

Finsternisse, eine nicht konventionelle Darstellung

Harald Schröder

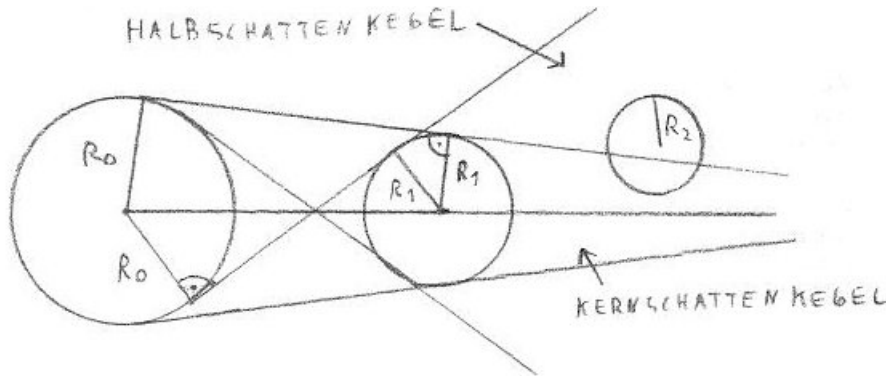
2002

Wir wollen uns die Konstellationen bei Finsternissen genauer ansehen.

1 Finsternisräume

Wir betrachten drei Kugeln mit den Positionen $\vec{p}_0, \vec{p}_1, \vec{p}_2 \in R^3$. Die Vektoren sind auf die Mittelpunkte der Kugeln bezogen. Die Positionen sollen von der Zeit t abhängen.

R_0, R_1, R_2 = Radien der Kugeln. Die Kugel 0 soll selbstleuchtend sein. (Lichtquelle, Fixstern)



Das Bild zeigt den Kernschattenkegel und den Halbschattenkegel. Wir führen nun folgende Vektoren ein:

$$\vec{r}_1 := \vec{p}_1 - \vec{p}_0 \quad \vec{r}_2 := \vec{p}_2 - \vec{p}_0$$

$r_i = |\vec{r}_i|$ ist der Betrag des Vektors $\vec{r}_i$. Beim Kernschattenkegel haben wir die Öffnungswinkel w_{ik} :

$$\sin w_{ik} = \frac{R_0}{|\vec{r}_i + \tau \cdot (\vec{p}_i - \vec{p}_0)|} = \frac{R_i}{|\tau \cdot (\vec{p}_i - \vec{p}_0)|}$$

Aus dieser Gleichung ergibt sich ein τ für die Kernschattenfinsternis. Die Spitze des Kernschattenkegels wird dargestellt durch:

$$\vec{s}_{ik} := \vec{p}_i + \tau \cdot (\vec{p}_i - \vec{p}_0)$$

Für Halbschattenfinsternisse betrachten wir den folgenden Doppelkegel mit dem Öffnungswinkel w_{ih} :

$$\sin w_{ih} = \frac{R_0}{|\tau \cdot \vec{r}_i|} = \frac{R_i}{|\vec{r}_i - \tau \cdot \vec{r}_i|}$$

Daraus ergibt sich τ für den Halbschattenkegel. Die Kegelspitze bekommt man mit $\vec{s}_{ih} := \vec{p}_0 + \tau \cdot \vec{r}_i$. Damit sind nun die Spitzen beider Kegel bekannt. Wir definieren $\cos w_{ih} =: c_{ih}$ und $\cos w_{ik} =: c_{ik}$. Nun können wir die Kegelgleichungen z.B. nach Köhler [1] Kapitel 10.2 S.10.3 Gleichungen (2) und (3) aufstellen, zunächst für den Kernschattenkegel:

$$(\vec{x} - \vec{s}_{ik}) \cdot \frac{-\vec{r}_i}{|\vec{r}_i|} = |\vec{x} - \vec{s}_{ik}| \cdot c_{ik} \quad i \in 1, 2 \quad (1)$$

