Bahnen mit konstanter Geschwindigkeit auf Rotationskörperschalen

Harald Schröer

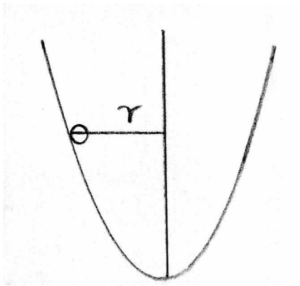
2013

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Der reibungslose Fall:

In einer Rotationskörperschale befindet sich eine Kugel.

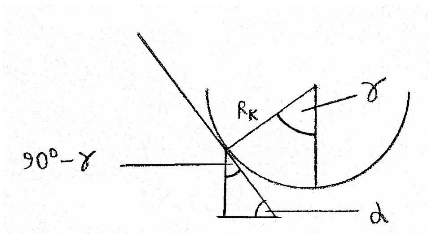


Setzt man die Schale in Rotation, so strebt die Kugel vom Mittelpunkt der Schale weg auf eine höhere Position. Hier ergeben sich mehrere Fragen. Ist die Kugel bei der Rotation im Gleichgewicht oder stürzt sie ab? Gibt es Spielräume bei der angenommenen Position? Gibt es vielleicht Bereiche der Schale, in denen die Kugel nicht sein kann? Es ist anschaulich klar, daß die Rotationsgeschwindigkeit der Schale eine wichtige Rolle spielt. Welche anderen Größen spielen sonst noch eine Rolle? Wie ist die Abhängigkeit von diesen Größen? Gibt es vielleicht auch Größen, von denen diese Position unabhängig ist? Physikalisch ist die Situation der rotierenden Schale gleichwertig zu der Situation einer Kugel, die in der ruhenden Schale kreist.

Es soll die Abhängigkeit von r und v (Geschwindigkeit) bestimmt werden und auch die Winkelgeschwindigkeit w. Schwerkraft und Fliehkraft (Zentrifugalkraft) müssen dabei im Gleichgewicht sein. Die Fliehkraft kommt im Alltag durchaus häufig vor. Jeder hat schon mal die Wirkung der Zentrifugalkraft (Fliehkraft) erfahren, z.B. bei einem Karussell oder beim Fahren einer Kurve.

1.1 Kugelschale

Zuerst soll die Rotationskörperschale selbst eine Kugelschale sein. Der Neigungswinkel der schiefen Ebene sei α.

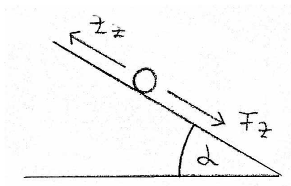


m = Masse der innenliegenden Kugel

R_k = Radius der Kugelschale (innerer Radius der Schale)

g = Erdbeschleunigung

$$\alpha = 90^\circ - (90^\circ - \gamma) = \gamma \qquad \text{also} \qquad \alpha = \gamma$$

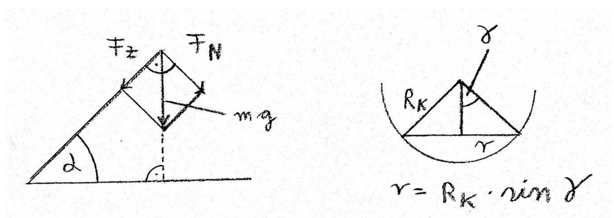


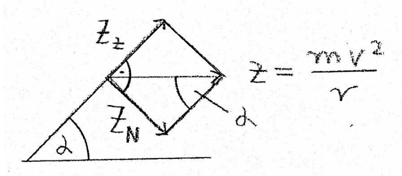
F_z = Fallkraft

Z_z = Zentrifugalkraft, die entgegenwirkt

$$F_z = mg \sin \alpha \qquad \text{und} \qquad Z_z = \frac{mv^2}{r} \cdot \cos \alpha$$

folgen aus folgenden Skizzen:





F_N, Z_N sind Normalkräfte.

Es folgt:

$$Z_z = Z \cdot \cos\alpha \qquad Z_N = Z \cdot \sin\alpha$$

wir erhalten:

$$Z_z = \frac{mv^2}{r} \cdot \cos\alpha \qquad \alpha = \gamma$$

$$r = R_k \cdot \sin\alpha$$

Einsetzung:

$$Z_z = \frac{mv^2}{R_k \cdot \sin\gamma} \cdot \cos\gamma$$

Für F_z bekommen wir wegen $\alpha = \gamma$:

$$F_z = mg \cdot \sin\gamma$$

Für eine stabile Kreisbahn in der Kugelschale muß $F_z = Z_z$ (Gleichgewicht) sein, also:

$$mg\sin\gamma = \frac{mv^2}{R_k \cdot \sin\gamma} \cdot \cos\gamma$$

umgeformt:

$$v^2 = g \cdot R_K \cdot \frac{\sin^2\gamma}{\cos\gamma} \qquad \text{mit} \qquad \frac{\sin\gamma}{\cos\gamma} = \tan\gamma$$

ergibt:

$$v(\gamma) = \sqrt{g \cdot R_k \cdot \sin\gamma \cdot \tan\gamma}$$

$$w = \frac{v}{r} \qquad w = \text{Winkelgeschwindigkeit}$$

$$w(\gamma) = \frac{\sqrt{gR_k\sin\gamma\tan\gamma}}{R_k\sin\gamma} = \sqrt{\frac{gR_k\sin\gamma\tan\gamma}{R_k^2 \cdot \sin^2\gamma}}$$

$$= \sqrt{\frac{g\tan\gamma}{R_k\sin\gamma}} = \sqrt{\frac{g}{R_k \cdot \cos\gamma}}$$

$$\text{Rotationszeit:} \qquad U_t = \frac{2\pi}{w}$$

Näherungen:

Für $\gamma \ll 90^\circ$ gilt $\sin\gamma \approx \tan\gamma$

daraus folgt:

$$v \approx \sqrt{g \cdot R_k \cdot \sin^2\gamma} = \sin\gamma \cdot \sqrt{g \cdot R_K}$$

Für γ nahe 90° gilt $\sin\gamma \approx 1$:

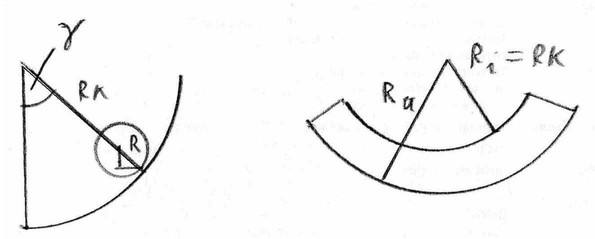
$$v \approx \sqrt{g \cdot R_K \cdot \tan\gamma}$$

Wenn der Schwerpunkt der Mittelpunkt der kleinen Kugel ist, dann können wir folgendes machen:

$R =$ Radius der kleinen Kugel

$R_k = R_i$ =Radius der Kugelschale (innerer Radius)

$R_a =$ äußerer Radius



Nach der Skizze erhalten wir die Beziehung:

$$r_m = r \cdot \frac{\sin\gamma \cdot R_k - \sin\gamma \cdot R}{\sin\gamma \cdot R_k} \tag{1.1}$$

daraus erhalten wir:

$$r_m = r \cdot \frac{R_k - R}{R_k}$$

r_m ist bei einer kleinen Kugel nur geringfügig kleiner als r.

Wenn wir r_m anstatt von r in die Gleichungen einsetzen, dann bekommen wir die Winkelgeschwindigkeit und die Geschwindigkeit des Schwerpunktes der kleinen Kugel. Wir nehmen an, dass die kleine Kugel konstante örtliche Dichte hat. Mit der Schwerpunktkorrektur erhalten wir die Schwerpunktsgeschwindigkeit:

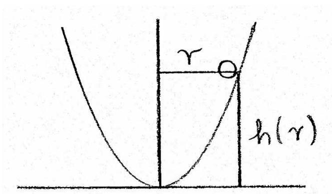
$$v_m = \sqrt{g \cdot r_m \cdot \tan\gamma} \qquad \text{mit} \qquad r_m = R_k \cdot \sin\gamma \cdot \left(1 - \frac{R}{R_k}\right)$$

Für die Geschwindigkeit am Berührungspunkt gilt:

$$v = v_m \cdot \frac{R_k \cdot \sin\gamma}{r_m}$$

1.2 Allgemeiner Rotationskörper

Nun soll die Schale eines allgemeinen Rotationskörpers betrachtet werden.



$h(r)$ ist die Funktion des allgemeinen Rotationskörpers.

$$h'(r) = s = \tan\alpha = \text{Steigung}$$

α ist dabei der Neigungswinkel. Wir erhalten wie bei der Kugelschale:

$$F_z = mg \cdot \sin\alpha \qquad Z_z = \frac{mv^2}{r} \cdot \cos\alpha$$

Es gilt:

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}} \qquad \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \tan\alpha$$

hieraus folgt:

$$\sin\alpha = \frac{\tan\alpha}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}$$

Wir setzen nun s ein und erhalten:

$$F_z = \frac{mgs}{\sqrt{1+s^2}} \qquad Z_z = \frac{mv^2}{r\sqrt{1+s^2}}$$

Für eine stabile Bahn muß wieder $F_z = Z_z$ (Gleichgewicht) gelten, also:

$$\frac{mv^2}{r\sqrt{1+s^2}} = \frac{mgs}{\sqrt{1+s^2}} \qquad \Rightarrow \qquad v^2 = g \cdot r \cdot s$$

also folgt:

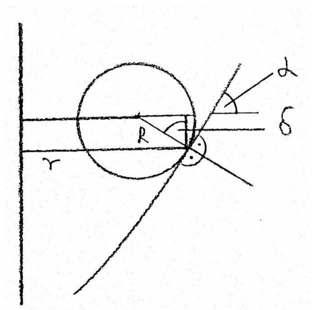
$$v = +\sqrt{g \cdot r \cdot s}$$

Für die Winkelgeschwindigkeit bekommen wir:

$$w = \frac{v}{r} = \sqrt{\frac{grs}{r^2}} = \sqrt{\frac{g \cdot s}{r}}$$

Wegen $s = h'(r)$ ist eine Auflösung von v oder w nach r im allgemeinen nicht möglich. Das muß dann bei einer konkret gegebenen Funktion $h(r)$ geschehen.

