Kegelschnittspiegel

Harald Schröer

2001

1 Kegelschnittspiegel allgemein

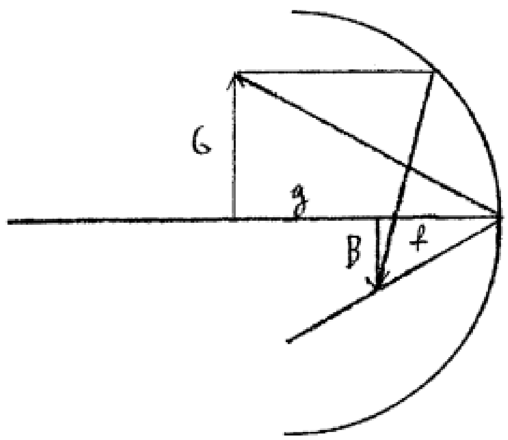
Wir werden hier nach dem Grund suchen, warum bei allen Kegelschnittspiegeln die Abbildungsgleichungen

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{g} + \frac{1}{\overline{b}} \qquad\qquad \frac{G}{B} = \frac{g}{\overline{b}}$$

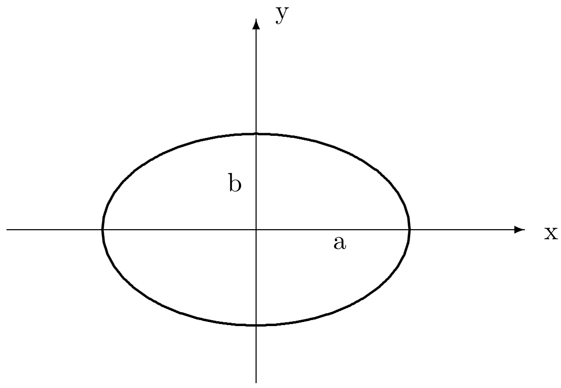
gültig sind. Dabei sind:

f = Brennweite des Spiegels
g = Gegenstandsweite
$\overline{b}$ = Bildweite
G = Gegenstandsgröße
B = Bildgröße

Vgl. dazu auch folgende Abbildung:



Wir wissen, daß bei kugelförmigen Spiegeln diese Abbildungsgleichungen gültig sind. Wir schauen uns nun die Ellipse an:



$a, b =$ große und kleine Halbachse

Es gilt die Mittelpunktsgleichung:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Daraus folgt:

$$y = b \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} = \frac{b}{a} \cdot \sqrt{a^2 - x^2}$$

Wir differenzieren:

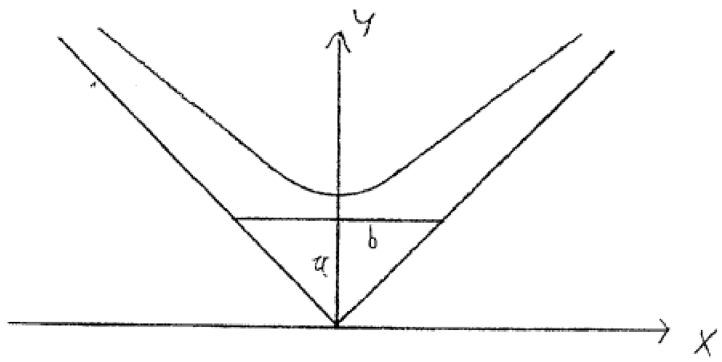
$$\frac{dy}{dx} = \frac{b}{a} \cdot \frac{-x}{\pm\sqrt{a^2 - x^2}}$$

Bei $a \gg x$ erhalten wir:

$$\frac{dy}{dx} \approx \pm\frac{b}{a^2} \cdot x$$

Interessant ist hier die Proportionaltät zu x, die auch für den Spezialfall Kreis $(a = b = r)$ besteht.

Nun gehen wir zur Hyperbel:



$a, b =$ Halbachsen der Hyperbel

Wir haben hier die Mittelpunktsgleichung:

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

Wir bekommen daraus:

$$y = a \cdot \sqrt{1 + \frac{x^2}{b^2}} = \frac{a}{b} \cdot \sqrt{b^2 + x^2}$$

Wir bilden die Ableitung:

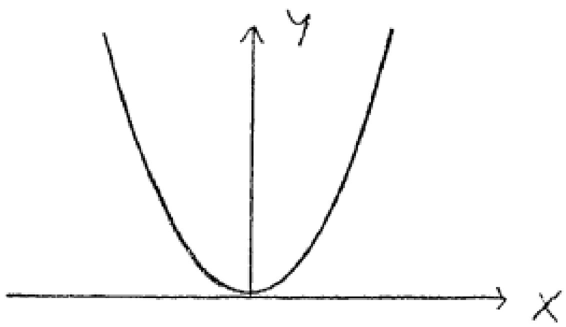
$$\frac{dy}{dx} = \frac{a}{b} \cdot \frac{x}{\sqrt{b^2 + x^2}}$$

Für $b \gg x$ folgern wir:

$$\frac{dy}{dx} \approx \frac{a}{b^2} \cdot x$$

Auch hier besteht eine Proportionalität zu x.