Für den Halbschattenkegel:

$$\left[(\vec{x} - \vec{s}_{ih}) \cdot \frac{\vec{r}_i}{|\vec{r}_i|} \right]^2 = c_{ih}^2 \cdot (\vec{x} - \vec{s}_{ih})^2 \quad i \in 1, 2 \quad (2)$$

Die Gleichungen (1) und (2) gelten für die Kegelmantelflächen. Für den ausgefüllten Kegel ist dann auch ein kleinerer Öffnungswinkel möglich. Aus $w' < w$ folgt $\cos w' > \cos w$, also bekommen wir mit Hilfe von Gleichung (1) für den Kernschattenkegel:

$$(\vec{x} - \vec{s}_{ik}) \cdot \frac{-\vec{r}_i}{|\vec{r}_i|} \geq |\vec{x} - \vec{s}_{ik}| \cdot c_{ik} \quad i \in 1, 2 \quad (3)$$

Für den Halbschattenkegel:

$$\left[(\vec{x} - \vec{s}_{ih}) \cdot \frac{\vec{r}_i}{|\vec{r}_i|} \right]^2 \geq c_{ih}^2 \cdot (\vec{x} - \vec{s}_{ih})^2 \quad i \in 1, 2 \quad (4)$$

Nun brauchen wir die Kugelgleichung:

$$(\vec{x} - \vec{p}_i)^2 = R_i^2 \quad i \in 0, 1, 2 \quad (5)$$

Vgl. Köhler [1] Kapitel 9.1.2 S.9.2.

Mit $\vec{y}_{ik}$ bezeichnen wir die Schnittmenge aus den Lösungsmengen von den Gleichungen (1) und (5). $\vec{y}_{ih}$ soll die Schnittmenge der Lösungsmengen von (2) und (5) sein. $\vec{y}_{ik}$ und $\vec{y}_{ih}$ sind Kreise auf der Oberfläche der Kugel $\vec{p}_i$, mit gleichen Abstand zu $\vec{p}_0$. Wir führen nun die Vektoren $\vec{a}_{ik} := \vec{y}_{ik} - \vec{p}_0$ und $\vec{a}_{ih} := \vec{y}_{ih} - \vec{p}_0$ ein. Mit den Beträgen dieser neuen Vektoren können wir bilden:

$$|\vec{x} - \vec{p}_0| \geq a_{ih} \quad (6)$$

$$|\vec{x} - \vec{p}_0| \geq a_{ik} \quad (7)$$

Aus der Gleichung (5) gewinnen wir:

$$(\vec{x} - \vec{p}_i)^2 \geq R_i^2 \quad i \in 0, 1, 2 \quad (8)$$

Die Schnittmenge der Lösungen der Ungleichungen (3),(7) und (8) liefert den Kernschattenraum M_{ik} der Kugel $\vec{p}_i$. Ebenso ist der Halbschattenraum M_{ih} der

Kugel $\vec{p}_i$ gleich der Schnittmenge der Lösungen der Ungleichungen (4), (6) und (8).

$M_{ik}(O_j) :=$ Kernschattenraum der Kugel i auf der Kugel j
 $M_{ih}(O_j) :=$ Halbschattenraum der Kugel i auf der Kugel j

Dafür muß $i \neq j$ sein, wobei $i, j \in 1, 2$.

$M_{ik}(O_j)$ ergibt sich aus M_{ik} geschnitten mit der Lösungsmenge von Gleichung (5) mit j als Index. Ebenso kann $M_{ih}(O_j)$ als Schnittmenge von M_{ih} und der Lösungsmenge von (5) mit Index j berechnet werden. $M_{ik}(O_j)$ ist enthalten in der Menge $M_{ih}(O_j)$, das kann man aus der Abbildung erkennen.