Wenn der Schwerpunkt der kleinen Kugel im Mittelpunkt ist, können wir folgendes machen: R ist der Radius der Kugel.



Für den Winkel δ gilt: $\delta = 180° - 90° - (90° - \alpha) = \alpha$ Aus der Abbildung entnehmen wir:

$$r_m = r \cdot \frac{r - R \cdot \sin\delta}{r}$$

Mit $\tan \alpha = s$ und
$\sin \delta = \frac{\tan \delta}{\sqrt{1+\tan^2 \delta}}$ folgern wir daraus:

$$r_m = r \cdot \frac{r - \frac{R \cdot s}{\sqrt{1+s^2}}}{r} \tag{1.2}$$

mit $s = h'(r)$

r_m ist bei einer kleinen Kugel nur geringfügig kleiner als r. Wenn wir r_m anstatt von r in die Gleichungen einsetzen, erhalten wir die Winkelgeschwindigkeit und Geschwindigkeit des Schwerpunkt der kleinen Kugel. Wir nehmen an, dass die kleine Kugel eine konstante örtliche Dichte hat. Das ist bei allen Kapiteln gültig. Die genaue Auswertung mit Schwerpunkt ergibt dann für die Geschwindigkeit des Schwerpunkts der kleinen Kugel:

$$v_m = \sqrt{g \cdot r_m \cdot h'(r)}$$

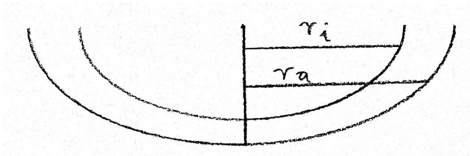
Für die Winkelgeschwindigkeit:

$$w = \frac{v_m}{r_m} = \sqrt{\frac{g \cdot h'(r)}{r_m}}$$

Mit

$$v = v_m \cdot \frac{r}{r_m}$$

erhalten wir die Geschwindigkeit am Berührungspunkt.

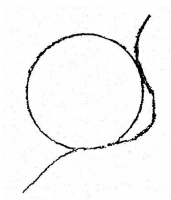


Mit der Rotationskörperfunktion $h(r)$ ist immer die innere gemeint. Wir bezeichnen:

$r = r_i =$ innerer Radius

$r_a =$ äußerer Radius

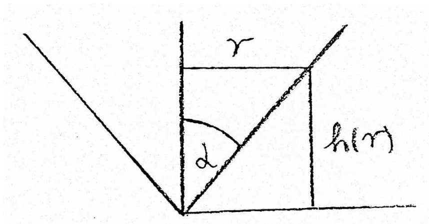
$h(r)$ muß so sein, daß es mit der Kugel nur **ein** Berührungspunkt gibt. Also keine „Mulden“.mit zwei Berührungspunkten vgl. Abbildung:



Vom allgemeinen Rotationskörper können nun verschiedene Spezialfälle abgeleitet werden.

1.3 Rotationskegel

Wir betrachten nun einen Rotationskegel:



α = Öffnungswinkel des Kegels

Durch die Abbildung sehen wir:

$$h(r) = \frac{r}{\tan\alpha} \qquad \Rightarrow \qquad s = h'(r) = \frac{1}{\tan\alpha}$$

Setzen wir nun in die allgemeine Formel $v = \sqrt{grs}$ für $h(r)$ und s ein, so bekommen wir für die Geschwindigkeit:

$$v = \sqrt{\frac{g \cdot r}{\tan\alpha}}$$

Umgeformt nach r:

$$r = \frac{v^2 \cdot \tan\alpha}{g}$$

Für die Winkelgeschwindigkeit ergibt sich:

$$w = \frac{v}{r} = \sqrt{\frac{gr}{\tan\alpha \cdot r^2}} = \sqrt{\frac{g}{r \cdot \tan\alpha}}$$

Wiederum nach r umgeformt:

$$r = \frac{g}{w^2 \cdot \tan\alpha}$$

vgl. Sommerfeld [5] §14.1 S.73.

Zur Anwendung von Gleichung (2) wird nun $\frac{s}{\sqrt{1+s^2}}$ berechnet.

$$\frac{s}{\sqrt{1+s^2}} = \frac{1}{\tan\alpha \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{\tan^2\alpha}}} = \frac{1}{\sqrt{\tan^2\alpha + 1}} = \cos\alpha$$

Aus Gleichung (2) folgt nun:

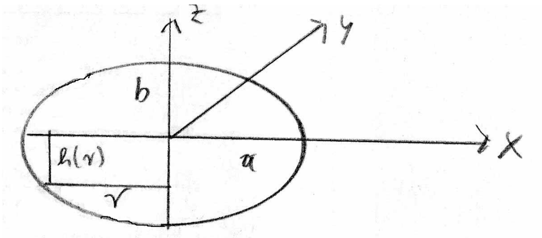
$$r_m = r \cdot \frac{r - R \cdot \cos\alpha}{r}$$

Die Berücksichtigung des Schwerpunkts führt zu:

$$v_m = \sqrt{\frac{g \cdot r_m}{\tan\alpha}} \qquad w = \sqrt{\frac{g}{r_m \cdot \tan\alpha}} \qquad v = v_m \cdot \frac{r}{r_m}$$

1.4 Rotationsellipsoid

Wir wenden uns nun dem Rotationsellipsoiden zu. Die Halbachse a liegt auf der x-Achse und auf der y-Achse, die Halbachse b auf der z-Achse. Die z-Achse soll Rotationsachse sein. Die Halbachsen a und b können beliebig sein.



Es gilt die Mittelpunktgleichung der Ellipse:

$$\frac{r^2}{a^2} + \frac{h^2}{b^2} = 1$$

Umgeformt:

$$h^2 = b^2 \cdot \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right) = b^2 \cdot \frac{a^2 - r^2}{a^2}$$

Daraus folgt:

$$h(r) = \pm \frac{b}{a} \cdot \sqrt{a^2 - r^2}$$

Bilden wir die Ableitung nach r, so erhalten wir:

$$s = h'(r) = \frac{b}{a} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{-2r}{\pm\sqrt{a^2 - r^2}} = \pm \frac{b}{a} \cdot \frac{r}{\sqrt{a^2 - r^2}}$$

mit $v = +\sqrt{grs}$ folgt:

$$v = +\sqrt{g \cdot r \cdot \frac{b}{a} \cdot \frac{r}{\sqrt{a^2 - r^2}}}$$

schließlich:

$$v = r \cdot \sqrt{\frac{b \cdot g}{a \cdot \sqrt{a^2 - r^2}}} \tag{1.3}$$

Die Winkelgeschwindigkeit w ergibt sich:

$$w = \frac{v}{r} = \sqrt{\frac{bg}{a \cdot \sqrt{a^2 - r^2}}} \tag{1.4}$$

Näherung für $r \ll a$:

$$v \approx \frac{r}{a} \cdot \sqrt{bg} \qquad w = \frac{v}{r} \approx \frac{1}{a} \cdot \sqrt{bg}$$

Jetzt muß noch die Beziehung zwischen r und r_m gefunden werden. Wir erhalten im Fall des Rotationsellipsoiden für den Ausdruck:

$$\frac{s}{\sqrt{1 + s^2}} = \frac{br}{a \cdot \sqrt{a^2 - r^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{b^2 r^2}{a^2 \cdot (a^2 - r^2)}}}$$

$$= \frac{br}{a \cdot \sqrt{a^2 - r^2 + \frac{b^2 r^2}{a^2}}} = \frac{br}{\sqrt{a^4 - r^2 a^2 + b^2 r^2}}$$

Wir setzen diesen Term in Gleichung (2) ein:

$$r_m = r \cdot \frac{r - \frac{brR}{\sqrt{a^4 - r^2 a^2 + b^2 r^2}}}{r}$$

$$r_m = r \left(1 - \frac{bR}{\sqrt{a^4 - r^2 a^2 + b^2 r^2}}\right) \tag{1.5}$$

Die Berücksichtigung durch den Schwerpunkt liefert:

$$v_m = r_m \cdot \sqrt{\frac{b \cdot g}{a \cdot \sqrt{a^2 - r^2}}} \qquad v = v_m \cdot \frac{r}{r_m}$$

Die Winkelgeschwindigkeit bleibt dieselbe.

1.5 Kugel als Spezialfall des Rotationsellipsoiden:

Es ist auch möglich die Kugel als Spezialfall des Rotationsellipsoiden mit dem Kugelradius $R_k = a = b$ betrachten. Durch Spezialisierung der Formeln (3) und (4) ergibt sich:

$$v = r \cdot \sqrt{\frac{g}{\sqrt{R_k^2 - r^2}}} \qquad w = \sqrt{\frac{g}{\sqrt{R_k^2 - r^2}}}$$

Näherung für $r \ll R_k$:

$$v \approx r \cdot \sqrt{\frac{g}{R_k}} \qquad w \approx \sqrt{\frac{g}{R_k}}$$

Spezialisierung von (5):

$$r_m = r \cdot \left(1 - \frac{R}{R_k}\right)$$

Eine noch genauere Berechnung mit dem Schwerpunkt ergibt:

$$v_m = r_m \cdot \sqrt{\frac{g}{\sqrt{R_k^2 - r^2}}} \qquad v = v_m \cdot \frac{r}{r_m}$$

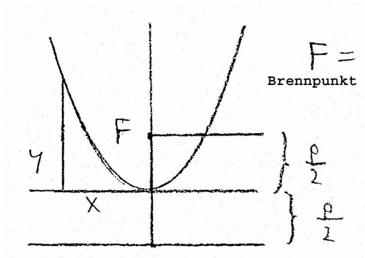
Die Winkelgeschwindigkeit bleibt unverändert.