Als letztes betrachten wir die Parabel:



Die Parabelgleichung ist $y = mx^2$ mit $m \in R$. Also bekommen wir:

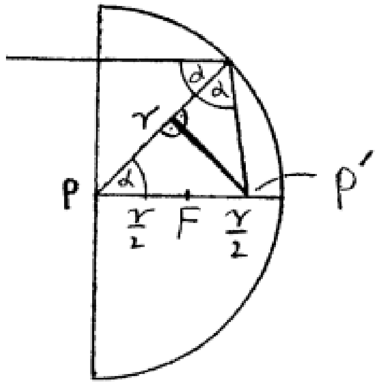
$$\frac{dy}{dx} = 2mx$$

Auch hier haben wir eine Proportionalität zu x.

Bei allen Kegelschnitten haben wir bei kleinen Ausschnitten die Proportionalität der Ableitung zu x. Das bedeutet, daß die Abbildunggleichungen für alle

F = BRENNPUNKT

$X = \overline{PP'}$



Kegelschnittspiegel gelten, sofern $G, B \ll a, b, r$ ist. Diese Abbildungsgleichungen gelten also bei Kugelspiegeln, Parabolspiegeln und Spiegeln mit der Form von Rotationsellipsoiden bzw. Rotationshyperboloiden.

2 Abweichung vom Brennstrahl

Wir betrachten einen sphärischen Hohlspiegel mit dem Radius r wie in der folgenden Abbildung: Aus der Optik ist bekannt, daß ein achsenparalleler Strahl nach der Reflektion näherungsweise durch den Brennpunkt geht. Es geht nun darum diese sehr kleine Abweichung zu bestimmen. Dieser Abstand zum Brennpunkt soll durch den Winkel α angegeben werden. Aufgrund des Reflektionsgesetzes und der Gleichheit von Wechselwinkel wird ein gleichschenkliges Dreieck gebildet. Damit haben wir:

$$x = \frac{r}{2 \cdot \cos\alpha}$$

Die gesuchte Abweichung ist dann:

$$D = x - \frac{r}{2} = \frac{r}{2 \cdot \cos\alpha} - \frac{r}{2}$$

oder:

$$D = \frac{r}{2} \cdot \left(\frac{1}{\cos\alpha} - 1 \right)$$

D ist der Abstand zwischen dem Brennpunkt und dem Schnittpunkt des Strahls auf der optischen Achse.

x kann maximal gleich r sein. Setzen wir in die erste Gleichung ein, so erhalten wir:

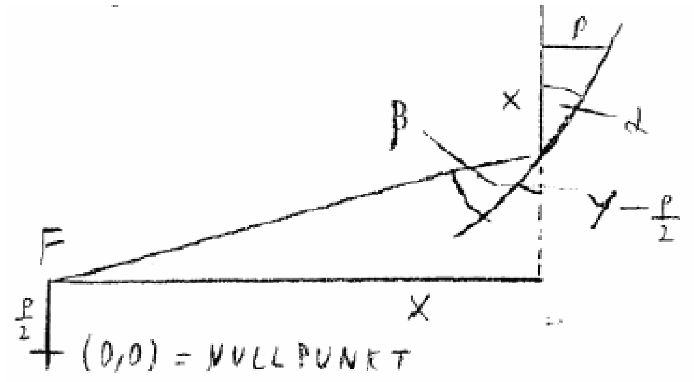
$$r = \frac{r}{2 \cdot \cos\alpha_{max}}$$

Daraus folgt:

$$\frac{1}{2} = \cos \alpha_{max} \qquad \alpha_{max} = 60^\circ$$

3 Beweis, daß achsenparallele Strahlen beim Parabolspiegel in den Brennpunkt reflektiert werden.

Wir betrachten folgende Abbildung:



Wir zeigen, daß sich achsenparallele Strahlen nach der Reflektion im Brennpunkt F schneiden. β ist nach dem Reflektionsgesetz gleich α. Also kommen wir auf folgende Gleichung:

$$\tan 2\alpha = \frac{x}{y - \frac{p}{2}}$$

Wir ziehen die Scheitelgleichung $x^2 = 2py$ heran. Wir setzen sie in die vorige Gleichung bei y ein:

$$\tan 2\alpha = \frac{x}{\frac{x^2}{2p} - \frac{p}{2}} = \frac{2px}{x^2 - p^2}$$

Nach der Scheitelgleichung ist $y = \frac{x^2}{2p}$ und $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{p}$.

Aus der Zeichnung und dem Steigungswinkel erkennt man $\tan \alpha = \frac{p}{x}$. Nun benutzen wir das Additionstheorem des Tangens:

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \cdot \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$$

Einsetzung:

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \cdot \frac{p}{x}}{1 - \frac{p^2}{x^2}} = \frac{2px}{x^2 - p^2}$$

Die beiden Darstellungen für $\tan 2\alpha$ stimmen also überein. Damit schneidet die Achsenparallele nach der Reflektion am Parabolspiegel den Brennpunkt F.