y x_2):

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Resumimos:

Fórmula de solución
La ecuación cuadrática $$x^2 + px + q = 0$$ tiene las soluciones $$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

La fórmula de solución se refiere a una ecuación cuadrática dada en una forma **normalizada**:

$$\boldsymbol{x^2} + px + q = \mathbf{0}\,.$$

Se tienen que cumplir las dos siguientes condiciones:

- En un lado de la ecuación tiene que estar **cero**.
- $\boldsymbol{x^2}$ está sola, **sin** coeficiente.

El lado derecho de la fórmula de solución

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Empieza con la mitad negativa del coeficiente de *x*, luego sigue + o – la raíz del cuadrado del número que acabamos de escribir menos la constante (el número que no contiene *x*). Es *este contenido* de la fórmula de solución lo que hay que aprender, como enfatiza Euler. Al leer los ejemplos a continuación, el lector puede familiarizarse con la fórmula de solución y grabarse su contenido.

4.2 Ejemplos

Consideramos siete ejemplos de ecuaciones cuadráticas. Con ellos se puede conocer la aplicación práctica de la fórmula de solución, además de algunas peculiaridades como:

- Valores negativos de *p* y *q*.
- x^2 con coeficiente, además, ningún lado es cero.
- Ausencia del coeficiente de *x*.
- Ecuaciones cuadráticas *sin* solución.
- Ecuaciones cuadráticas con solamente *una* solución.

Ejemplo 1 (Valores positivos de *p* y *q*)
$x^2+6x+5 = 0$

Solución
La fórmula se puede aplicar directamente ($p=6, \;\; q=5$):

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \qquad |\text{sustituir } p = 6,\ q = 5$$

$$x_{1/2} = -\frac{6}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{6}{2}\right)^2 - 5} \qquad |\text{calcular}$$

$$x_{1/2} = -3 \pm \sqrt{3^2 - 5} \qquad |\text{calcular}$$

$$x_{1/2} = -3 \pm \sqrt{4} \qquad |\text{sacar la raíz}$$

$$x_{1/2} = -3 \pm 2 \qquad |\text{considerar los casos}$$

$$x_1 = -3+2 = -1$$

$$x_2 = -3-2 = -5$$

Por lo tanto la ecuación tiene las dos soluciones:

$$x_1 = -1$$
$$x_2 = -5$$

Ejemplo 2 (Valor negativo de *q*)
$x^2+6x-16 = 0$

Solución
La fórmula se puede aplicar directamente ($p=6, \;\; q=-16$):

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \qquad |\text{sustituir } p = 6,\ q = -16$$

$$x_{1/2} = -\frac{6}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{6}{2}\right)^2 - (-16)} \qquad |\text{calcular}$$

$$x_{1/2} = -3 \pm \sqrt{3^2 + 16} \qquad |\text{calcular}$$

$$x_{1/2} = -3 \pm \sqrt{25} \qquad |\text{sacar lar raíz}$$

$$x_{1/2} = -3 \pm 5 \qquad |\text{considerar los casos}$$

$$x_1 = -3 + 5 = 2$$

$$x_2 = -3 - 5 = -8$$

Por lo tanto la ecuación tiene las dos soluciones:

$$x_1 = 2 \quad \text{y} \quad x_2 = -8$$

Ejemplo 3 (Valor negativo de *p*)

$x^2 - 8x + 15 = 0$

Solución

La fórmula se puede aplicar directamente ($p = -8,\ q = 15$):

$$
\begin{aligned}
x_{1/2} &= -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} && |\text{sustituir } p = -8,\ q = 15 \\
x_{1/2} &= -\frac{-8}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-8}{2}\right)^2 - 15} && |\text{calcular} \\
x_{1/2} &= 4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 15} && |\text{calcular} \\
x_{1/2} &= 4 \pm \sqrt{1} && |\text{sacar la raíz} \\
x_{1/2} &= 4 \pm 1 && |\text{considerar los casos} \\
x_1 &= 4 + 1 = 5 \\
x_2 &= 4 - 1 = 3
\end{aligned}
$$

Por lo tanto la ecuación tiene las dos soluciones:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= 5 \\
x_2 &= 3
\end{aligned}
$$

Ejemplo 4 (x^2 con coeficiente, ningún lado es cero)

$5x^2 + 10x = 15$

Solución

La fórmula **no** se puede aplicar directamente, porque x^2 tiene un coeficiente, y ningún lado de la ecuación es cero. Por eso, hay que transformar la ecuación primero:

$$
\begin{aligned}
5x^2 + 10x &= 15 && |-15 \\
5x^2 + 10x - 15 &= 0 && |:5 \\
x^2 + 2x - 3 &= 0
\end{aligned}
$$

Ahora se puede aplicar la fórmula ($p = 2$, $q = -3$):

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \qquad |\text{sustituir } p = 2,\ q = -3$$

$$x_{1/2} = -\frac{2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{2}{2}\right)^2 - (-3)} \qquad |\text{calcular}$$

$$x_{1/2} = -1 \pm \sqrt{1^2 + 3} \qquad |\text{calcular}$$

$$x_{1/2} = -1 \pm \sqrt{4} \qquad |\text{sacar la raíz}$$

$$x_{1/2} = -1 \pm 2 \qquad |\text{considerar los casos}$$

$$x_1 = -1 + 2 = 1$$

$$x_2 = -1 - 2 = -3$$

Por lo tanto la ecuación tiene las dos soluciones:

$$x_1 = 1$$
$$x_2 = -3$$

Ejemplo 5 (Ausencia del coeficiente de *x*)
$x^2 + x - 6 = 0$

Solución
En esta ecuación x no parece tener coeficiente. Sin embargo, se puede escribir $1x$ en vez de x:

$$x^2 + 1x - 6 = 0$$

Ahora se puede aplicar la fórmula ($p = 1,\ q = -6$):

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \qquad |\text{sustituir } p = 1,\quad q = -6$$

$$x_{1/2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - (-6)} \qquad |\text{calcular}$$

$$x_{1/2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 6} \qquad |\text{calcular}$$

$$x_{1/2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{24}{4}} \qquad |\text{calcular}$$

$$x_{1/2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4}} \qquad |\text{sacar la raíz}$$

$$x_{1/2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{5}{2} \qquad |\text{considerar los casos}$$

$$x_1 = -\frac{1}{2} + \frac{5}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

$$x_2 = -\frac{1}{2} - \frac{5}{2} = -\frac{6}{2} = -3$$

Por lo tanto la ecuación tiene las dos soluciones:

$$x_1 = 2$$
$$x_2 = -3$$

Ejemplo 6 (Ecuación cuadrática sin solución)
$x^2 + 4x + 5 = 0$

Solución
La fórmula se puede aplicar directamente ($p = 4$, $q = 5$):

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \qquad |\text{sustituir } p=4,\ q=5$$

$$x_{1/2} = -\frac{4}{2} \pm \sqrt{2^2 - 5} \qquad |\text{calcular}$$

$$x_{1/2} = -2 \pm \sqrt{4-5} \qquad |\text{calcular}$$

$$x_{1/2} = -2 \pm \sqrt{-1}$$

Si se multiplica un número por sí mismo, siempre resulta un número positivo o cero. No se puede sacar la raíz de un número negativo (dentro del marco de los números reales). En consecuencia, no existe $\sqrt{-1}$.
Por lo tanto, la ecuación no tiene **ninguna** solución (real).

