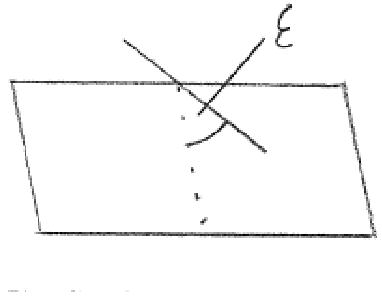
Projektionen von Winkeln und Wurfbahnen auf geneigter Oberfläche

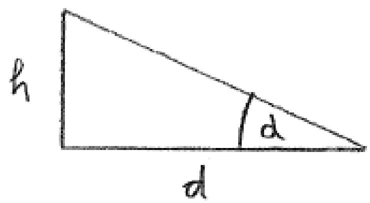
Harald Schröer

2002

1 Projektionen von Winkeln

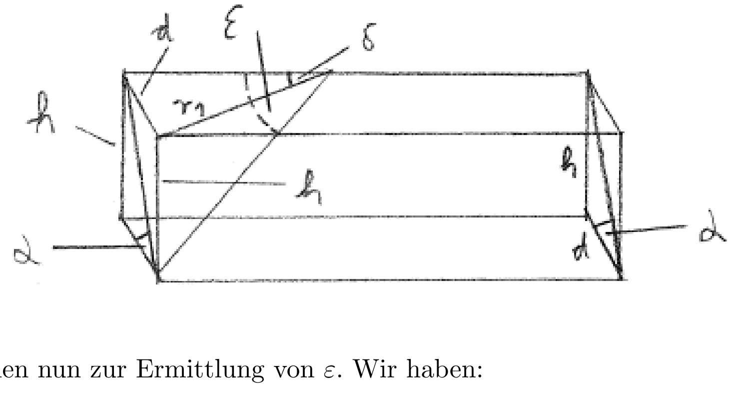
Wir wollen uns hier mit der Projektion von Winkeln beschäftigen. Es handelt sich hier um einen Sachverhalt der in der mathematischen Literatur kaum erwähnt wird. Der Leser bekommt hier einen Eindruck wie sich Winkel unter Projektionen ändern können.





Eine Gerade dreht sich um den Winkel δ von der Flächenkante aus gesehen. Die Ebene ist unter dem Winkel α geneigt:

ε ist der jeweilige Neigungswinkel unter dem Drehwinkel δ. Dazu kann man sich die folgende Abbildung anschauen:



Wir kommen nun zur Ermittlung von ε. Wir haben:

$$\tan \varepsilon = \frac{h}{r_1}$$

h und r_1 müssen ersetzt werden:

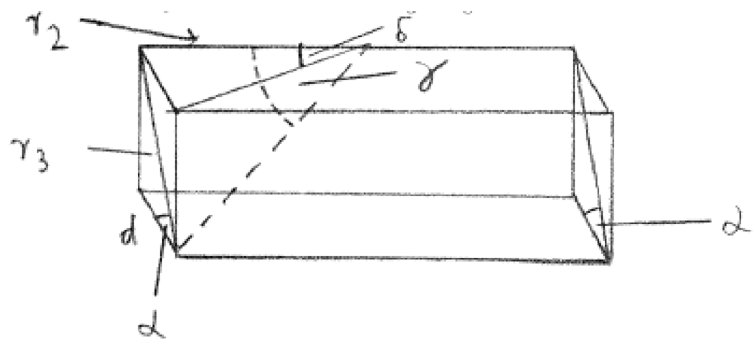
$$h = d \cdot \tan\alpha \qquad r_1 = \frac{d}{\sin\delta}$$

Damit erhalten wir durch Einsetzung:

$$\tan\varepsilon = \tan\alpha \cdot \sin\delta \tag{1}$$

Spezialfall: $\varepsilon = \alpha$ bei $\delta = 90°$

Nun wollen wir uns dem Winkel γ auf der geneigten Ebene zuwenden. γ ist die Projektion von δ auf der geneigten Ebene.



