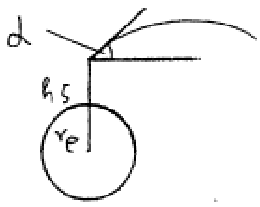
Wurfbahnen im Schwerefeld eines Planeten

Harald Schröer

Wir betrachten eine Wurfbahn, bei der die Anfangsgeschwindigkeit so hoch ist, daß der geworfene Körper in den Weltraum gelangt. Dafür kann das homogene Feld an der Oberfläche eines Planeten (Erde) nicht mehr verwendet werden. Es muß vielmehr das Gravitationsfeld herangezogen werden.

Wir erklären folgende Größen:

h_s = Starthöhe
α = Wurfwinkel
v_0 = Anfangsgeschwindigkeit
h = Wurfhöhe zur Zeit t
r_e = Planetenradius (Erdradius)
m_e = Planetenmasse (Erdmasse)
G = Gravitationskonstante
$R := r_e + h_s$
$r := r_e + h$
r, R sind Entfernungen vom Planetenmittelpunkt.



Ein Körper mit der Masse m, der sich von R bis r bewegt, muß die Arbeit

$$W_{pot} = Gm_e m \cdot \left(\frac{1}{r_e + h_s} - \frac{1}{r_e + h} \right)$$

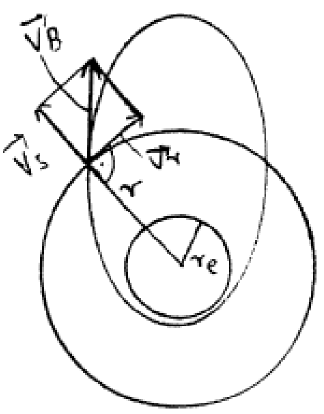
verrichten. Wenn r kleiner ist als R, dann kommt dieser Beitrag zu seiner Bewegungsernergie dazu. Der Energiesatz für die Wurfbahn lautet:

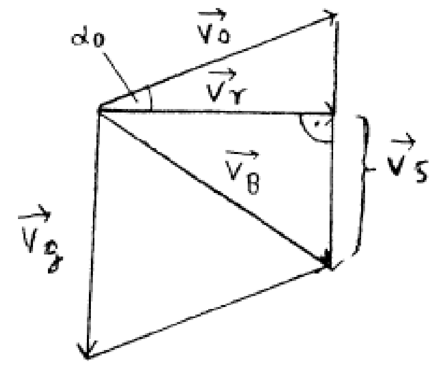
$$\frac{mv_0^2}{2} = W_{pot} + \frac{mv_B^2}{2}$$

v_B ist dabei die Bahngeschwindigkeit in der Höhe h. Mit den Einsetzungen erhalten wir:

$$v_B^2 = v_0^2 - 2Gm_e \cdot \left(\frac{1}{r_e + h_s} - \frac{1}{r_e + h} \right) \tag{1}$$

Wir schauen uns nun die beiden Abbildungen an:





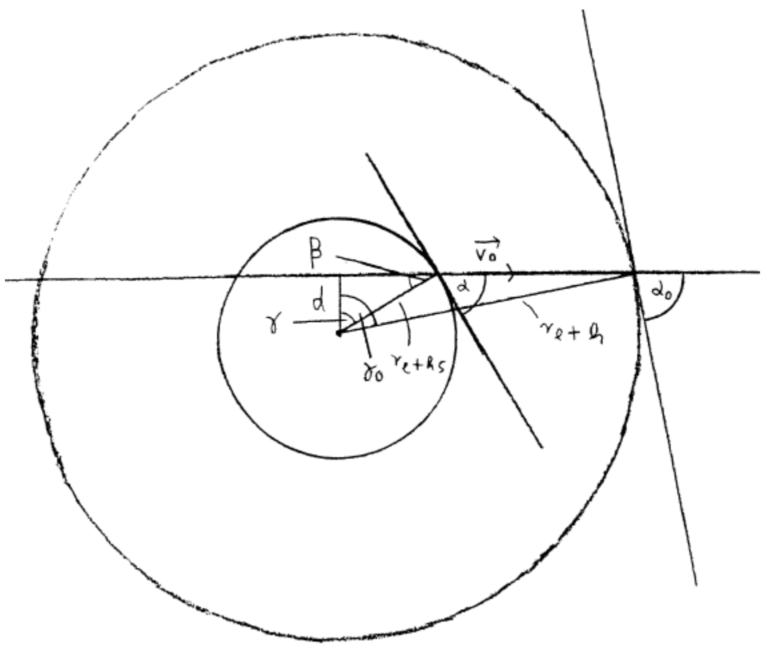
Wir können entnehmen:

$$\vec{v}_B = \vec{v}_0 + \vec{v}_g = \vec{v}_r + \vec{v}_s$$

Die Bahngeschwindigkeit setzt sich zusammen aus der Anfangsgeschwindigkeit $\vec{v}_0$ und der Gravitationskomponente $\vec{v}_g$. Außerdem kann $\vec{v}_B$ in einen senktrechten Geschwindigkeitsanteil $\vec{v}_s$ und einen tangentialen Geschwindigkeitsanteil $\vec{v}_r$ zerlegt werden. Nach der zweiten Abbildung ist dann $\angle(\vec{v}_r, \vec{v}_0) = \alpha_0$ und $v_r = v_0 \cdot \cos \alpha_0$. Also folgt:

$$v_B^2 = \cos^2 \alpha_0 \cdot v_0^2 + v_s^2 \tag{2}$$

Wir werden nun α_0 durch einen Ausdruck ersetzen, der mit dem Wurfwinkel α zusammenhängt.



Die Tangente weist in Richtung von $\vec{v}_r$. $\vec{v}_0$ zeigt in die Richtung der Senkrechten zu d. Es gilt $\gamma + \beta = 90°$ und $\beta + 90° + \alpha = 180°$. Daraus erhalten wir:

$$\gamma = 90° - (180° - 90° - \alpha) = \alpha$$

Analog erhalten wir $\gamma_0 = \alpha_0$. Aus der Abbildung schließen wir:

$$\frac{d}{r_e + h_s} = \cos\gamma = \cos\alpha \qquad \Rightarrow \qquad d = \cos\alpha \cdot (r_e + h_s)$$

und auch:

$$\frac{d}{r_e + h} = \cos\gamma_0 = \cos\alpha_0$$

Nun wird für d eingesetzt:

$$\cos\alpha_0 = \frac{\cos\alpha \cdot (r_e + h_s)}{r_e + h} \tag{3}$$

Lösen wir Gleichung (2) nach v_s auf und setzen wir den Term (3) für $\cos\alpha_0$ ein, so bekommen wir:

$$v_s = \sqrt{v_B^2 - v_0^2 \cos^2\alpha \cdot \left(\frac{r_e + h_s}{r_e + h}\right)^2}$$

Um nun an t heranzukommen, muß die Differentialgleichung $v_s = \frac{dh}{dt}$ gelöst werden. Mit der Trennung der Variablen z.B. nach Forster [3] §11 Satz 1 S.112 kann die Gleichung umgeformt werden zu:

$$t = \int \frac{dh}{v_s(h)} - c$$

Dabei ist c eine Integrationskonstante. Setzt man nun in diese Gleichung den Ausdruck für v_s und darin den Term (1) für v_B ein, dann bekommen wir schließlich:

$$c + t = \int \frac{dh}{\sqrt{v_0^2 - 2Gm_e \cdot \left(\frac{1}{r_e+h_s} - \frac{1}{r_e+h}\right) - \left(v_0 \cos\alpha \cdot \frac{r_e+h_s}{r_e+h}\right)^2}} \tag{4}$$

Bevor wir diese Gleichung integrieren, werden wir erst mal die Wurfweite bestimmen. Dazu haben wir:

$$v_r = v_0 \cdot \cos\alpha_0 = v_0 \cos\alpha \cdot \frac{r_e + h_s}{r_e + h}$$

Damit ist es dann möglich die Winkelgeschwindigkeit w vom Planetenmittelpunkt aus zu bestimmen.