Ejemplo 7 (Ecuación cuadrática con solamente una solución)
$x^2 + 6x + 9 = 0$

Solución
La fórmula se puede aplicar directamente ($p=6,\ q=9$):

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \qquad |\text{sustituir } p=6,\ q=9$$

$$x_{1/2} = -\frac{6}{2} \pm \sqrt{3^2 - 9} \qquad |\text{calcular}$$

$$x_{1/2} = -3 \pm \sqrt{9-9} \qquad |\text{calcular}$$

$$x_{1/2} = -3 \pm \sqrt{0} \qquad |\text{sacar la raíz}$$

$$x_{1/2} = -3 \pm 0 \qquad |\text{calcular}$$

$$x_{1/2} = -3$$

Por lo tanto la ecuación sólo tiene **una** solución: $x = -3$.

4.3 Las fórmulas de Vieta

De la fórmula de solución de una ecuación cuadrática se pueden deducir dos resultados sobre la suma y el producto de las dos soluciones de la ecuación. Son conocidos como las *fórmulas de Vieta*. Cabe mencionar que *Vieta* es la versión latina de *Viète*.

Si x_1 y x_2 son las dos soluciones de la ecuación cuadrática

$$x^2 + px + q = 0,$$

entonces las fórmulas de Vieta son:

$$x_1 + x_2 = -p$$
$$x_1 \cdot x_2 = q$$

Demostración

Existen diferentes demostraciones de las fórmulas de Vieta. Optamos por la más corta, que se basa en la fórmula de solución:

1. Suma de las soluciones

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \qquad |\text{considerar casos}$$

$$x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

$$x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Al sumar las dos soluciones se cancelan las raíces:

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 &= -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \; - \; \frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \\
&= -\frac{p}{2} - \frac{p}{2} \\
&= -p
\end{aligned}
$$

2. Producto de las soluciones

Al multiplicar las dos soluciones, se puede utilizar la siguiente fórmula de binomios: $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$. Es decir:

$$
\begin{aligned}
x_1 \cdot x_2 &= \left(-\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\right) \cdot \left(-\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\right) \\
&= \left(-\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\right)^2 \\
&= \left(-\frac{p}{2}\right)^2 - \left[\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q\right] \\
&= \left(\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q \\
&= q
\end{aligned}
$$

Con eso, la demostración está concluida.

Ejemplo

Retomamos la ecuación del ejemplo 2 en el capítulo 4.2:

$$x^2 + 6x - 16 = 0 .$$

Ella tiene las soluciones:

$$x_1 = 2$$
$$x_2 = -8$$

La suma de las soluciones es:

$$x_1 + x_2 \;=\; 2 + (-8) \;=\; -6 \;=\; -\,p\,.$$

El producto de las soluciones es:

$$x_1 \cdot x_2 \;=\; 2 \cdot (-8) \;=\; -16 \;=\; q\,.$$

Observaciones

1. Las fórmulas de Vieta se pueden usar para ver si las soluciones calculadas son correctas.

2. Las fórmulas de Vieta también sirven para tantear soluciones que sean *números enteros* (si es que existen). Ejemplo: las posibles soluciones enteras de la ecuación

$$x^2 + 2x - 3 \;=\; 0$$

solamente pueden ser

$$x_1 = 1,\; x_2 = -3 \;\text{ o }\; x_1 = -1,\; x_2 = 3\,.$$

Porque solo ellas tienen un producto de $q = -3$.

Como la suma de las soluciones tiene que ser $-p = -2$, quedan las soluciones:

$$x_1 = 1,\; x_2 = -3\,.$$

Ejercicios

1. Encontrar todas las soluciones de la ecuación cuadrática mediante la fórmula de solución:

a) $x^2 - 6x + 8 = 0$

b) $2x^2 - 8x + 6 = 0$

c) $3x^2 - 9x + 6 = 0$

d) $x^2 + x - 2 = 0$

e) $x^2 - 7x + 12 = 0$

f) $x^2 - 7x + 10 = 0$

g) $x^2 + 2x - 3 = 0$

h) $x^2 - 4x - 12 = 0$

2. Encontrar todas las soluciones de la ecuación cuadrática mediante la fórmula de solución:

a) $x^2 + 6x + 9 = 0$

b) $x^2 - x = 6$

c) $x^2 + 2 = 2x$

d) $4x^2 - 16x = -15$

e) $3x^2 + 2x = 1$

f) $5x^2 + 15x + 5 = 0$

3. Resolver la ecuación: $2x^2 + x - 4 = -x^2 + 4x + 2$.

4. Resolver la ecuación: $-4x^2 - 6x + 3 = -5 - 2x$.

5. Un rectángulo tiene un área de 104 cm² y su longitud es 5 cm más grande que su ancho. ¿Qué tan ancho es el rectángulo?

5. Resolución mediante sustitución

La ***sustitución*** de incógnitas o variables es un truco muy común en las matemáticas; se aplica para simplificar ecuaciones.

Consideramos, por ejemplo, la ecuación cuadrática

$$x^2 + 6x = 16 .$$

Para empezar, escogemos arbitrariamente la sustitución

$$x = z + 1 ,$$

donde z es la nueva incógnita. Reemplazamos x por $z+1$ en la ecuación cuadrática:

$$\begin{aligned} x^2 + 6x &= 16 && |\,\text{sustituir } x = z+1 \\ (z+1)^2 + 6(z+1) &= 16 && |\,\text{quitar paréntesis} \\ z^2 + 2z + 1 + 6z + 6 &= 16 && |\,\text{resumir} \qquad . \\ z^2 + 8z + 7 &= 16 && |\,-7 \\ z^2 + 8z &= 9 \end{aligned}$$

De la misma manera, la sustitución

$$x = z + 3$$

nos da la ecuación cuadrática:

$$z^2 + 12z = -11 .$$

Ahora consideramos una sustitución general de la forma

$$x = z + a .$$

Después determinaremos a tal que resulte una ecuación cuadrática que carezca del término con z. Entonces la ecuación se podrá solucionar simplemente sacando una raíz:

$$
\begin{aligned}
x^2 + 6x &= 16 && |\,\text{sustituir } x = z + a \\
(z+a)^2 + 6(z+a) &= 16 && |\,\text{quitar paréntesis} \\
z^2 + 2az + a^2 + 6z + 6a &= 16 && |\,\text{resumir} \\
z^2 + (2a+6)z + a^2 + 6a &= 16 && |-(a^2+6a) \\
z^2 + (2a+6)z &= 16 - a^2 - 6a
\end{aligned}
$$

Para que desaparezca la expresión con z, el coeficiente de z tiene que ser igual a cero:

$$
\begin{aligned}
2a + 6 &= 0 && |-6 \\
2a &= -6 && |:2 \\
a &= -3
\end{aligned}
$$

Por lo tanto la sustitución concreta es:

$$
\begin{aligned}
x &= z + a && |\,a = -3 \\
x &= z - 3
\end{aligned}
$$

Ahora ponemos $a = -3$ en la ecuación cuadrática:

$$
\begin{aligned}
z^2 + (2a+6)z &= 16 - a^2 - 6a \\
z^2 + 0 &= 16 - (-3)^2 - 6\cdot(-3) \\
z^2 &= 16 - 9 + 18 \\
z^2 &= 25 \\
z_{1/2} &= \pm\sqrt{25} = \pm 5
\end{aligned}
$$

Este resultado nos permite calcular las soluciones de la ecuación cuadrática original:

$$
\begin{aligned}
x &= z-3 && |\,\text{sustituir } z_1 = 5 \\
x_1 &= 5-3 = 2 \\
x &= z-3 && |\,\text{sustituir } z_2 = -5 \\
x_2 &= -5-3 = -8
\end{aligned}
$$

Entonces la ecuación tiene las dos soluciones $x_1 = 2$ y $x_2 = -8$.