1.6 Paraboloid

Wir gehen nun auf den Rotationsparaboloiden ein. Für die Parabel gilt:

$$x^2 = 2py$$

Wir betrachten folgende Abbildung:



Bezeichnungen:

Brennweite $f = \frac{p}{2}$ $\quad x = r\ ,\ y = h$

$$r^2 = 2h \cdot 2f = 4hf$$

daraus erhalten wir:

$$h = \frac{r^2}{4f} \qquad s = h'(r) = \frac{r}{2f}$$

mit $v = +\sqrt{grs}$ folgt:

$$v = \sqrt{gr \cdot \frac{r}{2f}} = r \cdot \sqrt{\frac{g}{2f}}$$

Für die Winkelgeschwindigkeit:

$$w = \frac{v}{r} = \sqrt{\frac{g}{2f}}$$

w ist unabhängig von r.

Wir formen die Geschwindigkeitsgleichung um:

$$r = v \cdot \sqrt{\frac{2f}{g}}$$

Zur Beziehung zwischen r und r_m:

$$\frac{s}{\sqrt{1+s^2}} = \frac{r}{2f \cdot \sqrt{1+\frac{r^2}{4f^2}}} = \frac{r}{\sqrt{4f^2+r^2}}$$

Mit Gleichung (2) bekommen wir:

$$r_m = r \cdot \left(1 - \frac{R}{\sqrt{4f^2+r^2}}\right)$$

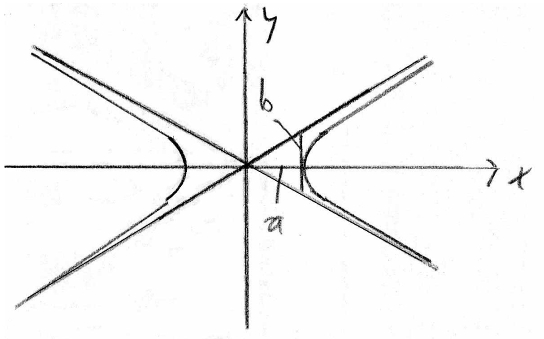
Eine noch genauere Berechnung mit dem Schwerpunkt der kleinen Kugel führt zu:

$$v_m = r_m \cdot \sqrt{\frac{g}{2f}} \qquad v = v_m \cdot \frac{r}{r_m}$$

Die Winkelgeschwindigkeit verändert sich nicht.

1.7 Hyperboloid

Wir schauen uns nun die Kreisbahnen auf einer Rotationshyperboloidenschale an:

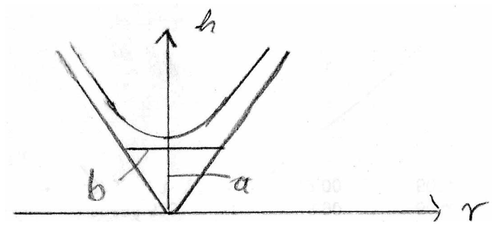


Mittelpunktsgleichung der Hyperbel:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Sinnvoll sind die Bezeichnungen:

$y = r$, $x = h$



In die Mittelpunktsgleichung eingesetzt:

$$\frac{h^2}{a^2} - \frac{r^2}{b^2} = 1$$

Umgeformt:

$$h^2 = a^2 \cdot \left(1 + \frac{r^2}{b^2}\right) = \frac{a^2}{b^2} \cdot (b^2 + r^2)$$

also:

$$h = \frac{a}{b} \cdot \sqrt{b^2 + r^2}$$

Für die Steigung s ergibt sich:

$$s = h'(r) = \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2r}{\sqrt{b^2 + r^2}} = \frac{a}{b} \cdot \frac{r}{\sqrt{b^2 + r^2}}$$

mit $v = +\sqrt{grs}$ folgt:

$$v = \sqrt{gr \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{r}{\sqrt{b^2 + r^2}}} = r \cdot \sqrt{\frac{ag}{b \cdot \sqrt{b^2 + r^2}}} \tag{1.6}$$

Eine Näherung für $a, b \ll r$:

$$v \approx r \cdot \sqrt{\frac{ag}{br}} = \sqrt{\frac{arg}{b}}$$

$$\text{Asymptote:} \qquad h'(r) \approx \frac{a}{b}$$

Winkelgeschwindigkeit:

$$w = \frac{v}{r} = \sqrt{\frac{ag}{b \cdot \sqrt{b^2 + r^2}}}$$

für $a, b \ll r$:

$$w \approx \sqrt{\frac{ag}{br}}$$

Nun berechnen wir noch die Kugelmittelpunktsgeschwindigkeit:

$$\frac{s}{\sqrt{1+s^2}} = \frac{ar}{b \cdot \sqrt{b^2+r^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{a^2 r^2}{b^2 \cdot (b^2+r^2)}}}$$

$$= \frac{ar}{b \cdot \sqrt{b^2 + r^2 + \frac{a^2 r^2}{b^2}}} = \frac{ra}{\sqrt{b^4 + r^2 b^2 + a^2 r^2}}$$

aus (2) folgt für r_m:

$$r_m = r \cdot \frac{r - \frac{Rra}{\sqrt{b^4+r^2b^2+r^2a^2}}}{r}$$

schließlich:

$$r_m = r \cdot \left(1 - \frac{Ra}{\sqrt{b^4 + r^2 b^2 + r^2 a^2}}\right)$$

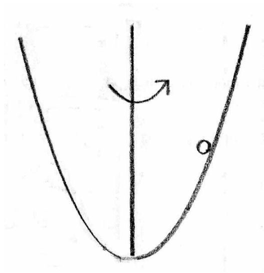
Mit dieser Schwerpunktkorrektur erhalten wir:

$$v_m = r_m \cdot \sqrt{\frac{a \cdot g}{b \cdot \sqrt{b^2 + r^2}}} \qquad v = v_m \cdot \frac{r}{r_m}$$

Die Winkelgeschwindigkeit bleibt dieselbe.

Verallgemeinerungen:

a): Statt Rotationskörperschalen kann man auch einen Arm betrachten,der die Form des Rotationskörpers hat.



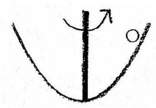
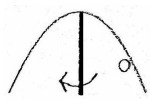
Dieser Arm wird in Rotation versetzt und der Körper darauf nimmt durch Gravitation und Zentrifugalkraft eine Gleichgewichtstellung ein. Wenn der Körper auf diesem Arm reibungsfrei gleitet, gelten dieselben Gleichungen dafür. (Vor allem kann man das bei Rotationskörpern wie Kugel, Zylinder u.s.w. ereichen.)

b): Der reibungslose Fall im Medium kann genauso behandelt werden, wenn statt g, $\frac{g\cdot(\varphi_K-\varphi_F)}{\varphi_K}=g\cdot\left(1-\frac{\varphi_F}{\varphi_K}\right)$ (vgl z.B. Budo [2] §16 S.85) in die Gleichungen eingesetzt wird. Dabei ist φ_F die Dichte des Mediums (Flüssigkeit oder Gas) und φ_K die Dichte des Körpers, der sich im Gleichgewicht befindet (nicht die Dichte der Rotationskörperschale).

Begründung:

Bei diesen Gleichgewichtsfällen treten nur Gravitation und Zentrifugalkraft auf. Die Zentrifugalkraft ist unabhängig vom Medium, im Falle der Kreisbewegung hängt die Zentrifugalkraft nur von r und v ab, wie man aus der Herleitung der Zentrifugalkraft sehen kann, nicht aber vom Medium. Die Gravitationsbeschleunigung verändert sich von g zu $g\cdot\frac{\varphi_K-\varphi_F}{\varphi_K}$. Nur bei der Gravitation tritt eine Veränderung auf, weswegen in diesem Fall $g\cdot\left(1-\frac{\varphi_F}{\varphi_K}\right)$ statt g einfach eingesetzt werden kann.

Bei $\varphi_F > \varphi_K$ muß die Rotationskörperschale (bzw. der Arm) umgedreht werden.

statt  dann 

Dann gelten wieder dieselben Gleichungen.

Kapitel 2

Der Reibungsfall

Wir führen folgende Bezeichnungen ein:

m = Masse der Kugel
R = Radius der Kugel
g = Erdbeschleunigung
F_R = Reibungskraft
μ = allgemeiner Reibungskoeffizient
μ_H = Haftreibungskoeffizient
μ_G = Gleitreibungskoeffizient
μ' = Rollreibungskoeffizient
α = Neigunswinkel der Ebene

Wir erklären den Faktor δ folgenderweise:

$$\delta := \begin{cases} \frac{5}{7} & \text{falls} \quad \frac{\mu'}{R} < \mu_H \text{ (Rollen)} \\ 1 & \text{falls} \quad \mu_H < \frac{\mu'}{R} \text{ (Gleiten)} \\ \frac{5}{7} \text{ oder } 1 & \text{falls} \quad \frac{\mu'}{R} = \mu_H \neq 0 \text{ (Entscheidung bleibt offen)} \\ 1 & \text{falls} \quad 0 = \frac{\mu'}{R} = \mu_H \text{ (reibungsfrei)} \end{cases}$$

vgl dazu Assmann [1], Band 1, Kapitel 11.10, S. 265.