Aus der Abbildung entnehmen wir:

$$\tan\gamma = \frac{r_3}{r_2}$$

Wir ersetzen r_3 und r_2 durch:

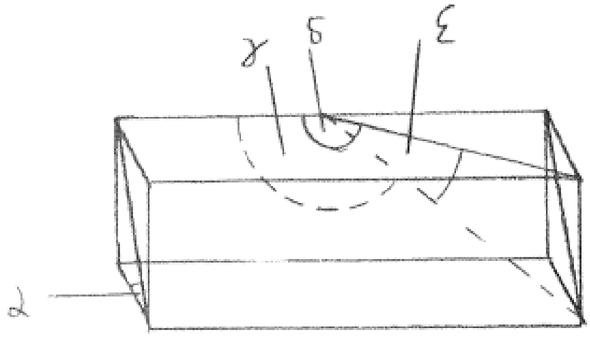
$$r_3 = \frac{d}{\cos\alpha} \qquad r_2 = \frac{d}{\tan\delta}$$

Wir bekommen:

$$\tan\gamma = \frac{\tan\delta}{\cos\alpha} \tag{2}$$

Spezialfall: $\gamma = \delta$ für $\alpha = 0$

Die Erweiterung auf $0 \leq \delta \leq 180°$:



Nach der Abbildung und Gleichung (1) ist:

$$\tan\varepsilon = \tan\alpha \cdot \sin(180^\circ - \delta)$$

Mit $\sin(180^\circ - \delta) = \sin\delta$ kommen wir wieder zu Gleichung (1).

Für den Winkel γ können wir mit Gleichung (2) folgern:

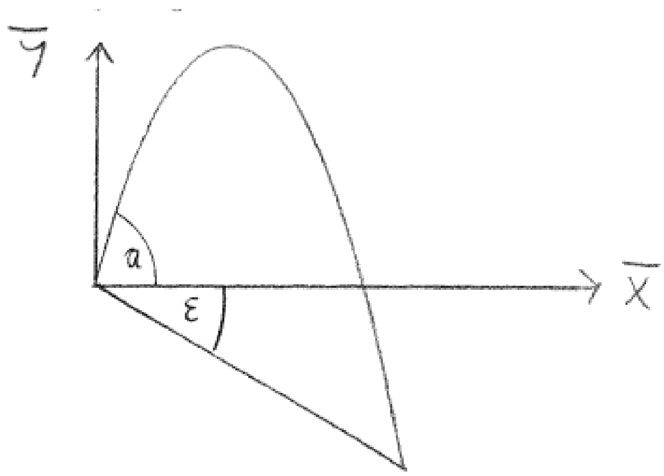
$$\tan(180^\circ - \gamma) = \frac{\tan(180^\circ - \delta)}{\cos\alpha}$$

Mit Hilfe von $\tan(180^\circ - a) = -\tan a$ erhalten wir wieder Gleichung (2).

Also gelten die Gleichungen (1) und (2) für $\delta \in [0, 180^\circ]$.

2 Eine Anwendung: Wurfbahnen auf geneigter Oberfläche

Dieser Sachverhalt kann bei Wurfbahnen auf Planeten mit geneigter Oberfläche angewendet werden. Weil ein homogenes Schwerefeld im lokalen Bereich vorliegt, sind die Wurfbahnen entsprechend geneigte Parabeln. Wir führen zunächst ein Koordinatensystem $\bar{x}$ und $\bar{y}$ ein. $\bar{y}$ ist parallel zur Gravitationsbeschleunigung $\vec{g}$. $\bar{x}$ liegt senkrecht dazu.



v = Anfangsgeschwindigkeit
t = Zeit
a = Wurfwinkel

Wurfbahngleichungen:

$$\bar{x} = vt \cdot \cos a \tag{3}$$

$$\bar{y} = vt \cdot \sin a - \frac{gt^2}{2} \tag{4}$$

$$\bar{y} = \bar{x} \cdot \tan a - \frac{gx^2}{2v^2\cos^2 a} \tag{5}$$

Steigzeit:

$$\bar{t}_s = \frac{v \cdot \sin a}{g}$$

Steighöhe:

$$\bar{h} = \frac{v^2 \cdot \sin^2 a}{2g}$$

Durch die Ableitungen nach der Zeit kommen wir zu den Geschwindigkeitskomponenten:

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = \bar{v}_{\bar{x}} = v \cdot \cos a$$

$$\frac{d\bar{y}}{dt} = \bar{v}_{\bar{y}} = v \cdot \sin a - gt$$

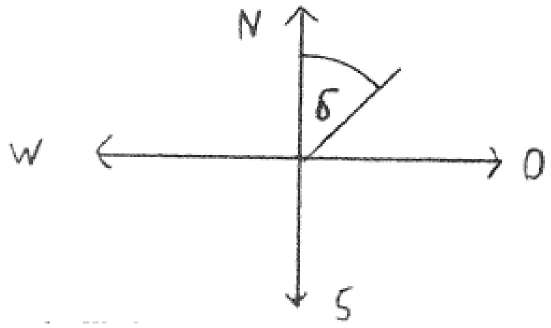
Damit können wir die Bahngeschwindigkeit $v_B = \sqrt{\bar{v}_{\bar{x}}^2 + \bar{v}_{\bar{y}}^2}$ ausrechnen. Unter Verwendung von $\sin^2 a + \cos^2 a = 1$ erhalten wir:

$$v_B = \sqrt{v^2 - 2g \cdot \left(vt \cdot \sin a - \frac{gt^2}{2} \right)}$$

Die Wurfweite und die Wurfzeit müssen anders bestimmt werden, da die Ebene geneigt ist. α ist wieder der Neigungswinkel der Ebene. Nach der Gleichung (1) gilt:

$$-\tan \varepsilon = \tan(-\varepsilon) = \tan \alpha \cdot \sin(\delta - 90°) = -\tan \alpha \cdot \cos \delta$$

Also haben wir $\tan \varepsilon = \tan \alpha \cdot \cos \delta$.



N = NORDEN
O = OSTEN
S = SÜDEN
W = WESTEN

Zur Ermittlung der Wurfzeit t_w:

$$\sin a \cdot v \cdot t_w - \frac{gt_w^2}{2} = \tan \varepsilon \cdot \cos a \cdot v \cdot t_w$$

Alle Glieder enthalten t_w. Es kann also durch t_w dividiert werden.

$$\sin a \cdot v - \frac{gt_w}{2} = \tan \varepsilon \cdot \cos a \cdot v$$

Auflösung nach t_w:

$$t_w = 2 \cdot \frac{\sin a \cdot v - \tan \varepsilon \cdot \cos a \cdot v}{g}$$

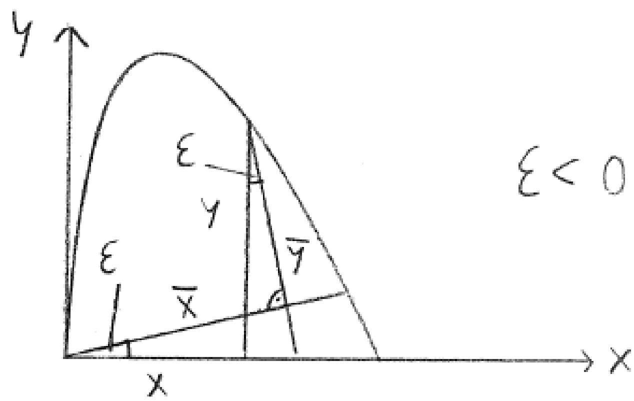
Die Wurfweite $\bar{w}$ bekommt man, wenn man die Wurfzeit in die Gleichung (3) einsetzt:

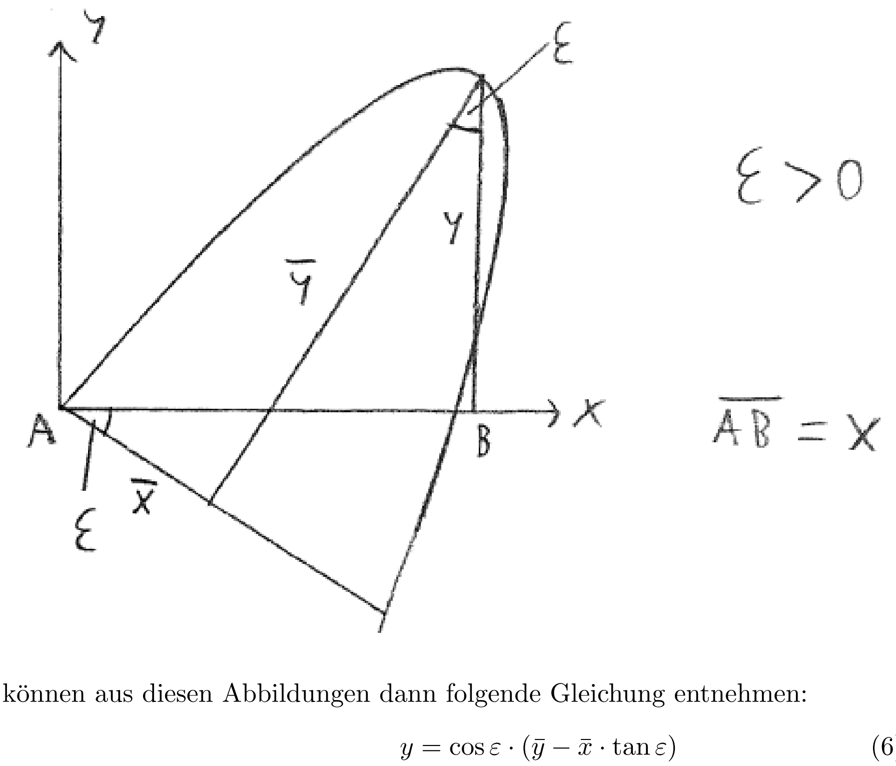
$$\bar{w} = \cos a \cdot v \cdot t_w$$

$\bar{y}$ zur Zeit t_w können wir darstellen mit:

$$\bar{y}_w = \sin a \cdot v \cdot t_w - \frac{g t_w^2}{2}$$

Um nun an die wirklichen x und y zu kommen, müssen wir die Wurfparabel um den Winkel ε drehen. y steht senkrecht zur Oberfläche und x ist parallel zur Oberfläche.





Wir können aus diesen Abbildungen dann folgende Gleichung entnehmen:

$$y = \cos\varepsilon \cdot (\bar{y} - \bar{x} \cdot \tan\varepsilon) \tag{6}$$

$$y = \cos\varepsilon \cdot \left(\sin a \cdot vt - \frac{gt^2}{2} - \tan\varepsilon \cos a \cdot vt\right) \tag{7}$$

Durch Ableitung:

$$\frac{dy}{dt} = v_y = \cos\varepsilon \cdot (\sin a \cdot v - gt - \tan\varepsilon \cos a \cdot v)$$

Aus den letzten Abbildungen schließen wir auch auf:

$$x = \frac{\bar{x}}{\cos\varepsilon} + y \cdot \tan\varepsilon \tag{8}$$

Außerdem ist $v_x = \frac{dx}{dt}$. Die Bahngeschwindigkeit bekommen wir mit $v_B = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$. Der wahre Wurfwinkel ergibt sich mit $a - \varepsilon$. Durch Errechnen des Maximums von y (Gleichung (7)) mit Hilfe der Differentialrechung kann die Steigzeit und die Steighöhe bezüglich der Koordinaten x und y bestimmt werden. Die Wurfweite bezüglich x bekommen wir durch Einsetzen von t_w für t in Gleichung (8). Wir haben noch nicht über den Betrag des Winkels α auf einen Planeten gesprochen. Dazu verweisen wir auf Schröer [1], dort wird der Neigungswinkel α bei konstanter Rotationszeit (Winkelgeschwindigkeit) als auch bei nicht konstanter Rotationszeit berechnet. Auf der Erde beträgt α bei 50 Grad nördlicher oder südlicher Breite ungefähr ein Hunderstel Grad.

Literatur

[1] Harald Schröer „Orientierungstheorie“, Wissenschaft und Technik Verlag, Berlin, 2002