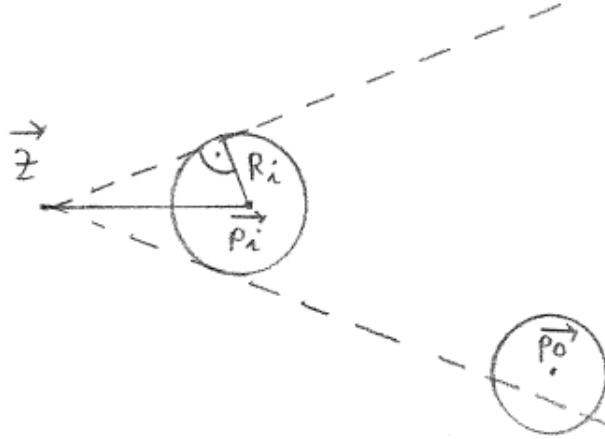
2 Projektionsbilder

Nun wenden wir uns den Projektionsbildern zu.

$\vec{z}$ = Punkt, von dem die Bilder aus gesehen werden. Dieser Punkt kann auch zeitlich veränderlich sein.

2.1 Bild der Lichtquelle (entspricht Sonnenfinsternis)

$\vec{z}$ ist die Spitze eines Kegels, in dem die Kugel i enthalten ist.



Öffnungswinkel w_i :

$$\sin w_i = \frac{R_i}{|\vec{p}_i - \vec{z}|} \quad c_i := \cos w_i$$

$$\vec{e}_i := \frac{\vec{p}_i - \vec{z}}{|\vec{p}_i - \vec{z}|}$$

Nach Köhler [1] Kapitel 10.2 Gleichung (2) und der Gleichung (3) im diesem Text können wir den Raum ohne den Kegel folgendermaßen darstellen:

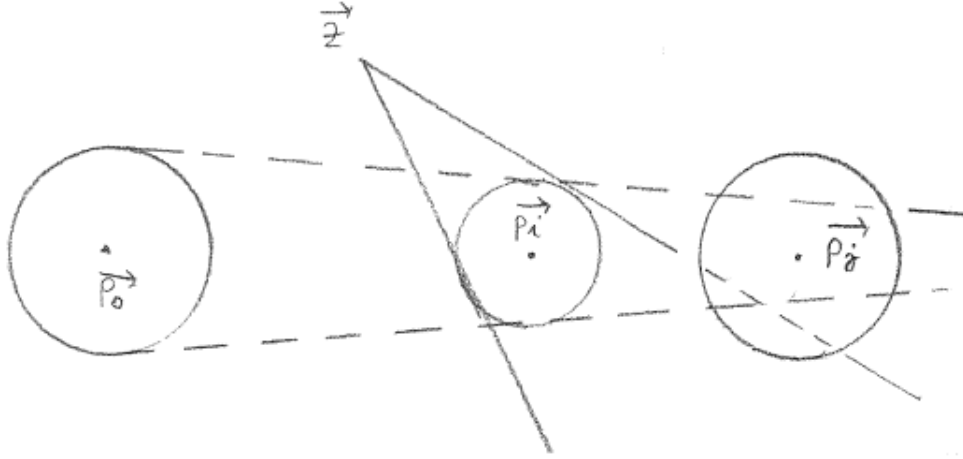
$$(\vec{x} - \vec{z}) \cdot \vec{e}_i \leq |\vec{x} - \vec{z}| \cdot c_i \quad i \in 1, 2 \quad (9)$$

Mit N bezeichnen wir die Schnittmenge zwischen der Lösung von (9) für $i = 1$ und 2 und der Ungleichung $(\vec{x} - \vec{p}_0)^2 \leq R_0^2$. Das bedeutet eine Kombination von 2 oder 3 Ungleichungen, abhängig davon ob die Lichtquelle von einer oder von 2 Kugeln bedeckt wird. Diese Schnittmenge kann ebenfalls eine Funktion der Zeit sein. Das gesuchte Bild ist dann die Projektion von N auf eine beliebige Ebene hinter dem Projektionspunkt $\vec{z}$. Form und Größe des Bildes sind damit bestimmt. Dieses Problem wird allgemein in dem Heft „Projektionen auf Ebenen“ [2] behandelt.