Concluimos con un ejemplo que resolveremos en forma más concisa.

Ejemplo

$x^2 + 2x = 3$

Solución

1. Sustituimos $x = z + a$:

$$
\begin{aligned}
x^2 + 2x &= 3 \\
(z+a)^2 + 2(z+a) &= 3 \\
z^2 + 2az + a^2 + 2z + 2a &= 3 \\
z^2 + (2a+2)z + a^2 + 2a &= 3 \\
z^2 + (2a+2)z &= 3 - a^2 - 2a
\end{aligned}
$$

Ahora, $2a + 2 = 0$ da $a = -1$. La sustitución es $x = z - 1$.

2. Ponemos $a = -1$ en la ecuación cuadrática:

$$
\begin{aligned}
z^2 + (2a+2)z &= 3 - a^2 - 2a \\
z^2 + 0 \cdot z &= 3 - (-1)^2 - 2 \cdot (-1) \\
z^2 &= 3 - 1 + 2 \\
z^2 &= 4 \\
z_{1/2} &= \pm 2
\end{aligned}
$$

3. Sustituir $z_{1/2} = \pm 2$ en $x = z - 1$:

$$x_1 = z_1 - 1 = 2 - 1 = 1$$
$$x_2 = z_2 - 1 = -2 - 1 = -3$$

Por lo tanto la ecuación tiene las dos soluciones $x_1 = 1$ y $x_2 = -3$.

Observaciones
La aplicación del método de sustitución es más extensa que las resoluciones planteadas anteriormente. Sin embargo tiene las siguientes ventajas:

1. La sustitución se utiliza frecuentemente en las matemáticas.
2. La sustitución no exige ideas adicionales cuando se aplica a ecuaciones cuadráticas.
3. Las ecuaciones cúbicas (ecuaciones con x^3) se simplifican mediante una sustitución correspondiente, obteniendo una ecuación cúbica *reducida* (que no contiene x^2), la cual se puede resolver mediante una fórmula.

Ejercicios

1. Resolver las ecuaciones cuadráticas mediante sustitución:

a) $x^2 + 2x = 8$

b) $x^2 + 4x = 12$

c) $x^2 + 6x = 7$

d) $x^2 + 8x = 9$

e) $x^2 + 3x = 10$

2. Resolver las ecuaciones cuadráticas mediante sustitución:

a) $x^2 - 6x + 8 = 0$

b) $2x^2 - 8x + 6 = 0$

c) $3x^2 - 9x + 6 = 0$

d) $x^2 + x - 2 = 0$

e) $x^2 - 7x + 12 = 0$

6. Ecuaciones fraccionarias y con raíces

6.1 Ecuaciones fraccionarias

Ecuaciones fraccionarias son ecuaciones que contienen la incógnita en el denominador de una o varias fracciones. Se pueden resolver deshaciéndose de las fracciones, una por una. Para deshacerse de una fracción, simplemente se multiplica la ecuación por el denominador correspondiente.

Ofrecemos tres explicaciones del método de multiplicar por el denominador para desaparecer una fracción, como:

$$\frac{3}{5} \cdot 5 = (3:5) \cdot 5 = 3\,.$$

Explicación 1

La fracción señala una **división** (numerador entre denominador):

$$\frac{3}{5} = 3:5\,.$$

Si se multiplica por el mismo 5, se obtiene el número original, 3. Cabe mencionar que este razonamiento también se encuentra en la prueba de la división. Es decir:

$$\frac{3}{5} \cdot 5 = (3:5) \cdot 5 = 3\,.$$

Explicación 2

Simplemente se puede **simplificar** la fracción:

$$\frac{3}{5} \cdot 5 = 3\,.$$

Con más detalle: $\frac{3}{5} \cdot 5 = \frac{3 \cdot 5}{5} = \frac{3 \cdot \cancel{5}}{\cancel{5}1} = \frac{3}{1} = 3\,.$

Explicación 3

Con sentido común e intuición lingüística se puede pensar de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \frac{3}{5}\cdot 5 &= 3 \text{ quintos por } 5 \\ &= 3\cdot\frac{1}{5}\cdot 5 \\ &= 3 \text{ veces } 5 \text{ quintos} \\ &= 3 \text{ veces } 1 \text{ entero} \\ &= 3 \end{aligned}$$

Exponemos la resolución de ecuaciones fraccionarias mediante un ejemplo.

Ejemplo

$$3-\frac{4x+7}{2x+3} = \frac{5-x}{7-2x}$$

Solución

Multiplicamos los dos miembros de la ecuación por $2x+3$, para liberarnos de la primera fracción:

$$\begin{aligned} 3-\frac{4x+7}{2x+3} &= \frac{5-x}{7-2x} \qquad\qquad |\cdot(2x+3) \\ 3\cdot(2x+3)-(4x+7) &= \frac{(5-x)\cdot(2x+3)}{7-2x} \\ 6x+9-4x-7 &= \frac{10x+15-2x^2-3x}{7-2x} \\ 2x+2 &= \frac{-2x^2+7x+15}{7-2x} \end{aligned}$$

Multiplicamos los dos miembros de la ecuación por $7-2x$, para deshacer el quebrado restante:

$$2x+2 = \frac{-2x^2+7x+15}{7-2x} \qquad |\cdot(7-2x)$$

$$(2x+2)\cdot(7-2x) = -2x^2+7x+15 \qquad |\text{quitar paréntesis}$$

$$14x-4x^2+14-4x = -2x^2+7x+15 \qquad |\text{resumir}$$

$$-4x^2+10x+14 = -2x^2+7x+15 \qquad |+4x^2$$

$$10x+14 = 2x^2+7x+15 \qquad |-10x$$

$$14 = 2x^2-3x+15 \qquad |-14$$

$$0 = 2x^2-3x+1 \qquad |:2$$

$$0 = x^2-1{,}5x+0{,}5$$

Esta ecuación cuadrática normalizada puede ser resuelta mediante la fórmula ($p=-1{,}5$, $q=0{,}5$):

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q} \qquad |\text{sustituir } p=-1{,}5 \text{ und } q=0{,}5$$

$$x_{1/2} = -\frac{-1{,}5}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{-1{,}5}{2}\right)^2-0{,}5} \qquad |\text{calcular}$$

$$x_{1/2} = 0{,}75\pm\sqrt{0{,}0625} \qquad |\text{sacar la raíz}$$

$$x_{1/2} = 0{,}75\pm0{,}25 \qquad |\text{considerar los casos}$$

$$x_1 = 0{,}75+0{,}25 = 1$$

$$x_2 = 0{,}75-0{,}25 = 0{,}5$$

Así, la ecuación tiene las dos soluciones:

$$x_1 = 1$$

$$x_2 = 0{,}5$$

6.2 Ecuaciones con raíces

Las ecuaciones con raíces son ecuaciones que contienen la incógnita en un signo de raíz (como en $\sqrt{x+1}$). Se pueden resolver aislando una raíz en un lado de la ecuación, y cuadrando ambos miembros de la ecuación. Así desaparece la raíz correspondiente.