Die Beschleunigung b auf der schiefen Ebene ist:
$b = \delta g \cdot \sin\alpha$, die Geschwindigkeit v und die zurückgelegte Strecke s ergeben sich dann als $v = \delta g \sin\alpha \cdot t$ und $s = \frac{1}{2} \cdot \delta g \cdot t^2 \cdot \sin\alpha$.

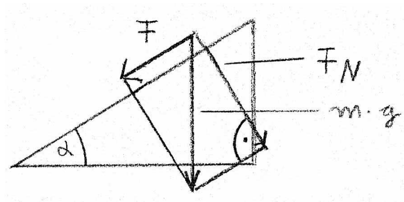
Rollt eine Kugel auf der schiefen Ebene, so ist $\delta = \frac{5}{7}$, dieses folgt zum Beispiel aus Budo [2] §57, S.302, Gl. (8). Das Trägheitsmoment J einer Kugel ist $J = \frac{2}{5} \cdot mR^2$. Die allgemeine Formel für das Abrollen auf der schiefen Ebene lautet:

$$b = \frac{mg\sin\alpha}{m + \frac{J}{R^2}} \tag{2.1}$$

Eine Herleitung befindet sich bei * am Ende des Kapitels oder man kann das mit Budo [2] §57, S.302, Gl. (5)-(7) sehen. Das Trägheitsmoment der Kugel eingesetzt ergibt:

$$b = \frac{mg\sin\alpha}{m + \frac{2}{5}\cdot m} = \frac{5}{7}\cdot g\sin\alpha \tag{2.2}$$

Damit ergibt sich im Fall des Rollens $\delta = \frac{5}{7}$.



Für die Kräfte erhalten wir (siehe Abb.):

$$F = mg\sin\alpha \qquad F_N = mg\cos\alpha$$

Reibungskraft:

$$F_R = \mu\cdot F_N = mg\mu\cos\alpha$$

Im Reibunsfall ist:

$$\mu = \begin{cases} \frac{\mu'}{R} & \text{falls} \quad \mu_H > \frac{\mu'}{R}\text{ (Rollen)} \\ \mu_G & \text{falls} \quad \frac{\mu'}{R} > \mu_H \text{ (Gleiten)} \\ \mu_G \text{ oder } \frac{\mu'}{R} & \text{falls} \quad \mu_H = \frac{\mu'}{R}\text{ (Entscheidung bleibt offen)} \end{cases}$$

vgl. Assmann [1], Band 1, Kapitel 11.10, S.265 Im Reibungsfall ist:

$$F = mg\cdot(\delta\sin\alpha - \mu\cos\alpha) \qquad b = g\cdot(\delta\sin\alpha - \mu\cos\alpha)$$

$$v = gt\cdot(\delta\sin\alpha - \mu\cos\alpha) \qquad s = \frac{1}{2}\cdot gt^2(\delta\sin\alpha - \mu\cos\alpha)$$

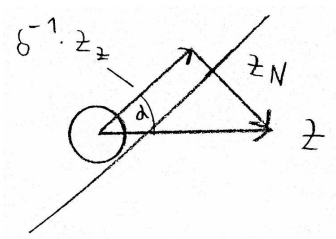
Betrachtet man Kreisbahnen auf Rotationskörperschalen und ist Z die Zentrifugalkraft so lauten die Ungleichungen für stabile Bahnen vgl. Sommerfeld [5] Band 1, §14.1, S.73:

$$Z_z - F_z \leq Z_R + F_R \qquad F_z - Z_z \leq Z_R + F_R$$

mit:

$$F_z = \delta mg\sin\alpha \qquad F_R = mg\cos\alpha\cdot\mu$$

Für die Zentrifugalkräfte (siehe Abb.):



$Z = \frac{mv^2}{r}$ = Zentrifugalkraft

$$Z_N = Z \cdot \sin\alpha \qquad Z_z = \delta \cdot \frac{mv^2}{r} \cdot \cos\alpha$$

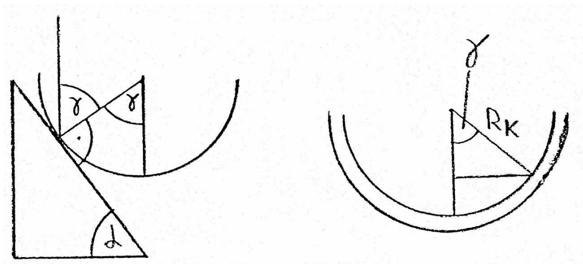
Z_R= Reibungskraft der Zentrifugalkraft

$$Z_R = \mu \cdot Z_N = \mu \cdot \frac{mv^2}{r} \cdot \sin\alpha$$

2.1 Bahnen auf der Kugelschale

Nun geht es um stabile Bahnen auf der Kugelschale, bei der diesmal die Reibung berücksichtigt wird.

R_K = Kugelradius (innerer Radius der Kugelschale)
γ = Höhenwinkel der Kugelschale
$\alpha = \gamma$



Die Grenzgeschwindigkeiten für stabile Bahnen ergeben sich aus:

$$Z_z - F_z = Z_R + F_R \tag{2.3}$$

$$F_z - Z_z = Z_R + F_R \tag{2.4}$$

Es ist $r = \sin\gamma \cdot R_K$ und $\alpha = \gamma$ Es folgt aus (3):

$$\delta \cdot \frac{mv_{max}^2 \cos\gamma}{\sin\gamma \cdot R_K} - \delta mg \sin\gamma = \mu \frac{mv_{max}^2 \sin\gamma}{\sin\gamma \cdot R_K} + mg\cos\gamma \cdot \mu$$

mit $\tan\gamma = \frac{\sin\gamma}{\cos\gamma}$ folgt:

$$\frac{\delta mv_{max}^2}{\tan\gamma \cdot R_K} - \delta mg\sin\gamma = \frac{\mu mv_{max}^2}{R_K} + mg\cos\gamma \cdot \mu$$

geordnet:

$$v_{max}^2 \cdot \left(\frac{\delta m}{\tan\gamma \cdot R_K} - \frac{\mu m}{R_K} \right) = mg\cos\gamma \cdot \mu + \delta mg\sin\gamma$$

Auflösung:

$$v_{max}^2 = \frac{g\sin\gamma \cdot \left(\delta + \frac{\mu}{\tan\gamma}\right)}{\left(\frac{\delta}{\tan\gamma} - \mu\right) \cdot \frac{1}{R_K}}$$

schließlich:

$$v_{max} = \sqrt{\frac{gR_K \sin\gamma \cdot (\tan\gamma \cdot \delta + \mu)}{\delta - \mu \tan\gamma}}$$

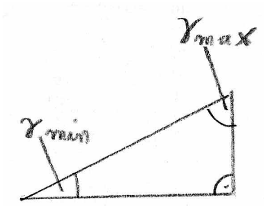
Aus Gl (4) kann man auf dieselbe Weise einen Ausdruck für die minimale Geschwindigkeit bekommen:

$$v_{min} = \sqrt{\frac{gR_K \sin\gamma \cdot (\delta \tan\gamma - \mu)}{\delta + \tan\gamma \cdot \mu}}$$

Es ist allgemein:

$$\text{Winkelgeschwindigkeit} = w = \frac{v}{r} = \frac{v}{\sin\gamma \cdot R_K}$$

Es gibt ein γ_{max} und ein γ_{min} die folgendermaßen aus der maximalen und minimalen Geschwindigkeit bestimmt werden können.



$v_{max} = \infty$ wenn $\delta - \mu \tan\gamma = 0$, daraus folgt:

$$\tan\gamma_{max} = \frac{\delta}{\mu}$$

$v_{min} = 0$ wenn $\delta \tan\gamma - \mu = 0$ daraus bekommt man:

$$\tan\gamma_{min} = \frac{\mu}{\delta}$$

Man erhält zusätzlich:

$$\gamma_{max} + \gamma_{min} = 90°$$

Die Kugel kann sich also nur im Bereich $[\gamma_{min}, \gamma_{max}]$ in einer stabilen Kreisbahn bewegen. Außerhalb dieses Bereiches gibt es keine stabilen Kreisbahnen mit konstanten Höhenwinkel.

Wenn man für μ Null einsetzt erhält man aus der Maximalgeschwindigkeit und der Minimalgeschwindigkeit denselben Ausdruck

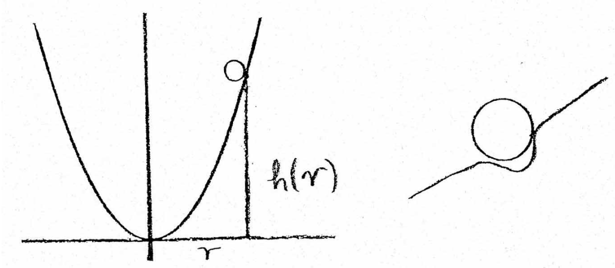
$$v = \sqrt{gR_K \sin\gamma \tan\gamma}$$

für den reibungslosen Fall. Das ist die Formel von Kapitel 1.

Die Beziehung zwischen r und r_m bleibt dieselbe wie im Kapitel 1 für den reibungslosen Fall.

2.2 Die Bahn auf der allgemeinen Rotationskörperschale

$h(r)$ = Rotationskörperfunktion siehe Abbildung,$s = h'(r)$
$h(r)$ muß so sein, daß es mit der Kugel nur **ein** Berührungspunkt gibt. Also keine „Mulden“.



