Bewegungen auf einem rotierenden Planeten

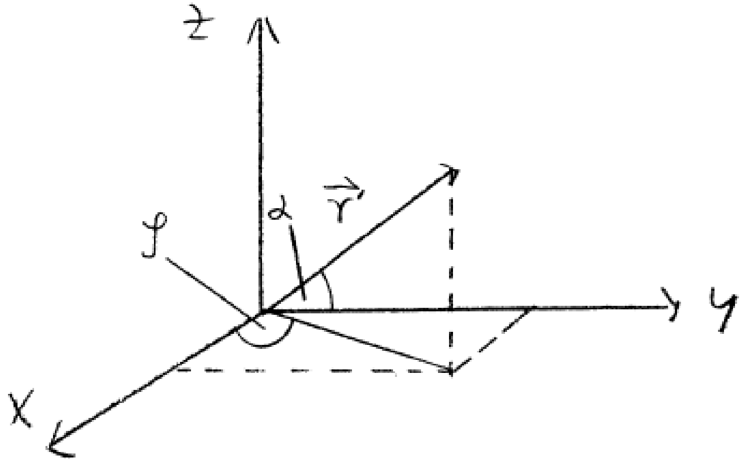
Harald Schröer

2002

Wir wollen hier die Bewegung beschreiben, die ein fallender Körper auf einem rotierenden Planeten erfährt.

1 Allgemein (Kugelkoordinaten)

Der Planet rotiert mit beliebiger veränderlicher Winkelgeschwindigkeit $\vec{w}(t)$ und erfährt eine Translationsbeschleunigung $\vec{a}_{tr}(t)$. t ist dabei die Zeit.



$\vec{r} = (x, y, z) =$ Ortsvektor $\qquad r = |\vec{r}|$
$\varphi =$ Längengrad
$\alpha =$ Breitengrad

Der Koordinatenursprung soll gleich dem geometrischen Mittelpunkt des Planeten sein. Wir führen Kugelkoordinaten ein vgl. z.B. Budo [1], §3, S.13:

$$x = r\sin(90^\circ - \alpha)\cos\varphi = r\cos\alpha\cos\varphi$$
$$y = r\sin(90^\circ - \alpha)\sin\varphi = r\cos\alpha\sin\varphi$$
$$z = r\cos(90^\circ - \alpha) = r\sin\alpha$$

Nun kommen wir zur Gestalt der Gravitationskraft. Für komplizierte Gravitationsfelder ist die Form $\vec{F}(\vec{r}, \alpha, \varphi, t)$ oder sogar $\vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, \ddot{\vec{r}}, \alpha, \dot{\alpha}, \ddot{\alpha}, \varphi, \dot{\varphi}, \ddot{\varphi}, t)$ möglich.

Schon wesentlich einfacher ist das Zentralfeld mit:

$$\vec{F} = -f(|\vec{r}|) \cdot \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$$

Am häufigsten kommt jedoch das Newtonische Gravitationsgesetz vor:

$$\vec{F} = -\frac{G \cdot M \cdot m}{|\vec{r}|^2} \cdot \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$$

G = Gravitationskonstante
$M = M(t)$ = Masse des Planeten
m = Masse des Probekörpers $\qquad$ m ist konstant.

Für die Bewegung in einem rotierenden System haben wir nach Budo [1], §14, S.74, Gleichung (16):

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} - m\vec{a}_{tr} - m \cdot (\vec{w} \times (\vec{w} \times \vec{r})) - m \cdot (\dot{\vec{w}} \times \vec{r}) - 2m \cdot (\vec{w} \times \dot{\vec{r}}) \qquad (1)$$

Setzen wir den Vektor

$$\vec{r} = r \cdot \begin{pmatrix} \cos\alpha \cos\varphi \\ \cos\alpha \sin\varphi \\ \sin\alpha \end{pmatrix}$$

in die Gleichung (1) ein, so erhalten wir 3 Differentialgleichungen für r, α und φ.

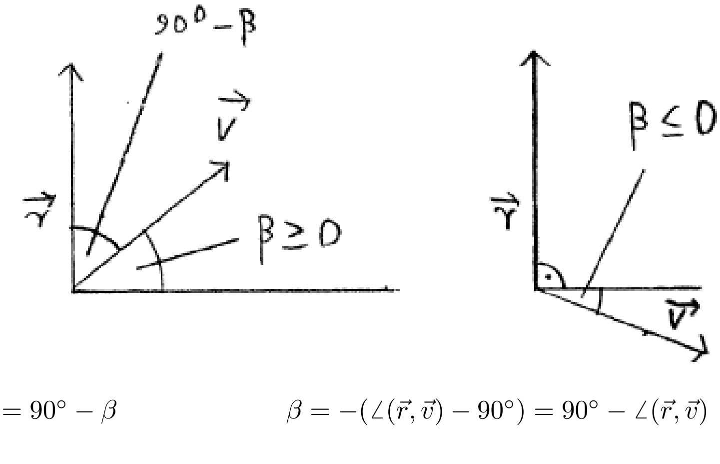
Anfangsbedingungen:

$$\vec{r}(t_0) = \vec{r}_0 \qquad \vec{v}(t_0) = \vec{v}_0$$

Die Höhe kann mit $r(t) - R_p$ dargestellt werden, wobei R_p der Planetenradius ist.