La raíz de un número dado (no negativo) es el número no negativo que, multiplicado por sí mismo, resulta ser el número dado:

$$\sqrt{9} = 3 \text{, porque } 3 \cdot 3 = 9 .$$

Si cuadramos la raíz (escrita $\sqrt{9}$ o 3), obtenemos el número original, 9:

$$\left(\sqrt{9}\right)^2 = 9 .$$

El acto de cuadrar ambos miembros de una ecuación es un asunto delicado, porque puede generar **soluciones no existentes**. Por ejemplo, la ecuación sencilla

$$x = 1$$

ya está resuelta y tiene la **única** solución 1. Ahora cuadramos ambos lados de la ecuación, obteniendo la ecuación:

$$x^2 = 1 .$$

Esta ecuación tiene dos soluciones: 1 y **–1**. Apareció una solución no existente, –1. Para descartar esas soluciones falsas hay que aplicar una prueba a todas las (posibles) soluciones obtenidas.

Resumimos:

Estrategia de solución de ecuaciones con raíces

1. **Aislar** la raíz considerada, y **cuadrar** ambos miembros de la ecuación. Repetir el procedimiento para cada raíz.
2. **Prueba** para reconocer soluciones falsas que surgieron.

Ejemplo

$\sqrt{3x-2} + \sqrt{x-1} = 3$

Solución

Aislamos la primera raíz, y cuadramos para que desaparezca esa raíz:

$$
\begin{aligned}
\sqrt{3x-2} + \sqrt{x-1} &= 3 && |-\sqrt{x-1} \\
\sqrt{3x-2} &= 3-\sqrt{x-1} && |\,\text{cuadrar} \\
3x-2 &= \left(3-\sqrt{x-1}\right)^2
\end{aligned}
$$

Ahora desarrollamos la diferencia al cuadrado, y aislamos la raíz (cuyo coeficiente no estorba):

$$
\begin{aligned}
3x-2 &= \left(3-\sqrt{x-1}\right)^2 \\
3x-2 &= 9-6\sqrt{x-1}+\left(\sqrt{x-1}\right)^2 \\
3x-2 &= 9-6\sqrt{x-1}+x-1 \\
3x-2 &= -6\sqrt{x-1}+x+8 && |-x \\
2x-2 &= -6\sqrt{x-1}+8 && |-8 \\
2x-10 &= -6\sqrt{x-1} && |:2 \text{ (para simplificar)} \\
x-5 &= -3\sqrt{x-1}
\end{aligned}
$$

Volvemos a cuadrar para deshacernos de la raíz restante. Procedemos como arriba:

$$x-5 = -3\sqrt{x-1} \qquad |\,\text{cuadrar}$$

$$(x-5)^2 = 9\left(\sqrt{x-1}\right)^2 \qquad |\,\text{diferencia al cuadrado}$$

$$x^2-10x+25 = 9(x-1)$$

$$x^2-10x+25 = 9x-9 \qquad |\,-9x$$

$$x^2-19x+25 = -9 \qquad |\,+9$$

$$x^2-19x+34 = 0$$

Esta ecuación cuadrática se puede resolver inmediatamente mediante la fórmula ($p=-19$, $q=34$):

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \qquad |\,\text{sustituir } p=-19,\quad q=34$$

$$x_{1/2} = -\frac{-19}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-19}{2}\right)^2 - 34} \qquad |\,\text{calcular}$$

$$x_{1/2} = 9,5 \pm \sqrt{56,25} \qquad |\,\text{sacar la raíz}$$

$$x_{1/2} = 9,5 \pm 7,5 \qquad |\,\text{considerar los casos}$$

$$x_1 = 9,5+7,5 = 17$$

$$x_2 = 9,5-7,5 = 2$$

Ya que en el transcurso de la resolución hemos **cuadrado**, posiblemente hayan surgido soluciones **falsas**. Solamente hemos obtenido **candidatos** de solución:

$$x_1 = 17$$
$$x_2 = 2$$

Detectamos soluciones falsas mediante una prueba:

Prueba

Candidato 1: $x_1 = 17$

Sustituimos $x_1 = 17$ en la ecuación original, y calculamos el miembro izquierdo (en el derecho ya dice 3):

$$\sqrt{3x-2} + \sqrt{x-1} = 3 \qquad | \text{sustituir } x_1 = 17$$

$$\sqrt{3 \cdot 17 - 2} + \sqrt{17-1} = 3$$

$$\sqrt{49} + \sqrt{16} = 3$$

$$7 + 4 = 3$$

$$11 = 3$$

La prueba falla, $x_1 = 17$ **no** es solución de la ecuación original.

Candidato 2: $x_2 = 2$

Sustituimos $x_2 = 2$ en la ecuación original, y calculamos el miembro izquierdo (en el derecho ya dice 3):

$$\sqrt{3x-2} + \sqrt{x-1} = 3 \qquad | \text{sustituir } x_2 = 2$$

$$\sqrt{3 \cdot 2 - 2} + \sqrt{2-1} = 3$$

$$\sqrt{4} + \sqrt{1} = 3$$

$$2 + 1 = 3$$

$$3 = 3$$

El candidato satisface la ecuación, $x_2 = 2$ es una solución.

Por lo tanto:
esta ecuación con raíces tiene sólo una solución: $x = 2$.

Ejercicios

1. Resolver las siguientes ecuaciones fraccionarias:

a) $\dfrac{15}{2x+7} = 2-x$

b) $\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{4}{x+5} = 1$

c) $\dfrac{8}{x+7}+\dfrac{2}{x+1} = 1$

d) $1+\dfrac{2}{1-x} = \dfrac{8}{x+5}$

e) $\dfrac{5-x}{x-1} = \dfrac{x-11}{x+5}$

f) $\dfrac{3-x}{x+1} = 1-\dfrac{16}{x+7}$

2. Resolver las siguientes ecuaciones con raíces:

a) $x+2-3\cdot\sqrt{x} = 0$

b) $4\cdot\sqrt{x}-x = 3$

c) $5\cdot\sqrt{x}-x = 6$

d) $\sqrt{x}+1-2x = 0$

e) $3\cdot\sqrt{x}+2-2x = 0$

f) $x+3\cdot\sqrt{x} = 4$

g) $\sqrt{x+5} - \sqrt{3x-8} = 1$

h) $\sqrt{9+4x} + 2\cdot\sqrt{x} = 9$

i) $\sqrt{16x-7} = 9-4\cdot\sqrt{x-1}$

7. Calcular raíces

Al resolver ecuaciones cuadráticas mediante los métodos planteados en este libro, finalmente siempre se tiene que sacar una raíz. El cálculo de raíces (más preciso: raíces cuadradas) es, pues, una parte esencial de la resolución de ecuaciones cuadráticas.