Mit der Rotationskörperfunktion ist immer die von der inneren Schale gemeint.
r = innerer Radius

Es gilt folgendes:

$$s = \tan\alpha \qquad \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+s^2}} \qquad \sin\alpha = \frac{s}{\sqrt{1+s^2}}$$

daraus folgt:

$$F_z = \delta mg \cdot \frac{s}{\sqrt{1+s^2}} \qquad F_R = \frac{mg\mu}{\sqrt{1+s^2}}$$

$$Z_z = \delta \cdot \frac{mv^2}{r \cdot \sqrt{1+s^2}} \qquad Z_R = \frac{\mu mv^2 s}{r \cdot \sqrt{1+s^2}}$$

Nun wenden wir wieder die Gleichung (3) an.

$$\frac{\delta mv_{max}^2}{r \cdot \sqrt{1+s^2}} - \frac{\delta mgs}{\sqrt{1+s^2}} = \frac{\mu mv_{max}^2 s}{r \cdot \sqrt{1+s^2}} + \frac{mg\mu}{\sqrt{1+s^2}}$$

vereinfacht:

$$\frac{v_{max}^2 \cdot \delta}{r} - \frac{v_{max}^2 \cdot \mu s}{r} = g\mu + \delta gs$$

$$\frac{v_{max}^2}{r} \cdot (\delta - \mu s) = g \cdot (\mu + \delta s)$$

schließlich:

$$v_{max} = \sqrt{\frac{rg \cdot (\delta s + \mu)}{\delta - \mu s}}$$

Analog kann man auch eine Formel für die minimale Geschwindigkeit aus der Gleichung (4) herleiten. Diese lautet:

$$v_{min} = \sqrt{\frac{rg \cdot (\delta s - \mu)}{\mu s + \delta}}$$

Es gibt auch hier ein s_{max} und ein s_{min} die aus den Gleichungen für Maximalgeschwindigkeit und Minimalgeschwindigkeit bestimmt werden.

$v_{max} = \infty$ wenn $\delta - \mu s = 0$ daraus folgt:

$$s_{max} = \frac{\delta}{\mu} \tag{2.5}$$

$v_{min} = 0$ wenn $\delta s - \mu = 0$ man erhält:

$$s_{min} = \frac{\mu}{\delta} \tag{2.6}$$

Wir finden:

$$s_{min} \cdot s_{max} = 1$$

Im reibungslosen Fall mit $\mu = 0$ ergibt sich:

$$v_{max} = v_{min} = \sqrt{grs}$$

Diese Formel stimmt mit der vom Kapitel 1 überein.

Die Beziehung zwischen r und r_m ist dieselbe wie im Kapitel 1.

Winkelgeschwindigkeit $= w = \frac{v}{r}$

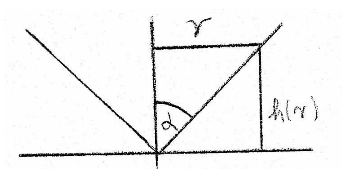
Vom allgemeinen Rotationskörper können nun verschiedene Spezialfälle hergeleitet werden.

2.3 Der Rotationskegel

In diesem Fall ist:

$$h(r) = \frac{r}{\tan\alpha} \qquad s = h'(r) = \frac{1}{\tan\alpha}$$

$\alpha =$ Öffnungswinkel des Kegels



In die Formel für die maximale Geschwindigkeit des allgemeinen Rotationskörpers eingesetzt ergibt:

$$v_{max} = \sqrt{\frac{rg \cdot (\delta s + \mu)}{\delta - \mu s}} = \sqrt{\frac{rg \cdot \left(\frac{\delta}{\tan\alpha} + \mu\right)}{\delta - \frac{\mu}{\tan\alpha}}}$$

schließlich:

$$v_{max} = \sqrt{\frac{rg \cdot (\delta + \tan\alpha \cdot \mu)}{\delta \tan\alpha - \mu}}$$

In derselben Weise erhält man aus der Minimalgeschwindigkeitsformel für den allgemeinen Rotationskörper die Minimalgeschwindigkeit beim Rotationskegel:

$$v_{min} = \sqrt{\frac{rg \cdot (\delta - \mu \tan\alpha)}{\mu + \delta \tan\alpha}}$$

Aus den allgemeinen Grenzbedingungen $s_{max} = \frac{\delta}{\mu}$ und $s_{min} = \frac{\mu}{\delta}$ folgen $\frac{1}{\tan\alpha_{max}} = \frac{\delta}{\mu}$ und $\frac{1}{\tan\alpha_{min}} = \frac{\mu}{\delta}$, so daß wir erhalten:

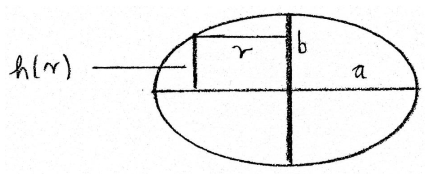
$$\tan\alpha_{max} = \frac{\mu}{\delta} \qquad \tan\alpha_{min} = \frac{\delta}{\mu}$$

Beim Rotationskegel gibt es nicht r_{min},r_{max} sondern α_{min},α_{max}. Setzt man bei den beiden Geschwindigkeitsformel $\mu = 0$ ein so ergibt sich die Formel $v = \sqrt{\frac{rg}{\tan\alpha}}$ für den reibungslosen Fall. Diese Formel ist schon vom vorigen Kapitel bekannt. Die Beziehung zwischen r und r_m ist dieselbe wie im vorigen Kapitel beim reibungslosen Fall.

Winkelgeschwindigkeit $= w = \frac{v}{r}$

2.4 Der Rotationsellipsoid

Wir betrachten die Abbildung:



Aus der Mittelpunktsgleichung der Ellipse mit den Halbachsen a, b bekommen wir (siehe auch voriges Kapitel): $\qquad b =$ Rotationsachse

$$h(r) = \pm\frac{b}{a} \cdot \sqrt{a^2 - r^2} \qquad s = h'(r) = \pm\frac{b}{a} \cdot \frac{r}{\sqrt{a^2 - r^2}}$$

Wir wenden wieder die Formel für die maximale Geschwindigkeit beim allgemeinen Rotationskörper an:

$$v_{max} = \sqrt{\frac{rg \cdot (\delta s + \mu)}{\delta - \mu s}} = \sqrt{\frac{rg \cdot \left(\delta \cdot \frac{b}{a} \cdot \frac{r}{\sqrt{a^2 - r^2}} + \mu\right)}{\delta - \frac{b}{a} \cdot \frac{\mu r}{\sqrt{a^2 - r^2}}}}$$

schließlich:

$$v_{max} = \sqrt{\frac{rg \cdot (\delta b r + \mu a \cdot \sqrt{a^2 - r^2})}{\delta a \cdot \sqrt{a^2 - r^2} - b \mu r}}$$

Analog kann man aus der Formel für die Minimalgeschwindigkeit des allgemeinen Rotationskörpers folgende Gleichung herleiten:

$$v_{min} = \sqrt{\frac{rg \cdot (\delta br - \mu a \cdot \sqrt{a^2 - r^2})}{\mu br + \delta a \cdot \sqrt{a^2 - r^2}}}$$

Aus den allgemeinen Grenzbedingungen $s_{max} = \frac{\delta}{\mu}$ und $s_{min} = \frac{\mu}{\delta}$ bekommt man die speziellen Bedingungen für den Rotationsellipsoiden:

$$\frac{\delta}{\mu} = \frac{b}{a} \cdot \frac{r_{max}}{\sqrt{a^2 - r_{max}^2}} \qquad \frac{\mu}{\delta} = \frac{b}{a} \cdot \frac{r_{min}}{\sqrt{a^2 - r_{min}^2}}$$

wir formen jetzt nach r_{max} um:

$$\delta^2 a^2 \cdot (a^2 - r_{max}^2) = \mu^2 b^2 r_{max}^2$$

$$\delta^2 a^4 - \delta^2 a^2 r_{max}^2 = \mu^2 b^2 r_{max}^2$$

$$r_{max}^2 = \frac{\delta^2 a^4}{\mu^2 b^2 + \delta^2 a^2}$$

also:

$$r_{max} = \frac{\delta a^2}{\sqrt{\mu^2 b^2 + \delta^2 a^2}} < a$$

Die andere Grenzbedingung kann man genauso nach r_{min} umformen:

$$r_{min} = \frac{a^2 \mu}{\sqrt{b^2 \delta^2 + a^2 \mu^2}} < a$$

Für $\mu \ll 1$ folgt nun:

$$r_{min} \approx \frac{a^2 \mu}{b\delta} \qquad r_{max} \approx a$$

Einsetzung von $\mu = 0$ bei den Formeln für die Maximal- und Minimalgeschwindigkeit führt zur bekannten Formel für den reibunsfreien Fall (siehe Kapitel 1):

$$v = r \cdot \sqrt{\frac{gb}{a \cdot \sqrt{a^2 - r^2}}}$$

Die Gleichung zwischen r und r_m ist dieselbe wie im Kapitel 1.

Winkelgeschwindigkeit $= w = \frac{v}{r}$

2.5 Spezialfall Kugel $(a = b = R_K)$

Durch Spezialisierung der Rotationsellipsoidengleichungen erhält man die Gleichungen für die Kugel diesmal in Abhängigkeit von r und nicht vom Höhenwinkel. $a = b = R_K$ gesetzt ergeben:

$$v_{max} = \sqrt{\frac{rg \cdot (\delta r + \mu \cdot \sqrt{R_K^2 - r^2})}{\delta \cdot \sqrt{R_K^2 - r^2} - \mu r}}$$

$$v_{min} = \sqrt{\frac{rg \cdot (\delta r - \mu \cdot \sqrt{R_K^2 - r^2})}{\mu r + \delta \cdot \sqrt{R_K^2 - r^2}}}$$

$$r_{max} = \frac{\delta \cdot R_K}{\sqrt{\mu^2 + \delta^2}} \qquad r_{min} = \frac{R_K \cdot \mu}{\sqrt{\delta^2 + \mu^2}}$$

für $\mu \ll 1$ ist $r_{min} \approx \frac{R_K \cdot \mu}{\delta}$ und $r_{max} \approx R_K$. Beim reibungslosen Fall $\mu = 0$ erhält man aus den Geschwindigkeitsformeln wieder die bekannte Formel

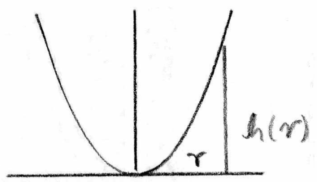
$$v = r \cdot \sqrt{\frac{g}{\sqrt{R_K^2 - r^2}}}$$

aus Kapitel 1.
Die Beziehung zwischen r und r_m ist wie im Kapitel 1.