Wurfwinkel β:

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}}$$



$\angle(\vec{r}, \vec{v}) = 90° - \beta \qquad \beta = -(\angle(\vec{r}, \vec{v}) - 90°) = 90° - \angle(\vec{r}, \vec{v})$

Also:

$$\sin\beta(t_0) = \cos(90° - \beta(t_0)) = \frac{\vec{r}_0 \cdot \vec{v}_0}{|\vec{r}_0| \cdot |\vec{v}_0|}$$

Allgemeiner Steigungswinkel $\beta(t)$:

$$\sin\beta(t) = \frac{\vec{r}\cdot\vec{v}}{|\vec{r}|\cdot|\vec{v}|}$$

Das Differentialgleichungssystem (1) kann umgeschrieben werden zu:

$$\vec{a} = \dot{\vec{r}} \tag{2}$$

$$m\dot{\vec{a}} = \vec{F} - m\vec{a}_{tr} - m\cdot(\vec{w}\times(\vec{w}\times\vec{r})) - m\cdot(\dot{\vec{w}}\times\vec{r}) - 2m\cdot(\vec{w}\times\vec{a})$$

Wir bekommen 6 Differentialgleichungen 1.Ordnung mit den Unbekannten $\vec{a}(t), \vec{r}(t) \in R^3$. Dieses Differentialgleichungsystem ist nicht linear wegen $\vec{F}$. Für eine exakte Lösung bleibt nur die Möglichkeit von Reihenentwicklungen nach Kamke [4], A, §2, (6.3), S.38. Das gilt für alle Zentralfelder. Für das allgemeine Gravitationsfeld ist das möglich, wenn das Differentialgleichungssystem nach $\dot{\vec{r}}$ und $\ddot{\vec{r}}$ explizit auflösbar ist. Kann dieses System nicht explizit aufgelöst werden, so gibt es bei zeitlich veränderlichen $\vec{w}(t)$ überhaupt keine exakte Lösung. Mit numerischen Methoden können allerdings Näherungslösungen ermittelt werden.

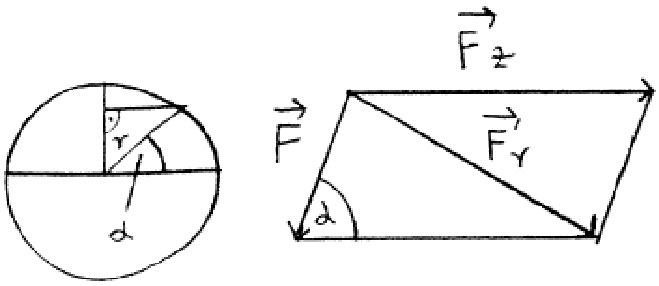
Anstatt einer Planetenkugel kann auch ein allgemeiner Rotationskörper genommen werden. Es sind sogar noch allgemeinere Körper denkbar. Wie diese zu handhaben sind, wird in Schröer [5], Kapitel 10 erklärt.

2 Bewegung in einem lokalen Koordinatensystem auf der Planetenoberfläche:

Für diesen Fall nehmen wir $\vec{a}_{tr} = 0$ und M, m als konstant an. Ferner soll die Gravitationskraft eine Zentralkraft sein, also:

$$\vec{F} = -m\cdot f(|\vec{r}|)\cdot\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$$

Die Winkelgeschwindigkeit hat die Gestalt $\vec{w}(t) = (0, 0, w(t))$.



Nun führen wir für diesen Fall die Zentrifugalkraft $\vec{F}_z$ ein:

$$F_z = mrw^2\cdot\cos\alpha$$

resultierende Kraft:

$$\vec{F}_r = \vec{F} + \vec{F}_z$$

Für die resultierende Beschleunigung können wir schreiben:

$$b_r(r,\alpha,w) = \frac{F_r}{m} = \frac{\sqrt{F^2 + F_z^2 - 2FF_z\cos\alpha}}{m}$$
$$= \sqrt{(f(r))^2 + r^2w^4\cos^2\alpha - 2f(r)rw^2\cos^2\alpha}$$

mit $r = R_p + z$. Dabei wird R_p für den Planetenradius und z für die Höhe verwendet. Nach Budo [1], §24, S.119,120 und Gleichung (1) haben wir das Differentialgleichungssystem:

$$\ddot{\vec{r}} = \vec{b}_r(r,\alpha,w) + 2\cdot\dot{\vec{r}}\times\vec{w} - \dot{\vec{w}}\times\vec{r} \tag{3}$$

mit den Vektoren:

$$\vec{b}_r = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -b_r \end{pmatrix} \qquad \vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad \dot{\vec{r}} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix}$$

$$\vec{w} = \begin{pmatrix} -w\cos\alpha \\ 0 \\ w\sin\alpha \end{pmatrix} \qquad \dot{\vec{w}} = \begin{pmatrix} -\dot{w}\cos\alpha \\ 0 \\ \dot{w}\sin\alpha \end{pmatrix}$$