Como se había mencionado anteriormente, el signo radical $\sqrt{\ }$, introducido por Christoff Rudolff (alrededor de 1499 – 1543), surgió de la letra inicial estilizada *r* de la palabra *radix*, palabra latina que significa *raíz*:

$$\text{raíz de } 20 \;\rightarrow\; \text{r}20 \;\rightarrow\; \surd 20 \;\rightarrow\; \sqrt{20}\,.$$

7.1 Explicación del método de Herón

Consideramos el método atribuido al griego Herón (aprox. 10 – 70, Alejandría), quien ha sido el primero en plantearlo claramente. Hay elementos que indican que los babilonios ya conocían el método alrededor de 1800 a. C.
Las calculadoras contemporáneas aplican este método para sacar las raíces. El método de Herón parte de un valor aproximado de la raíz (*valor inicial*). Luego se mejora el valor. Se repite el proceso de mejoramiento hasta que se haya alcanzado la exactitud deseada (por ejemplo, 8 cifras correctas).

Exponemos los detalles del procedimiento en el ejemplo de la raíz de 20.

Buscamos un número, que multiplicado por sí mismo dé 20:

$$? \cdot ? = 20\,.$$

Un número entero está descartado, lamentablemente, porque $4 \cdot 4 = 16$ es muy pequeño, y $5 \cdot 5 = 25$ demasiado grande. La raíz buscada tiene que estar entre 4 y 5.

Si asumimos una actitud pragmática y permitimos que los dos factores no sean exactamente iguales, es fácil plantear 20 como producto de dos números:

$$4 \cdot 5 = 20.$$

Si no se encuentra una descomposición tan bonita, siempre se puede acudir a la factorización con el 1 como uno de sus factores:

$$1 \cdot 20 = 20.$$

En tales factorizaciones uno de los factores es muy pequeño, y el otro es muy grande para que dé 20 al multiplicarse por sí mismo. El valor correcto está entre los dos factores. El valor intermedio más fácil de calcular es el *valor medio*, que se calcula dividiendo la suma de los dos números entre 2. Está ubicado en medio de los dos números. Cabe mencionar que el promedio de dos calificaciones se determina de la misma manera.

Volvemos con la factorización

$$4 \cdot 5 = 20,$$

los factores son 4 y 5, su valor medio es:

$$\frac{4+5}{2} = 4{,}5.$$

Ahora tomamos el valor 4,5 como nuevo primer factor. El segundo factor no puede ser escogido arbitrariamente, sino hay que determinarlo tal que el producto dé 20:

$$4{,}5 \cdot ? = 20.$$

Por lo tanto, el factor buscado tiene que ser el cociente de 20 y 4,5, es decir:

$$4{,}5 \cdot \frac{20}{4{,}5} = 20.$$

Sustituyendo el valor del cociente (con cinco decimales), llegamos a la factorización siguiente:

$$4,5 \cdot 4,44444 \approx 20\,.$$

La diferencia de los dos factores ya es mucha más pequeña que en la factorización anterior. Si se continúa el procedimiento, se obtienen factores arbitrariamente cercanos.

7.2 Planteamiento práctico del método de Herón

Aplicamos el método explicado en forma concisa y esquemática para calcular $\sqrt{20}$ con cinco decimales.

Paso 1

Factorización: $4 \cdot 5 = 20$ (alternativa: $1 \cdot 20 = 20$)

Valor medio: $\dfrac{4+5}{2} = 4,5$

Paso 2

Factorización: $4,5 \cdot ? = 20$

$$4,5 \cdot \frac{20}{4,5} = 20$$

$$4,5 \cdot 4,44444 \approx 20$$

Valor medio: $\dfrac{4,5+4,44444}{2} = 4,47222$

Paso 3

Factorización: $4,47222 \cdot ? = 20$

$$4,47222 \cdot \frac{20}{4,47222} = 20$$

$$4,47222 \cdot 4,47205 \approx 20$$

Valor medio: $\dfrac{4,47222+4,47205}{2} \approx 4,47214$

Paso 4

Factorización: $4,47214 \cdot ? = 20$

$$4,47214 \cdot \frac{20}{4,47214} = 20$$

$$4,47214 \cdot 4,47213 \approx 20$$

Valor medio: $\frac{4,47214 + 4,47213}{2} \approx 4,47214$

El último paso no produjo ningún mejoramiento. Pasos adicionales también nos darían el mismo número, 4,47214. Por eso podemos finalizar el procedimiento y apuntar el resultado:

$$\sqrt{20} \approx 4,47214$$

Para ver el efecto del valor inicial (que determina la factorización inicial), volvemos a calcular de la raíz de 20, pero ahora con el valor inicial 1.

Paso 1

Factorización: $1 \cdot 20 = 20$

Valor medio: $\frac{1+20}{2} = 10,5$

Paso 2

Factorización: $10,5 \cdot ? = 20$

$$10,5 \cdot \frac{20}{10,5} = 20$$

$$10,5 \cdot 1,90476 \approx 20$$

Valor medio: $\frac{10,5 + 1,90476}{2} = 6,20238$

Paso 3

Factorización: $6,20238 \cdot ? = 20$

$$6{,}20238 \cdot \frac{20}{6{,}20238} = 20$$

$$6{,}20238 \cdot 3{,}22457 \approx 20$$

Valor medio: $$\frac{6{,}20238 + 3{,}22457}{2} \approx 4{,}71348$$

Paso 4

Factorización: $$4{,}71348 \cdot ? = 20$$

$$4{,}71348 \cdot \frac{20}{4{,}71348} = 20$$

$$4{,}71348 \cdot 4{,}24315 \approx 20$$

Valor medio: $$\frac{4{,}71348 + 4{,}24315}{2} \approx 4{,}47832$$

Paso 5

Factorización: $$4{,}47832 \cdot ? = 20$$

$$4{,}47832 \cdot \frac{20}{4{,}47832} = 20$$

$$4{,}47832 \cdot 4{,}46596 \approx 20$$

Valor medio: $$\frac{4{,}47832 + 4{,}46596}{2} = 4{,}47214$$

Paso 6

Factorización: $$4{,}47214 \cdot ? = 20$$

$$4{,}47214 \cdot \frac{20}{4{,}47214} = 20$$

$$4{,}47214 \cdot 4{,}47213 \approx 20$$

Valor medio: $$\frac{4{,}47214 + 4{,}47213}{2} \approx 4{,}47214$$

El último paso no produjo ningún mejoramiento. Pasos adicionales también nos darían el mismo número, 4,47214. Por eso podemos finalizar el procedimiento y apuntar el resultado:

$$\sqrt{20} \approx 4,47214$$

Con el valor inicial 1 se necesitan dos pasos más, lo cual parece razonable porque 1 está más lejos de la raíz (4,47214) que el valor inicial 4.

Observaciones

1. El método de Herón *converge cuadráticamente*. A grandes rasgos, esto significa en la práctica que en cada paso se duplica el número de decimales correctos.

2. El método de Herón es *iterativo*, es decir, el mismo procedimiento se repite en cada paso. También ecuaciones más complicadas se pueden resolver mediante métodos iterativos. De hecho, el método de Herón es un caso especial del método de Newton.

3. Al calcular raíces podemos limitarnos a **números entre 1 y 100**. Eso lo veremos en la próxima sección 7.3.

7.3 La raíz de números grandes y pequeños

El método de Herón funciona con números de cualquier magnitud, ya sean muy grandes o pequeños. Dependiendo de la factorización inicial, el método de Herón puede requerir muchos pasos al calcular la raíz de un número grande o pequeño.