Soll der Beobachtungsort $\vec{z}$ auf der Oberfläche der Kugel i liegen, so muß $\vec{z}$ in der Lösungsmenge von Gleichung (5) für i enthalten sein.

2.2 Bild einer verfinsterten Kugel (entspricht Mondfinsternis)

Wir schauen uns das folgende Bild an:



Nach der Ungleichung (3) ist die Lösungsmenge von

$$(\vec{x} - \vec{s}_{ik}) \cdot \frac{-\vec{r}_i}{|\vec{r}_i|} \leq |\vec{x} - \vec{s}_{ik}| \cdot c_{ik} \quad i \in 1, 2 \quad (10)$$

gleich den Raum ohne Kernschattenkegel. Der Raum ohne Halbschattenkegel kann nach der Ungleichung (4) als Lösungsmenge von

$$\left[(\vec{x} - \vec{s}_{ih}) \cdot \frac{\vec{r}_i}{|\vec{r}_i|} \right]^2 \leq c_{ih}^2 \cdot (\vec{x} - \vec{s}_{ih})^2 \quad (11)$$

dargestellt werden.

Wir führen N_{ijk} bzw. N_{ijh} als Teile der j . Kugel ein, die vom Projektionspunkt $\vec{z}$ aus sichtbar bleiben. Dabei werden die beleuchteten Teile als Mengen aufgefaßt. Die j . Kugel wird von der i . Kugel evt. teilweise verdeckt. Der Index k symbolisiert den Kernschatten und h den Halbschatten.

N_{ijh} ergibt sich aus der Lösungsmenge von $(\vec{x} - \vec{p}_j)^2 \leq R_j^2$ kombiniert mit den Ungleichungen (11) und (9).

N_{ijk} erhalten wir als Lösungsmenge von $(\vec{x} - \vec{p}_j)^2 \leq R_j^2$ kombiniert mit den Ungleichungen (10) und (9). N_{ijh} und N_{ijk} können auch abhängig von der Zeit sein.

Das gesuchte Bild ergibt sich dann als Projektion von N_{ijh} bzw. N_{ijk} mit dem Projektionspunkt $\vec{z}$ auf eine beliebige Ebene. Für diesen Vorgang verweisen wir wieder auf das Heft „Projektionen auf Ebenen“ [2]. Soll der Beobachtungsort $\vec{z}$ auf der Oberfläche der i . Kugel liegen, so muß $\vec{z}$ in der Lösungsmenge der Gleichung (5) für i enthalten sein. Mit diesem Bild entscheidet sich auch, ob eine partielle oder totale Finsternis und eine Halbschattenfinsternis oder Kernschattenfinsternis vorliegt.

Evt. ist bei allen Fällen noch eine Verallgemeinerung möglich mit $R_i = R_{pi} + d_i$. Dabei ist R_{pi} der eigentliche Planetenradius und d_i die Dicke der (dichten) Atmosphäre der i . Kugel. Diese Verallgemeinerung hat nur Bedeutung für Planeten mit sehr dichten Atmosphären. Ein Beispiel dafür ist die Venus. Kernschatten und Halbschatten sind dann auf R_{pi} bezogen. Sollen die Schatten auf R_i bezogen werden, dann gibt es keine scharfe Begrenzung mehr. Oft gibt es dann, aufgrund der Atmosphäre, einen kontinuierlichen Übergang zum schattenfreien Raum. Bei keiner Atmosphäre ist natürlich $R_i = R_{pi}$.

Literatur

- [1] Joachim Köhler, Rolf Höwermann, Hardt Krämer „Analytische Geometrie und Abbildungsgeometrie in vektorieller Darstellung“ Verlag Moritz Diesterweg 6.Auflage 1975 Frankfurt am Main
- [2] Harald Schröer „Projektionen auf Ebenen“ 2001