Winkelgeschwindigkeit $= w = \frac{v}{r}$

2.6 Der Paraboloid

Wir wenden nun die Gleichungen des allgemeinen Rotationskörpers auf den Paraboloiden an. f ist die Brennweite des Paraboloiden.



Für den Paraboloiden gilt nach Kapitel 1:

$$h(r) = \frac{r^2}{4f} \qquad s = h'(r) = \frac{r}{2f}$$

Wir setzen nun die Parabelfunktion in die Formel für die maximale Geschwindigkeit des allgemeinen Rotationskörpers ein.

$$v_{max} = \sqrt{\frac{rg \cdot (\delta s + \mu)}{\delta - \mu s}} = \sqrt{\frac{rg \cdot \left(\delta \cdot \frac{r}{2f} + \mu\right)}{\delta - \frac{\mu r}{2f}}}$$

also folgt:

$$v_{max} = \sqrt{\frac{rg \cdot (\delta r + 2f\mu)}{2f\delta - \mu r}}$$

Entsprechend erhält man aus der Minimalgeschwindigkeitsformel die minimale Geschwindigkeit für den Paraboloiden:

$$v_{min} = \sqrt{\frac{rg \cdot (\delta r - 2f\mu)}{\mu r + 2f\delta}}$$

Aus den allgemeinen Grenzbedingungen $s_{max} = \frac{\delta}{\mu}$ und $s_{min} = \frac{\mu}{\delta}$ bekommen wir durch Einsetzung für s:

$$\frac{r_{max}}{2f} = \frac{\delta}{\mu} \qquad \text{also:} \qquad r_{max} = 2 \cdot \frac{\delta f}{\mu}$$

und

$$\frac{r_{min}}{2f} = \frac{\mu}{\delta} \qquad \text{also:} \qquad r_{min} = 2 \cdot \frac{f\mu}{\delta}$$

Bei $\mu = 0$ folgt aus den Geschwindigkeitsformeln die bekannte Formel für den reibungsfreien Fall (Kapitel 1):

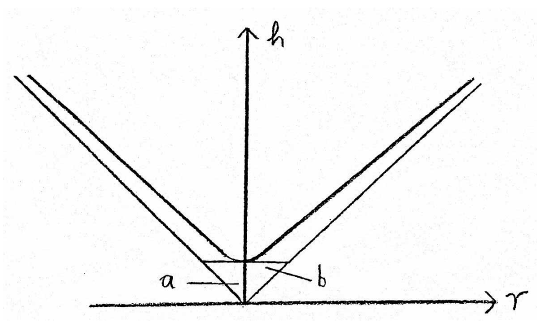
$$v = r \cdot \sqrt{\frac{g}{2f}}$$

Die Gleichung zwischen r und r_m bleibt dieselbe wie im Kapitel 1.

Winkelgeschwindigkeit $= w = \frac{v}{r}$

2.7 Der Hyperboloid

Unter Beachtung der Abbildung und der Mittelpunktsgleichung der Hyperbel erhalten wir wie im Kapitel 1: $\quad a, b =$ Halbachsen



$$h(r) = \frac{a}{b} \cdot \sqrt{b^2 + r^2} \qquad s = h'(r) = \frac{a}{b} \cdot \frac{r}{\sqrt{b^2 + r^2}}$$

Setzen wir nun die Hyperbelgleichung in die Formel für die maximale Geschwindigkeit (allgemeiner Rotationskörper) ein, so bekommen wir:

$$v_{max} = \sqrt{\frac{rg \cdot (\delta s + \mu)}{\delta - \mu s}} = \sqrt{\frac{rg \cdot \left(\delta \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{r}{\sqrt{b^2+r^2}} + \mu\right)}{\delta - \frac{\mu r a}{b \cdot \sqrt{b^2+r^2}}}}$$

also:

$$v_{max} = \sqrt{\frac{rg \cdot (\delta a r + \mu b \cdot \sqrt{b^2 + r^2})}{\delta b \cdot \sqrt{b^2 + r^2} - \mu r a}}$$

Aus der Formel für die minimale Geschwindigkeit im allgemeinen Rotationskörper kann man analog folgern:

$$v_{min} = \sqrt{\frac{rg \cdot (\delta ar - \mu b\sqrt{b^2 + r^2})}{\mu ar + \delta b\sqrt{b^2 + r^2}}}$$

wenn $b \ll r$ so kann man schließen:

$$s = h'(r) = \frac{a}{b} \cdot \frac{r}{\sqrt{b^2 + r^2}} \approx \frac{a}{b}$$

daraus folgt nun für $b \ll r$:

$$v_{max} \approx \sqrt{\frac{rg \cdot \left(\delta \cdot \frac{a}{b} + \mu\right)}{\delta - \frac{\mu a}{b}}} = \sqrt{\frac{rg \cdot (\delta a + \mu b)}{\delta b - \mu a}}$$

Aus der Formel für die minimalen Geschwindigkeit kann man für $b \ll r$ analog berechnen:

$$v_{min} \approx \sqrt{\frac{rg \cdot (\delta a - \mu b)}{\mu a + \delta b}}$$

Setzen wir die Formel für s in die allgemeinen Grenzbedingungen $s_{max} = \frac{\delta}{\mu}$ und $s_{min} = \frac{\mu}{\delta}$ ein, so erhalten wir:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{r_{max}}{\sqrt{b^2 + r_{max}^2}} = \frac{\delta}{\mu} \qquad \frac{a}{b} \cdot \frac{r_{min}}{\sqrt{b^2 + r_{min}^2}} = \frac{\mu}{\delta}$$

Wir formen die erste Gleichung um:

$$a^2\mu^2 r_{max}^2 = \delta^2 \cdot (b^2 + r_{max}^2) \cdot b^2$$

$$a^2\mu^2 r_{max}^2 = \delta^2 b^4 + \delta^2 b^2 r_{max}^2$$

$$r_{max}^2 = \frac{\delta^2 b^4}{a^2\mu^2 - \delta^2 b^2}$$

schließlich:

$$r_{max} = \frac{\delta b^2}{\sqrt{a^2\mu^2 - \delta^2 b^2}}$$

Aus der Gleichung für r_{min} kriegen wir durch eine ähnliche Rechnung:

$$r_{min} = \frac{\mu b^2}{\sqrt{a^2\delta^2 - \mu^2 b^2}}$$

Als Näherung für $\mu \ll \delta \leq 1$:

$$r_{min} \approx \frac{\mu b^2}{a\delta} \qquad r_{max} \approx b$$

Für $\mu = 0$ bekommen wir aus den beiden Geschwindigkeitsformeln die von Kapitel 1 bekannte Formel für den reibunsfreien Fall:

$$v = r \cdot \sqrt{\frac{ga}{b \cdot \sqrt{b^2 + r^2}}}$$

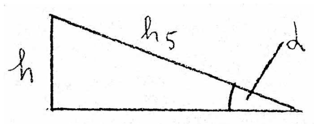
Für r und r_m gilt dieselbe Beziehung wie im Kapitel 1.

Winkelgeschwindigkeit $= w = \frac{v}{r}$

zu *: Es geht um die Herleitung von Formel (1):

Bezeichnungen:

kinetische Energie $= E_{kin} = \frac{mv^2}{2}$
potentielle Energie $= E_{pot} = mgh$ mit $h = h_s \sin\alpha$ siehe Abb.
Rotationsenergie $= E_{rot} = \frac{Jw^2}{2}$ $\qquad J =$ Trägheitsmoment



Energiesatz:

$$\frac{mv^2}{2} + \frac{Jw^2}{2} = mgh$$

Wir setzen voraus, daß der Körper nur rollt und nicht gleitet. Dann gilt:
Winkelgeschwindigkeit $= w = \frac{v}{R}$ $\qquad R =$ Radius des rollenden Körpers

$$\frac{mv^2}{2} + \frac{Jv^2}{2R^2} = mgh_s \sin\alpha$$

Durch Umformung erhalten wir:

$$v = \sqrt{\frac{2mgh_s \sin\alpha}{m + \frac{J}{R^2}}}$$

Da der rollende Körper mit der konstanten Beschleunigung $b = g \sin\alpha$ gezogen wird, liegt eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung vor. Für diese Bewegung gilt: $v^2 = 2h_s \cdot b$ umgeformt zu $b = \frac{v^2}{2h_s}$ Nun wird die Gleichung zu v eingesetzt:

$$b = \frac{2mgh_s \sin\alpha}{2h_s \cdot \left(m + \frac{J}{R^2}\right)} = \frac{mg \sin\alpha}{m + \frac{J}{R^2}}$$

Damit haben wir dann die gewünschte Formel.

Kapitel 3

Umkehrungen

3.1 Umkehrungen beim reibungslosen Fall

Die Kugelschale:

Wir nehmen die Notation von Kapitel 1.1.