Ahora vamos a ver que al calcular raíces podemos limitarnos a números entre 1 y 100. La raíz de un número entre 1 y 100 se ubica entre 1 y 10, por lo tanto cualquier número entre 1 y 10 sería un buen valor inicial.

Primero consideramos ejemplos de cómo **reducir** las raíces de números grandes o pequeños a raíces de números entre 1 y 100. En segundo lugar, **calculamos** la raíz de un número grande, con una exactitud de 5 cifras decimales.

Ejemplo 1 (Número grande)

$$\begin{aligned}\sqrt{200.000} &= \sqrt{20\cdot 10.000}\\ &= \sqrt{20}\cdot\sqrt{10.000}\\ &= \sqrt{20}\cdot 100\end{aligned}$$

Ejemplo 2 (Número pequeño)

$$\begin{aligned}\sqrt{0,02} &= \sqrt{\frac{2}{100}}\\ &= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{100}}\\ &= \frac{\sqrt{2}}{10}\end{aligned}$$

Ejemplo 3 (Números con potencias de 10 con exponente **par**)

$$\begin{aligned}\sqrt{7,42\cdot 10^{60}} &= \sqrt{7,42}\cdot\sqrt{10^{60}}\\ &= \sqrt{7,42}\cdot 10^{30}\end{aligned}$$

Ejemplo 4 (Números con potencias de 10 con exponente **impar**)

$$\begin{aligned}\sqrt{7,42\cdot 10^{61}} &= \sqrt{7,42\cdot 10\cdot 10^{60}}\\ &= \sqrt{74,2}\cdot\sqrt{10^{60}}\\ &= \sqrt{74,2}\cdot 10^{30}\end{aligned}$$

El truco es que la raíz de los números 100, 10.000, 1.000.000, etc. es fácil de encontrar si el número de ceros es par. La raíz es un 1 con la mitad de ceros. Así por ejemplo:

$$\sqrt{100} = 10,$$
$$\sqrt{10.000} = 100,$$
$$\sqrt{1.000.000} = 1000, \text{ etc..}$$

Si escribimos los números como potencias de 10, el exponente contiene el número de ceros:

$$100 = 10^2,$$
$$10.000 = 10^4,$$
$$1.000.000 = 10^6, \text{ etc.}$$

La raíz cuadrada de tales potencias es entonces la potencia con la mitad del exponente (reducir a la mitad el número de ceros):

$$\sqrt{10^2} = 10^1 = 10,$$
$$\sqrt{10^4} = 10^2 = 100,$$
$$\sqrt{10^6} = 10^3 = 1000,$$
$$\sqrt{10^{50}} = 10^{25}, \text{ etc.}$$

Finalmente, ahora **calculamos** la raíz de un número grande, con una exactitud de 5 cifras decimales.

Ejemplo 5 (Raíz de un número grande)

Calcular $\sqrt{3{,}1416 \cdot 10^{75}}$.

Solución

1. Reducir a la raíz de un número entre 1 y 100

$$\begin{aligned}\sqrt{3{,}1416 \cdot 10^{75}} &= \sqrt{3{,}1416 \cdot 10 \cdot 10^{74}} \\ &= \sqrt{31{,}416 \cdot 10^{74}} \\ &= \sqrt{31{,}416} \cdot \sqrt{10^{74}} \\ &= \sqrt{31{,}416} \cdot 10^{37}\end{aligned}$$

2. Calcular $\sqrt{31,416}$

La raíz de 31,416 se encuentre entre 5 y 6 porque $5 \cdot 5 = 25$ y $6 \cdot 6 = 36$. Por eso tomamos el valor inicial 5 en el método de Herón.

Paso 1

Factorización: $5 \cdot ? = 31,416$

$$5 \cdot \frac{31,416}{5} = 31,416$$

$$5 \cdot 6,2832 = 31,416$$

Valor medio: $\dfrac{5 + 6,2832}{2} = 5,6416$

Paso 2

Factorización: $5,6416 \cdot ? = 31,416$

$$5,6416 \cdot \frac{31,416}{5,6416} = 31,416$$

$$5,6416 \cdot 5,5686 \approx 31,416$$

Valor medio: $\dfrac{5,6416 + 5,5686}{2} = 5,6051$

Paso 3

Factorización: $5,6051 \cdot ? = 31,416$

$$5,6051 \cdot \frac{31,416}{5,6051} = 31,416$$

$$5,6051 \cdot 5,6049 \approx 31,416$$

Valor medio: $\dfrac{5,6051 + 5,6049}{2} = 5,6050$

Paso 4

Factorización: $5,6050 \cdot ? = 31,416$

$$5,6050 \cdot \frac{31,416}{5,6050} = 31,416$$

$$5,6050 \cdot 5,6050 \approx 31,416$$

Valor medio: $$\frac{5,6050 + 5,6050}{2} = 5,6050$$

El último paso no produjo ningún mejoramiento. Pasos adicionales también nos darían el mismo número, 4,47214. Por eso podemos finalizar el procedimiento y apuntar el resultado:

$$\sqrt{31,416} \approx 5,6050$$

3. Determinar $\sqrt{3,1416 \cdot 10^{75}}$

$$\begin{aligned}\sqrt{3,1416 \cdot 10^{75}} &= \sqrt{31,416} \cdot 10^{37} \\ &\approx 5,6050 \cdot 10^{37}\end{aligned}$$

La manera más adecuada de escribir un número tan grande es mediante una potencia de 10 (*notación científica*, también conocida como *notación de punto flotante*):

$$\sqrt{3,1416 \cdot 10^{75}} \approx 5,6050 \cdot 10^{37}.$$

La forma explícita sería muy extensa:

$$\sqrt{3,1416 \cdot 10^{75}} \approx$$

56.050.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000

Ejercicios

1. Calcular la raíz cuadrada de los números 2, 3, 5, 10 y 65 con seis decimales.

2. Calcular la raíz cuadrada de 80 con seis decimales de dos maneras: usando los valores iniciales de 1 y 10. (Factorizaciones iniciales: $1 \cdot 80 = 80$ y $10 \cdot 8 = 80$.)

3. Encontrar la raíz cuadrada de los siguientes números:
a) 9, 900, 90.000, 9.000.000, 0,09, 0,0009, 0,000.009.
b) 90, 9000, 0,9, 0,009.

4. Calcular la raíz cuadrada de

$$4{,}51 \cdot 10^{30} \quad \text{y} \quad 4{,}51 \cdot 10^{31}$$

con seis dígitos.