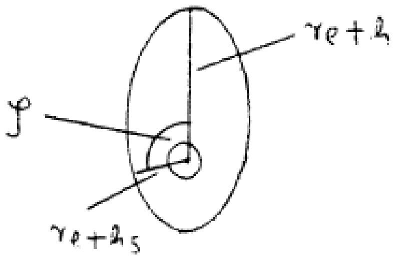
$$w = \frac{v_r}{r_e + h}$$

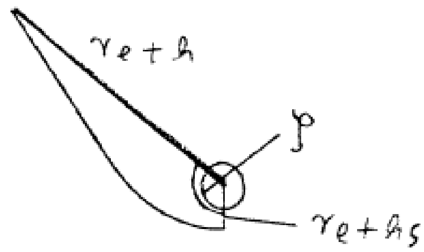
Mit

$$\varphi = \int_0^t w\, dt$$

erhalten wir dann den Winkel im Bogenmaß vom Planetenmittelpunkt aus gesehen. $\gamma = \frac{180°}{\pi} \cdot \varphi$ ist dieser Winkel in Grad (siehe Abbildung):

ELLIPSE HYPERBEL





$r_e + h$ und φ sind dann die gesuchten Polarkoordinaten der Bahn. Setzen wir nun den Ausdruck für w zusammen mit dem Term für v_r in das Integral für φ ein, so erhalten wir:

$$\varphi = v_0 \cos\alpha \cdot (r_e + h_s) \cdot \int_0^t \frac{dt}{(r_e + h(t))^2} \tag{5}$$

$h(t) = 0$ steht mit der Wurfzeit t_w in Zusammenhang. Vorausgesetzt ist hierbei, daß es ein h_{max} gibt. Das muß nicht immer der Fall sein. Wenn t_w existiert erhalten wir die Wurfweite w auf dem Planeten mit:

$$w = v_0 \cos\alpha \cdot (r_e + h_s)^2 \cdot \int_0^{t_w} \frac{dt}{(r_e + h(t))^2}$$

Bei $h_s = 0$ erhalten wir die Wurfweite auf der Oberfläche.

Wir kommen nun zur Auswertung des Integrals (4) für t. Dieses Integral kann umgeschrieben werden zu:

$$t - c_3 = \int \frac{(r_e + h) \cdot \sqrt{r_e + h_s}\, dh}{\sqrt{v_0^2 \cdot (r_e + h)^2 \cdot (r_e + h_s) - 2Gm_e \cdot (h - h_s) \cdot (r_e + h) - v_0^2 \cos^2\alpha \cdot (r_e + h_s)^3}}$$

c_3 = Integrationskonstante

Definiert man:

$$a := v_0^2 \cdot (r_e + h_s) - 2Gm_e$$
$$2b := 2v_0^2 r_e \cdot (r_e + h_s) - 2Gm_e \cdot (r_e - h_s)$$
$$c := v_0^2 r_e^2 \cdot (r_e + h_s) + 2Gm_e h_s r_e - v_0^2 \cos^2\alpha \cdot (r_e + h_s)^3$$

so folgt:

$$t - c_3 = \int \frac{(r_e + h) \cdot \sqrt{r_e + h_s}}{\sqrt{ah^2 + 2bh + c}}\, dh \tag{6}$$

$$= \int \frac{r_e \cdot \sqrt{r_e + h_s}\, dh}{\sqrt{ah^2 + 2bh + c}} + \int \frac{h \cdot \sqrt{r_e + h_s}\, dh}{\sqrt{ah^2 + 2bh + c}}$$

Bei der Integration ist es maßgeblich, ob $a > 0$,$a = 0$ oder $a < 0$ ist. Dazu soll a etwas näher untersucht werden.

$$a := v_0^2 \cdot (r_e + h_s) - 2Gm_e > 0$$

Daraus folgt:

$$v_0 > \sqrt{\frac{2Gm_e}{r_e + h_s}} \qquad \text{(Hyperbel)}$$

$$a = 0 \qquad \Rightarrow \qquad v_0 = \sqrt{\frac{2Gm_e}{r_e + h_s}} \qquad \text{(Parabel)}$$

$$a < 0 \qquad \Rightarrow \qquad v_0 < \sqrt{\frac{2Gm_e}{r_e + h_s}} \qquad \text{(Ellipse)}$$

Vgl. auch dazu Budo [2] §21.2. S.106 Gleichung (17).

$$\sqrt{\frac{2Gm_e}{r_e + h_s}}$$

ist die Entweichsgeschwindigkeit vom Planeten mit Masse m_e. Diese Geschwindigkeit wird auch als Fluchtgeschwindigkeit oder zweite kosmische Geschwindigkeit bezeichnet. Bei der Hyperbel und der Parabel ist $h(t)$ eindeutig. Bei der Ellipse gibt es ein h_{max}, zu einen bestimmten h können mehrere Zeiten zugeordnet sein.