Die Bedeutung der Koordinaten im einzelnen:

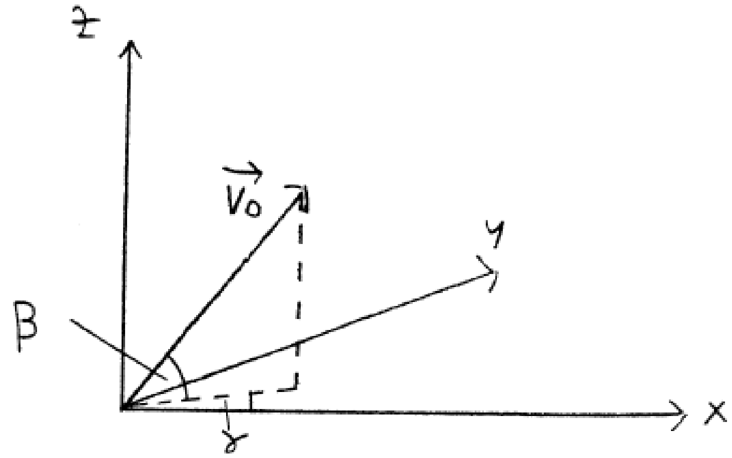
x = Nord-Süd-Richtung (Süden positiv)
y = West-Ost-Richtung (Osten positiv)
z = Höhe (nach oben positiv)

Die Anfangsbedingungen mit dem Richtungswinkel γ und den Wurfwinkel β lauten:

$$\vec{r}(t_0) = \vec{r}_0 \qquad \vec{v}(t_0) = \vec{v}_0$$

Wir führen Kugelkoordinaten ein:

$$\vec{v}_0 = |\vec{v}_0|\cdot\begin{pmatrix} \cos\beta\cos\gamma \\ \cos\beta\sin\gamma \\ \sin\beta \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{c} \gamma \in [0, 360°[\\ \beta \in [-90°, 90°] \end{array}$$



$\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ stellt die Lösung des Differentialgleichungssystems dar. Das Einsetzen der Vektoren führt zu folgenden Differentialgleichungssystem:

$$\ddot{x} = 2\dot{y}w \sin\alpha + y\dot{w}\sin\alpha$$

$$\ddot{y} = -2\dot{z}w\cos\alpha - 2\dot{x}w\sin\alpha - x\dot{w}\sin\alpha - z\dot{w}\cos\alpha$$

$$\ddot{z} = 2\dot{y}w\cos\alpha - b_r + y\dot{w}\cos\alpha$$

Also ein inhomogenes lineares Differentialgleichungssystem 2.Ordnung. $b_r = b_r(r, \alpha, w)$ soll dabei eine feste Konstante sein. α hat ebenfalls einen festen Wert.

Umwandlung:

$$\dot{x} = a_1$$

$$\dot{y} = a_2$$

$$\dot{z} = a_3$$

$$\dot{a}_1 = 2a_2 w\sin\alpha + y\dot{w}\sin\alpha$$

$$\dot{a}_2 = -2a_3 w\cos\alpha - 2a_1 w\sin\alpha - x\dot{w}\sin\alpha - z\dot{w}\cos\alpha$$

$$\dot{a}_3 = 2a_2 w\cos\alpha - b_r + y\dot{w}\cos\alpha$$

Dann haben wir ein inhomogenes lineares Differentialgleichungssystem 1.Ordnung. Wenn w nicht konstant ist, dann steht an exakten Methoden nur die Reihenentwicklung nach Kamke [4], A, §2, (6.3), S.38 zur Verfügung. Die Alternative dazu ist eine numerische Berechnung. Wenn ein Fundamentalsystem des zugehörigen linearen homogenen Systems bekannt wäre, dann könnte die Lösung des inhomogenen Systems mit der Variation der Konstanten, vgl. Forster [2], §12, S.128, Satz 4, bestimmt werden.
Ist w konstant, dann liegt ein System mit konstanten Koeffizienten vor. In diesen Fall ist die Berechnung der exakten Lösung möglich. Das wird z.B. in Grainer [3], I.2, S.8-17 gemacht.
Wir sehen insgesamt, dat es Möglichkeiten zur Lösung dieses Problems gibt.

Literatur

[1] A Budo „Theoretische Mechanik“, 10.Auflage, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1980

[2] Otto Forster „Analysis 2“, 5.Auflage, 1984, Vieweg Verlag, Braunschweig

[3] Walter Grainer „Mechanik“, Teil 2, Verlag Harri Deutsch, 1989

[4] Erich Kamke „Differentialgleichungen: Lösungsmethoden und Lösungen“, Band 1, 10.Auflage, Teubner Verlag, Stuttgart, 1983

[5] Harald Schröer „Orientierungstheorie“ Wissenschaft und Technik Verlag, Berlin, 2002