Respuestas

Respuestas del capítulo 2: Resolución gráfica

1. a) 1, b) 2, c) 1, d) 1, e) 5, f) 3, g) 2, h) 3, i) 6, j) 4
2. a) 2, b) 3
3. 5 cm

Respuestas del capítulo 3: Resolución algebraica

1. a) 2, –2 b) 7, –7 c) 0 d) 7,071, –7,071 e) 1,414, –1,414 f) no existe g) 1,7321, –1,7321 h) 3,162, –3,162 i) 100, –100
2. a) 1, –3 b) 2, –6 c) 1, –7 d) 1, –9 e) 2, –5 f) 3, –4 g) 6, –11
3. a) 4, 2 b) 3, 1 c) 2, 1 d) 1, –2 e) 4, 3 f) 5, 2 g) 1, –3 h) 6, –2
4. 2, –1
5. 1, –2
6. 5 cm

Respuestas del capítulo 4: Fórmula de solución

1. a) 4, 2 b) 3, 1 c) 2, 1 d) 1, –2 e) 4, 3 f) 5, 2 g) 1, –3 h) 6, –2
2. a) –3 b) 3, –2 c) no existe d) 2,5, 1,5 e) 1/3, –1 f) –0,38, –2,62
3. 2, –1
4. 1, –2
5. 8 cm

Respuestas del capítulo 5: Resolución mediante sustitución

1. a) 2, –4 b) 2, –6 c) 1, –7 d) 1, –9 e) 2, –5
2. a) 4, 2 b) 3, 1 c) 2, 1 d) 1, –2 e) 4, 3

Respuestas del capítulo 6: Ecuaciones fraccionarias y con raíces

1. a) –0,5, –1 b) 1, –3 c) 5, –3 d) 7, –1 e) 7, –1
   f) 5, –3
2. a) 4, 1 b) 9, 1 c) 9, 4 d) 1 e) 4 f) 1 g) 4
   h) 4 i) 2

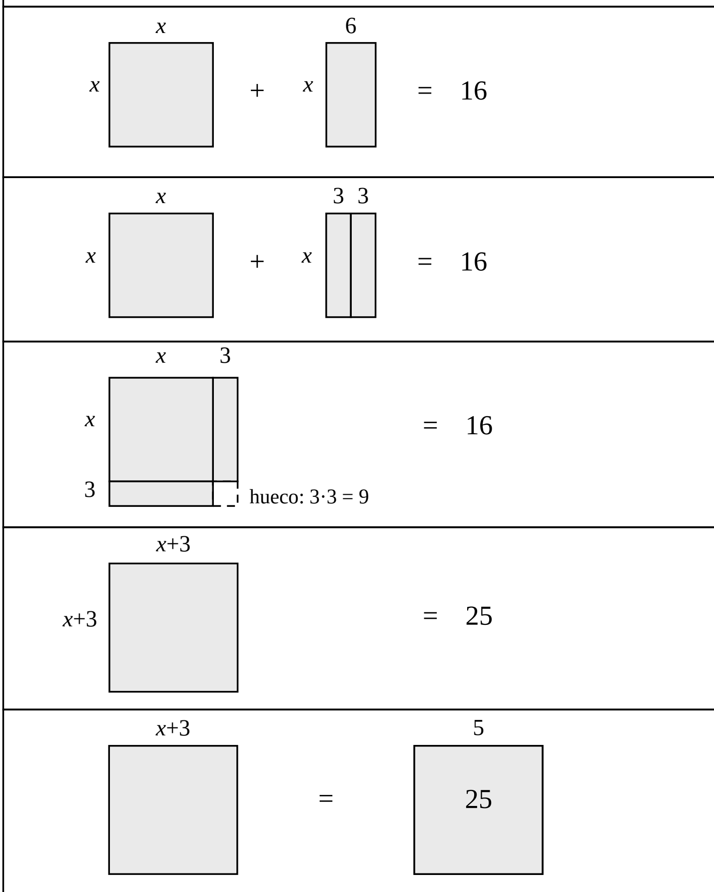
Respuestas del capítulo 7: Cálculo de raíces

1. $\sqrt{2} \approx 1,414214$, $\sqrt{3} \approx 1,732051$, $\sqrt{5} \approx 2,236068$
   $\sqrt{10} \approx 3,162278$, $\sqrt{65} \approx 8,062258$
2. $\sqrt{80} \approx 8,944272$
3. a)
   $\sqrt{9} = 3$, $\sqrt{900} = 30$, $\sqrt{90.000} = 300$, $\sqrt{9.000.000} = 3000$,
   $\sqrt{0,09} = 0,3$, $\sqrt{0,0009} = 0,03$,
   $\sqrt{0,000.009} = 0,003$
   b)
   $\sqrt{90} = 9,48683...$, $\sqrt{9000} = 94,8683...$, $\sqrt{0,9} = 0,948683...$
   $\sqrt{0,009} = 0,0948683...$
4. $2,12368 \cdot 10^{15}$, $6,71565 \cdot 10^{15}$

Apéndice 1: Resumen

Resolución gráfica de una ecuación cuadrática

$$x^2 \quad + \quad 6x \quad = \quad 16$$



$$x+3 = 5$$
$$x = 2$$

Resolución mediante completación de cuadrados

Resolución de la ecuación: $x^2 + 6x = 16$

$$
\begin{aligned}
x^2 + 6x &= 16 && \mid 6:2=3 \\
x^2 + 2\cdot 3x &= 16 && \mid +3^2 \text{ (completar el cuadrado)} \\
x^2 + 2\cdot 3x + 3^2 &= 16 + 3^2 && \mid \text{suma al cuadrado} \\
(x+3)^2 &= 25 && \mid \text{sacar la raíz} \\
x+3 &= \pm 5 && \mid -3 \\
x &= \pm 5 - 3 && \mid \text{considerar los casos} \\
x_1 &= +5-3 = 2 \\
x_2 &= -5-3 = -8
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, la ecuación tiene estas dos soluciones:

$$x_1 = 2$$
$$x_2 = -8$$

La fórmula de solución

Fórmula de solución
La ecuación cuadrática $$x^2 + px + q = 0$$ tiene las soluciones $$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Las fórmulas de Vieta

Las dos soluciones x_1 y x_2 de la ecuación cuadrática

$$x^2 + px + q = 0,$$

tienen la propiedad que

$$x_1 + x_2 = -p$$

$$x_1 \cdot x_2 = q$$

La fórmula de solución de Euler

Fórmula de solución de Euler
La ecuación cuadrática $$x^2 = ax + b$$ tiene las soluciones $$x_{1/2} = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b}.$$

Resolución mediante sustitución

Resolución de la ecuación: $x^2 + 6x = 16$

Sustituir $x = z + a$:

$$\begin{aligned} x^2 + 6x &= 16 \\ (z+a)^2 + 6(z+a) &= 16 \\ z^2 + 2az + a^2 + 6z + 6a &= 16 \\ z^2 + (2a+6)z + a^2 + 6a &= 16 \\ z^2 + (2a+6)z &= 16 - a^2 - 6a \end{aligned}$$

$2a + 6 = 0$ implica $a = -3$. La sustitución es $x = z - 3$.

Sustituir $a = -3$ en la ecuación cuadrática:

$$\begin{aligned} z^2 + (2a+6)z &= 16 - a^2 - 6a \\ z^2 + 0 &= 16 - 9 + 18 \\ z^2 &= 25 \\ z_{1/2} &= \pm 5 \end{aligned}$$

Sustituir $z_{1/2} = \pm 5$ en $x = z - 3$:

$$\begin{aligned} x_1 &= z_1 - 3 = 5 - 3 = 1 \\ x_2 &= z_2 - 3 = -5 - 3 = -8 \end{aligned}$$

La ecuación tiene las soluciones $x_1 = 2$ y $x_2 = -8$.