1 Die Hyperbel

Wir könnten für die Berechnung der Gleichung (6) ein Integral aus Ryshik [6] Band 1 S.115 Nr.2.261 und S.117 Nr.2.264 verwenden. Wir ziehen allerdings Integrale aus Gröbner [4] Kapitel 231 S.37 Nr.8a und 7b heran. Wir benutzen die Integralzerlegung von Gleichung (6). Das Integral 8a ergibt:

$$\int \frac{r_e \cdot \sqrt{r_e + h_s}\, dh}{\sqrt{ah^2 + 2bh + c}} = \frac{r_e \cdot \sqrt{r_e + h_s}}{\sqrt{a}} \cdot \ln\left(c_1 \cdot \left(\frac{ah + b}{\sqrt{a}} + \sqrt{ah^2 + 2bh + c}\right)\right)$$

$a > 0$ ist erfüllt. $\qquad c_1 =$ Integrationskonstante

Nun zum Integral 7b:

$$\int \frac{h \cdot \sqrt{r_e + h_s}\, dh}{\sqrt{ah^2 + 2bh + c}} = \frac{\sqrt{r_e + h_s}}{a} \cdot \sqrt{ah^2 + 2bh + c} - \frac{b}{a} \cdot \int \frac{\sqrt{r_e + h_s}\, dh}{\sqrt{ah^2 + 2bh + c}}$$

Die beiden Integrale summiert ergibt:

$$t = \frac{\sqrt{r_e + h_s}}{a} \cdot \sqrt{ah^2 + 2bh + c} + \left(r_e - \frac{b}{a}\right) \cdot \int \frac{\sqrt{r_e + h_s}\, dh}{\sqrt{ah^2 + 2bh + c}} + c_3$$

$$= \frac{\sqrt{r_e + h_s}}{a} \cdot \sqrt{ah^2 + 2bh + c} + c_2 + \left(r_e - \frac{b}{a}\right) \cdot \frac{\sqrt{r_e + h_s}}{\sqrt{a}} \cdot \ln\left(c_1 \cdot \left(\frac{ah + b}{\sqrt{a}} + \sqrt{ah^2 + 2bh + c}\right)\right)$$

$c_1, c_2, c_3 =$ Integrationskonstanten

Die Wahl der Integrationskonstanten c_1, c_2 kann durch $t(h_s) = 0$ erfolgen.

Nun kommen wir wieder zur Gleichung (5) für φ zurück und zwar für Hyperbel, Parabel und Ellipse:

$$\varphi = v_0 \cos\alpha \cdot (r_e + h_s) \cdot \int\limits_0^t \frac{dt}{(r_e + h(t))^2}$$

Wir wenden nun die Substitutionsregel an:

$$h = f(t) \qquad f(0) = h(0) = h_s \qquad f(t) = h(t) = h$$

Mit der Umkehrregel:

$$\frac{dh}{dt} = \frac{1}{\frac{d}{dh}(f^{-1}(h))} = \frac{1}{\frac{d}{dh}t(h)}$$

$$\frac{d}{dh}t(h) =: T(h) \qquad \Rightarrow \qquad \frac{dh}{dt} = \frac{1}{T(h)}$$

Das Integral transformiert sich dann in:

$$\varphi = v_0 \cos\alpha \cdot (r_e + h_s) \cdot \int\limits_{h_s}^h \frac{T(h)\,dh}{(r_e + h)^2} \tag{7}$$

Diese Gleichung gilt für Hyperbel, Parabel und Ellipse. Nach Gleichung (6) ist:

$$T(h) = \frac{(r_e + h) \cdot \sqrt{r_e + h_s}}{\sqrt{ah^2 + 2bh + c}}$$

Damit folgt für alle Kegelschnitte:

$$\varphi = v_0 \cos\alpha \cdot (r_e + h_s)^{\frac{3}{2}} \cdot \int\limits_{h_s}^h \frac{dh}{(r_e + h) \cdot \sqrt{ah^2 + 2bh + c}}$$

Im Fall von Hyperbel und Ellipse ist $a \neq 0$. Dann kann die Integration mit Gröbner [4] Kap. 231 S.38 Nr. 10a -10d durchgeführt werden. Bei der Parabel ist $a = 0$. Hier ist die Integration nach Gröbner [4] Kap. 212 S.28 Nr.9a -9c möglich.