Winkelgeschwindigkeit:

$$w = \sqrt{\frac{g}{R_k \cdot \cos\gamma}} \qquad \Rightarrow \qquad w^2 = \frac{g}{R_k \cdot \cos\gamma}$$

umgeformt nach $\cos\gamma$:

$$\cos\gamma = \frac{g}{R_k \cdot w^2}$$

Geschwindigkeitsformel:

$$v^2 = g \cdot R_k \cdot \sin\gamma \cdot \tan\gamma$$

mit

$$\sin^2\gamma + \cos^2\gamma = 1 \qquad \sin\gamma = \sqrt{1 - \cos^2\gamma} \qquad \tan\gamma = \frac{\sin\gamma}{\cos\gamma}$$

folgt:

$$v^2 = gR_k \cdot \sqrt{1 - \cos^2\gamma} \cdot \frac{\sqrt{1 - \cos^2\gamma}}{\cos\gamma} = gR_k \cdot \frac{1 - \cos^2\gamma}{\cos\gamma}$$

ausmultipliziert:

$$v^2 \cos\gamma = gR_k - gR_k \cos^2\gamma$$

schließlich erhalten wir eine quadratische Gleichung:

$$\cos^2\gamma + \frac{v^2}{gR_k} \cdot \cos\gamma - 1 = 0$$

Lösung der quadratischen Gleichung:

$$\cos\gamma = +\sqrt{1 + \left(\frac{v^2}{2gR_k}\right)^2} - \frac{v^2}{2gR_k}$$

Hier ist nur die Wurzel mit dem positiven Vorzeichen sinnvoll, sonst wird $\cos\gamma < 0$ und im Bereich $[0, 90°]$ gibt es dafür keine Lösung.

Rotationsellipsoid:

Wir übernehmen die Symbole von Kapitel 1.4. Nun geht es darum r als Funktion von der Geschwindigkeit v zu ermitteln. Wir gehen dabei von der Geschwindigkeitsgleichung (3) im Kapitel 1 aus:

$$v = r \cdot \sqrt{\frac{b \cdot g}{a \cdot \sqrt{a^2 - r^2}}}$$

daraus folgt:

$$\frac{v^2}{r^2} = \frac{bg}{a \cdot \sqrt{a^2 - r^2}}$$

Umgeformt:

$$\frac{v^4 a^2}{r^4} \cdot (a^2 - r^2) = b^2 \cdot g^2$$

Wir bringen diesen Ausdruck zu einer Polynomgleichung:

$$v^4 a^4 - v^4 a^2 \cdot r^2 = b^2 g^2 \cdot r^4$$

Normierte Form:

$$r^4 + \frac{v^4 a^2}{b^2 g^2} \cdot r^2 - \frac{v^4 a^4}{b^2 g^2} = 0$$

Dieser Ausdruck kann als quadratische Gleichung nach r^2 aufgefaßt werden, also:

$$r^2 = +\sqrt{\frac{v^4 a^4}{b^2 g^2} + \left(\frac{v^4 a^2}{2b^2 g^2}\right)^2} - \frac{v^4 a^2}{2b^2 g^2} \tag{3.1}$$

Wir leiten jetzt eine Formel für r in Abhängigkeit von der Winkelgeschwindigkeit w her. Wir gehen dabei von der Gleichung (4) in Kapitel 1 für die Winkelgeschwindigkeit aus.

$$w^2 = \frac{bg}{a \cdot \sqrt{a^2 - r^2}}$$

umgeformt:

$$\sqrt{a^2 - r^2} = \frac{bg}{aw^2}$$

Auflösung nach r:

$$r^2 = a^2 - \left(\frac{bg}{aw^2}\right)^2$$

$$r = \sqrt{a^2 - \left(\frac{bg}{aw^2}\right)^2} \tag{3.2}$$

Kugel als Spezialfall des Rotationsellipsoiden:

Es ist auch wieder möglich die Kugel als Spezialfall des Rotationsellipsoiden mit dem Kugelradius $R_k = a = b$ betrachten. Spezialisierung von (1) und (2):

$$r(v)^2 = +\sqrt{\frac{v^4 R_k^2}{g^2} + \left(\frac{v^4}{2g^2}\right)^2} - \frac{v^4}{2g^2}$$

$$r = \sqrt{R_k^2 - \left(\frac{g}{w^2}\right)^2}$$

Hyperboloid:

Die Symbole von Kapitel 1.7 werden übernommen. Nun geht es darum den Radius r aus der Geschwindigkeit v zu ermitteln, Gleichung (6) von Kapitel 1:

$$v = \sqrt{gr \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{r}{\sqrt{b^2 + r^2}}} = r \cdot \sqrt{\frac{ag}{b \cdot \sqrt{b^2 + r^2}}}$$

umgeformt:

$$\frac{v^2}{r^2} = \frac{ag}{b \cdot \sqrt{b^2 + r^2}}$$

$$v^4 b^2 \cdot (b^2 + r^2) = a^2 g^2 r^4$$

Ausmultipliziert:

$$v^4 b^4 + v^4 b^2 r^2 = a^2 g^2 r^4$$

Normierte Form:

$$r^4 - \frac{v^4 b^2}{a^2 g^2} \cdot r^2 - \frac{v^4 b^4}{a^2 g^2} = 0$$

Dieser Ausdruck kann als quadratische Gleichung für r^2 behandelt werden.

$$r^2 = +\sqrt{\frac{v^4 b^4}{a^2 g^2} + \left(\frac{v^4 b^2}{2a^2 g^2}\right)^2} + \frac{v^4 b^2}{2a^2 g^2}$$

Ermittlung von r aus der Winkelgeschwindigkeit w:

$$w = \sqrt{\frac{ag}{b \cdot \sqrt{b^2 + r^2}}}$$

Umformung:

$$\sqrt{b^2 + r^2} = \frac{ag}{bw^2}$$

nach r aufgelöst:

$$r = \sqrt{\left(\frac{ag}{bw^2}\right)^2 - b^2}$$

3.2 Umkehrungen zum Reibungsfall

Wir übernehmen die Symbole von Kapitel 2.1 - 2.7. Lösen wir die Formeln für die maximale Geschwindigkeit nach den Radius r oder den Höhenwinkel γ auf, so bekommen wir Formeln für r_{min} bzw. γ_{min}. Eine Auflösung der minimalen Geschwindigkeitsformeln nach r oder γ führt dagegen zu einen Ausdruck für r_{max} und γ_{max}. Beim Rotationskegel erhalten wir:

$$r_{min} = \frac{(\delta \tan\alpha - \mu) \cdot v^2}{g \cdot (\delta + \tan\alpha \cdot \mu)} \qquad r_{max} = \frac{(\mu + \delta \tan\alpha) \cdot v^2}{g \cdot (\delta - \mu \tan\alpha)}$$

Bei dem Paraboloiden ist die Auflösung nach r etwas komplizierter. Sie führt über eine quadratische Gleichung für r zu den folgenden Ausdrücken:

$$r_{min} = +\sqrt{\left(\frac{2f\mu g + \mu v^2}{2\delta g}\right)^2 + \frac{2fv^2}{g}} - \frac{2f\mu g + \mu v^2}{2\delta g}$$

$$r_{max} = +\sqrt{\left(\frac{2f\mu g + \mu v^2}{2g\delta}\right)^2 + \frac{2fv^2}{g}} + \frac{2f\mu g + \mu v^2}{2g\delta}$$

Die postive Wurzel ist bei beiden Formeln zu nehmen, da sonst die Lösungen negativ werden.

Auch beim Ellipsoiden und beim Hyberboloiden können solche Auflösungen nach r durchgeführt werden. Man kommt dann zu Polynomen 4.Grades in r, die mit großen Aufwand noch exakt gelöst werden können. Die Auflösung der Geschwindigkeitsformel von der Kugel mit Höhenwinkel γ nach γ führt zu einem Polynom 4.Grades in $\tan\gamma$.

Die Formeln für Geschwindigkeiten und Winkelgeschwindigkeiten bei Bahnen auf Rotationskörperschalen können auch als Funktion von h (beim Ellisoiden auch durch den Höhenwinkel γ) berechnet werden. Bei allen speziellen Rotationskörpern kann $r = f(h)$ eingesetzt werden. Beim allgemeinen Rotationskörper muß der Fall mit h nochmals hergeleitet werden. (Von diesen ist evt. ebenfalls die Entwicklung der speziellen Formeln möglich.) Für die Einsetzungen von $v, w = f(r)$ zu $v, w = f(h)$ gelten:

$x = r, y = h$

$$\text{für Ellipsoiden:} \qquad \frac{r^2}{a^2} + \frac{h^2}{b^2} = 1 \qquad (a \leq b) \text{ oder } (a \geq b)$$

$$\text{für Kugeln:} \qquad r^2 + h^2 = R_K^2$$

$$\text{für Hyperboloiden:} \qquad \frac{h^2}{a^2} - \frac{r^2}{b^2} = 1$$

$$\text{für Paraboloiden:} \qquad r^2 = 4hf$$

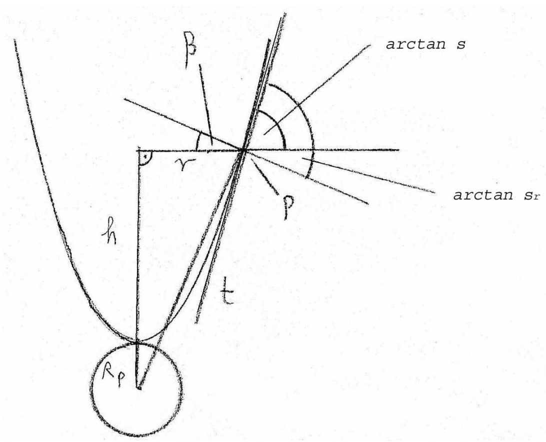
$$\text{für Rotationskegel:} \qquad h = r \cdot \tan\alpha$$

Kapitel 4

Stabile Kugelbahnen auf Makrorotationskörpern im reibungslosen Fall

4.1 Der allgemeine Rotationskörper

Ein Planet steht still oder führt eine gleichförmige Bewegung im sonst materiefreien Raum aus. Der Planet wird als Kugel angesehen. Senkrecht zur Kugeloberfläche steht die Achse des allgemeinen Rotationskörpers. Der Planet soll überhaupt nicht rotieren.