Apéndice 2: Números complejos

Algunas ecuaciones cuadráticas no tienen solución, por ejemplo, le ecuación sencilla

$$x^2 = -1\,.$$

Ninguno de los números comunes (*reales*) podría ser una solución, ya que multiplicándolo por sí mismo siempre daría un número positivo o cero.
Ampliamos nuestro concepto de número agregándole un número nuevo *i* que sea una solución de la ecuación planteada arriba, es decir:

$$i^2 = -1\,.$$

Ese número *i* es conocido como la *unidad imaginaria*. Se puede interpretar *i* como la raíz de –1:

$$i = \sqrt{-1}\,.$$

Hablando geométricamente, pasamos de la *recta numérica* a un *plano*. La unidad imaginaria corresponde a un punto ubicado en el plano, pero fuera de la recta numérica.

Ejecutando las cuatro operaciones básicas con números reales y la unidad imaginaria *i*, resultan expresiones de la forma:

$$a + bi\,,$$

por ejemplo $2+3i$, $-4+5i$, $1{,}5+3{,}8i$, etc.
Estas magnitudes compuestas de números reales y de la unidad imaginaria se llaman *números complejos*.

En el ámbito de esos complejos se puede sacar la raíz de un número negativo, por ejemplo:

$$\sqrt{-9} = 3i, \text{ porque } (3i)^2 = 9i^2 = -9\,.$$

Si se incluyen los números complejos, la fórmula de solución de ecuaciones cuadráticas siempre da soluciones.
Así, la ecuación

$$x^2 + 4x + 5 = 0\,,$$

considerada en el capítulo 4, ahora tiene las soluciones:

$$x_1 = -2+i \quad \text{y} \quad x_2 = -2-i\,.$$

Porque

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \qquad |\,\text{sustituir } p=4,\; q=5$$

$$x_{1/2} = -\frac{4}{2} \pm \sqrt{2^2 - 5} \qquad |\,\text{calcular}$$

$$x_{1/2} = -2 \pm \sqrt{-1} = -2 \pm i$$

Las operaciones básicas con números complejos

Los números complejos se traten como si fueran expresiones con números y letras. Solamente hay que tomar en cuenta que, además, se tiene $i^2 = -1$.

Consideramos ejemplos de operaciones básicas con números complejos:

Adición

$(2+3i) + (5+9i) = 7+12i$

Sustracción

$(2+9i) - (6+3i) = -4+6i$

Multiplicación

$$\begin{aligned}(2+3i)\cdot(5+4i) &= 2\cdot 5 + 2\cdot 4i + 3i\cdot 5 + 3i\cdot 4i \\ &= 10 + 8i + 15i + 12i^2 \qquad |\, i^2 = -1 \\ &= 10 + 23i - 12 \\ &= -2 + 23i\end{aligned}$$

División

$$\begin{aligned} \frac{3+7i}{1+2i} &= \frac{(3+7i)\cdot(1-2i)}{(1+2i)\cdot(1-2i)} && |\,\text{suma por diferencia} \\ &= \frac{17+i}{1-4i^2} && |\, i^2=-1 \\ &= \frac{17+i}{1+4} \\ &= \frac{17+i}{5} \\ &= \frac{17}{5}+\frac{1}{5}i \end{aligned}$$

Aquí se utilizó el truco común para deshacerse de la *i* en el denominador $1+2i$: el numerador y el denominador se multiplican por $1-2i$. Entonces se aplica la regla que, en general, el producto de una suma y la diferencia correspondiente es la diferencia de los ***cuadrados***:

$$(a+b)\cdot(a-b)=a^2-b^2\,.$$

Se obteniendo este nuevo denominador:

$$\begin{aligned} (1+2i)\cdot(1-2i) &= 1^2-(2i)^2 \\ &= 1-4i^2 \\ &= 1-4\cdot(-1) \\ &= 1+4 \\ &= 5 \end{aligned}$$

Sobre la historia de los números complejos

Rafael Bombelli (1526 – 1572), en su libro *Algebra*, fue el primero en plantear los números complejos e incluirlos como soluciones de ecuaciones.

El adjetivo en “número *imaginario*” fue introducido por René Descartes (1596 – 1650) en su famoso tratado *Geometrie*.
La expresión *número complejo* fue ideada por Carl Friedrich Gauß (1777 – 1855).

La denominación *i* para la *unidad imaginaria* se debe a Leonhard Euler (1708 – 1783).

Aplicaciones de los números complejos

Ya a fines del siglo XIX el ingeniero electricista Charles Steinmetz (1865 – 1923) introdujo resistencias complejas en circuitos de corriente alterna, logrando una gran simplificación de los cálculos pertinentes.

La mecánica cuántica desarrollada en los años 1920 utiliza números complejos. En una inscripción en la tumba de Erwin Schrödinger (1878 – 1961) está escrita la famosa *ecuación de Schrödinger*:

$$i\hbar\dot{\psi} = H\psi \ .$$

Ella empieza con la unidad imaginaria *i*.

Apéndice 3: La variante de Euler

En la fórmula de solución de la ecuación $x^2 + px + q = 0$ hay dos cambios de signo; tanto p como q aparecen con signos cambiados en la fórmula. En su famoso libro *Instrucción completa de Ágebra*, Leonhard Euler (1707 – 1783) usa una variante de la fórmula que no requiere ningún cambio de signo. Para ello despeja x^2 en la ecuación

$$x^2 + px + q = 0\,,$$

obteniendo

$$x^2 = -px - q.$$

Si comparamos esta ecuación con fórmula de solución, vemos que ya no son necesarios los cambios de signo; $-p$ y $-q$ pasan tal cual a la fórmula:

$$x = \frac{-p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-p}{2}\right)^2 - q}.$$

Con otras notaciones, esto se vuelve aún más claro:

la ecuación cuadrática

$$x^2 = ax + b$$

tiene las soluciones

$$x_{1/2} = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b}.$$

El lado derecho de la fórmula empieza con la mitad del coeficiente de x, luego sigue + o – la raíz del cuadrado del número que acabamos de escribir más la constante (el número que no contiene x). Es *este contenido* de la fórmula de solución lo que hay que aprender, como enfatiza Euler.

Ahora mostramos dos ejemplos de cómo se resuelven ecuaciones cuadráticas con este método. Empezamos con el ejemplo dado por el mismo Euler.

Ejemplo 1 (Euler)

$x^2 = 6x + 7$

Resolución

De $x^2 = 6x + 7$ se tiene inmediatamente $x = 3 \pm \sqrt{9+7} = 3 \pm 4$;

así los dos valores de x son: I.) $x = 7$ y II.) $x = -1$.

Ejemplo 2

$x^2 + 6x = 16$

Resolución

1. Se despeja x^2 en la ecuación cuadrática:

$$\begin{aligned} x^2 + 6x &= 16 \qquad |-6x \\ x^2 &= 16 - 6x \\ x^2 &= -6x + 16 \end{aligned}$$

2. Se aplica el contenido de la fórmula (coeficiente de x es –6, la constante es 16):

$$\begin{aligned} x &= -3 \pm \sqrt{3^2 + 16} \\ &= -3 \pm \sqrt{9+16} \\ &= -3 \pm 5 = \begin{cases} -3+5 = 2 \\ -3-5 = -8 \end{cases} \end{aligned}$$

Las soluciones son por lo tanto $x = 2$ y $x = -8$.