2 Die Parabel

Im Fall der Parabel vereinfacht sich das Integral (6) für t wegen $a = 0$ folgenderweise: $c_3 =$ Integrationskonstante

$$t - c_3 = \int \frac{r_e \cdot \sqrt{r_e + h_s}}{\sqrt{2bh + c}}\,dh + \int \frac{h \cdot \sqrt{r_e + h_s}}{\sqrt{2bh + c}}\,dh$$

nach Bronstein [1] Kap. 1.3.3.3. S.42 Nr. 124,125:

$$= \sqrt{r_e + h_s} \cdot \frac{2 \cdot \sqrt{2bh + c}}{2b} \cdot r_e + \frac{2 \cdot (2bh - 2c)}{3 \cdot 4b^2} \cdot \sqrt{2bh + c} \cdot \sqrt{r_e + h_s}$$

$$= \frac{\sqrt{r_e + h_s} \cdot \sqrt{2bh + c}}{b} \cdot \left(r_e + \frac{bh - c}{3b} \right)$$

c_3 ist durch $t(h_s) = 0$ bestimmt.

3 Die Ellipse

In diesem Fall ist $a < 0$. Wir führen die Integration von Gleichung (6) nach Gröbner [4] Kap. 231 S.37 Nr. 7b und 8b durch. Es muß $b^2 - ac > 0$ sein.

$$\frac{t}{\sqrt{r_e + h_s}} = \int \frac{r_e \, dh}{\sqrt{ah^2 + 2bh + c}} + \int \frac{h \, dh}{\sqrt{ah^2 + 2bh + c}} + c_3$$

mit Integral 7b:

$$= \left(r_e - \frac{b}{a} \right) \cdot \int \frac{dh}{\sqrt{ah^2 + 2bh + c}} + \frac{\sqrt{ah^2 + 2bh + c}}{a} + c_4$$

Integral 8b:

$$= \left(r_e - \frac{b}{a} \right) \cdot \frac{-1}{\sqrt{-a}} \cdot \arcsin \left(\frac{ah + b}{\sqrt{b^2 - ac}} \right) + \frac{\sqrt{ah^2 + 2bh + c}}{a} + c_5$$

c_i = Integrationskonstanten

Damit ist $t(h)$ bekannt. c_5 kann durch $t(h_s) = 0$ gewählt werden. Somit haben wir dieses Problem vollständig gelöst. In Budo [2] §21.3 S.107 ff. und §45.2 S.244 ff. ist eine andere Lösung dieses Problems angegeben. Im Kamke [5] Kap. C.9 S.627 Nr.9.26 ist die zugehörige dreidimensionale vektorielle Differentialgleichung gelöst worden und zwar für jede Zentralkraft.

Literatur

[1] I.N. Bronstein, K.A. Semendjajew „Taschenbuch der Mathematik“ Teubner Verlagsgesellschaft Leipzig 1985 22.Auflage

[2] A Budo „Theoretische Mechanik“ 10.Auflage VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften Berlin 1980

[3] Otto Forster „Analysis 2“ 5.Auflage 1984 Vieweg Verlag Braunschweig

[4] Wolfgang Gröbner und Nikolaus Hofreiter „Integraltafel Erster Teil“ 5.Auflage 1975 Springer Verlag Wien

[5] Erich Kamke „Differentialgleichungen: Lösungsmethoden und Lösungen“ Band 1 10.Auflage Teubner Verlag Stuttgart 1983

[6] I.Ryshik und I.Gradstein „Summen-, Produkt- und Integraltafeln“ Band 1 Verlag Harri Deutsch Thun 1981