R_p = Radius des Planeten
g = Gravitationsbeschleunigung in P
m_p = Masse des Planeten
G = Gravitationskonstante
v = Geschwindigkeit
m = Masse der Kugel
t = Tangente
$h(r)$ = Rotationskörperfunktion

$s = h'(r)$
$h(r)$ muß so sein, daß es mit der Kugel immer nur **ein** Berührungspunkt gibt.

$$g = \frac{Gm_p}{(h+R_p)^2 + r^2}$$

Zentrifugalkraft $= Z = \frac{mv^2}{r}$

Nun muß s_r berechnet werden. Es gilt $s_r = f(s, h, r)$.

$$\beta = 90^\circ - \arctan \frac{h+R_p}{r}$$

Wir haben für s_r:

$$\arctan s_r = \arctan s + \beta = \arctan s + 90^\circ - \arctan \frac{h+R_p}{r}$$

wegen $\tan(90^\circ - a) = \frac{1}{\tan a}$ daraus folgt:

$$\arctan s + \arctan \frac{r}{h+R_p} = \arctan s_r$$

Damit kann eine einfache Beziehung mit Hilfe des Additionstheorem des Tangens gefunden werden.

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$$

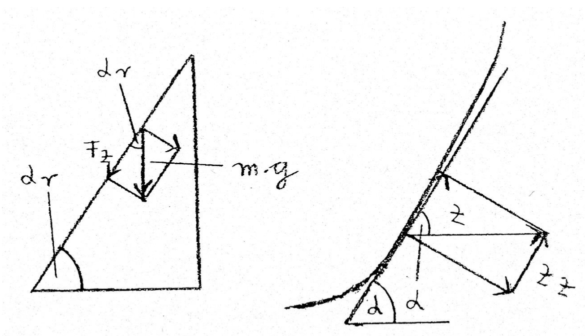
damit bekommt man:

$$s_r = \frac{s + \frac{r}{h+R_p}}{1 - \frac{sr}{h+R_p}} = \frac{r + s\cdot(h+R_p)}{h+R_p-sr}$$

Bei $h, r \ll R_p$ ist $s_r \approx s$.

Bedingung für Bahnen: $s_r > 0$ ist gleichwertig zu $0 < r + s\cdot(h+R_p)$ und $h + R_p - sr > 0$. $s_r < 0$ ist hier nicht möglich. Aus den beiden Bedingungen folgen:

$$s > \frac{-r}{h+R_p} \qquad \text{und} \qquad \frac{h+R_p}{r} > s$$



F_z = Fallkraftkomponente $\quad$ Z_z = Zentrifugalkraftkomponente

$$F_z = mg \cdot \sin\alpha_r \qquad Z_z = Z \cdot \cos\alpha$$

$$\tan\alpha_r = s_r \qquad \tan\alpha = s \qquad \sin\alpha = \cos\alpha \cdot \tan\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}} \qquad \Rightarrow \qquad \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+s^2}}$$

$$\sin\alpha_r = \frac{s_r}{\sqrt{1+s_r^2}}$$

das führt zu:

$$F_z = \frac{mgs_r}{\sqrt{1+s_r^2}}$$

Zentrifugalkraft $= Z = \frac{mv^2}{r}$ wir erhalten:

$$Z_z = \frac{mv^2}{r \cdot \sqrt{1+s^2}}$$

Für die Kreisbahn muß $Z_z = F_z$ sein, also:

$$\frac{mgs_r}{\sqrt{1+s_r^2}} = \frac{mv^2}{r \cdot \sqrt{1+s^2}}$$

schließlich folgt:

$$v = \sqrt{grs_r \cdot \sqrt{\frac{1+s^2}{1+s_r^2}}}$$

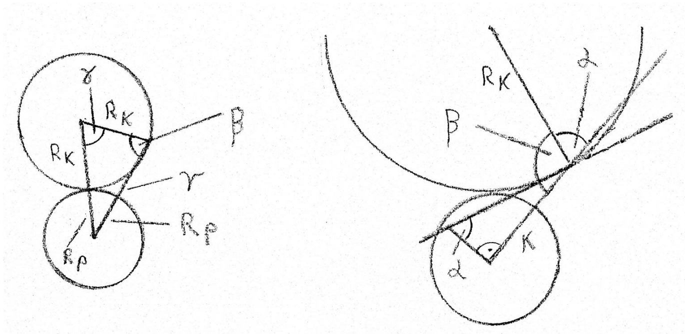
$$w = \frac{v}{r} = \sqrt{\frac{gs_r}{r} \cdot \sqrt{\frac{1+s^2}{1+s_r^2}}}$$

Die Beziehung zwischen r und r_m bleibt dieselbe.

In die allgemeinen Gleichungen können in s die Formeln für s bei Rotationskegel, Ellipsoid, Kugel, Paraboloid, Hyperboloid eingesetzt werden. Man erhält dann die zugehörigen Gleichungen für den Makrotyp im reibunslosen Fall.

4.2 Die Makrokugel mit Höhenwinkel

Wir kommen nun zur Makrokugelschale:
R_p = Planetenradius
m_p = Masse des Planeten
R_K = Radius der Makrokugel
m = Masse der Kugel
γ = Höhenwinkel
α = Neigungswinkel zur Gravitation
K = Gravitationskraft
G = Gravitationskonstante



Kosinussatz:

$$r^2 = (R_K + R_p)^2 + R_K^2 - 2R_K \cdot (R_K + R_p) \cdot \cos\gamma$$

Beim reibungslosen Fall im homogenen Feld wurde $\alpha = \gamma$ gezeigt. Im Gravitationsfeld ist die Beziehung $\alpha = f(\gamma)$ etwas komplizierter ebenso wie die Gravitationsbeschleunigung g:

$$g = \frac{Gm_p}{r^2} = \frac{Gm_p}{(R_K + R_p)^2 + R_K^2 - 2R_K \cdot (R_p + R_K) \cdot \cos\gamma} \tag{4.1}$$

noch einmal Kosinussatz:

$$(R_K + R_p)^2 = r^2 + R_K^2 - 2rR_K \cos\beta$$

umgeformt und für r eingesetzt:

$$\cos\beta = \frac{r^2 + R_K^2 - (R_K + R_p)^2}{2rR_K}$$

$$= \frac{R_K - (R_K + R_p) \cdot \cos\gamma}{\sqrt{(R_K + R_p)^2 + R_K^2 - 2R_K \cdot (R_K + R_p) \cdot \cos\gamma}}$$

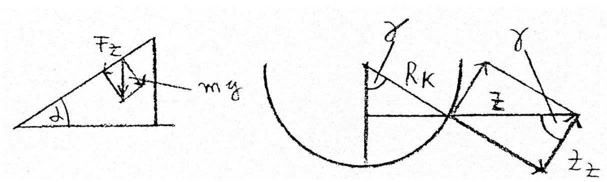
nach der Abbildung ist:

$$\beta = 180° - \alpha \qquad \Rightarrow \qquad \cos\beta = \cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$$

daraus folgt:

$$\cos\alpha = \frac{(R_K + R_p) \cdot \cos\gamma - R_K}{\sqrt{(R_K + R_p)^2 + R_K^2 - 2R_K \cdot (R_p + R_K) \cdot \cos\gamma}} \tag{4.2}$$

F_z = Fallkraftkomponente
Z_z = Zentrifugalkraftkomponente



$$F_z = mg\sin\alpha \qquad Z_z = Z\cdot\cos\gamma$$

$$Z = \frac{mv^2}{R_K\cdot\sin\gamma}$$

mit $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ erhalten wir:

$$Z_z = \frac{mv^2}{R_K\cdot\tan\gamma}$$

Für eine Kreisbahn in der Makrokugelschale muß $F_z = Z_z$ sein, also:

$$mg\sin\alpha = \frac{mv^2}{R_K\cdot\tan\gamma}$$

es folgt:

$$v = \sqrt{gR_K\sin\alpha\tan\gamma} \tag{4.3}$$

w = Winkelgeschwindigkeit

$$w = \frac{v}{R_K\cdot\sin\gamma} = \sqrt{\frac{gR_K\sin\alpha\tan\gamma}{R_K^2\cdot\sin^2\gamma}} = \sqrt{\frac{g\sin\alpha\sin\gamma}{R_K\sin^2\gamma\cos\gamma}}$$

schließlich:

$$w = \sqrt{\frac{g\sin\alpha}{R_K\sin\gamma\cos\gamma}} \tag{4.4}$$

In (3) und (4) sind für g und α (1) bzw. (2) einzusetzen. Die Gleichung zwischen r und r_m bleibt unverändert. Die Verallgemeinerung a) am Ende von Kapitel 1 gilt sinngemäß auch für die Makrorotationskörper.

Kapitel 5

Stabile Bahnen auf Makrorotationskörpern mit Reibung

5.1 Der allgemeine Makrorotationskörper mit Reibung

Die Symbole werden vom reibungslosen Makrofall (Kapitel 4.1) übernommen.

R_p = Radius des Planeten
g = Gravitationsbeschleunigung in P
m_p = Masse des Planeten
G = Gravitationskonstante
v = Geschwindigkeit
m = Masse der Kugel
$h(r)$ = Rotationskörperfunktion
$s = h'(r)$
$h(r)$ muß so sein, daß es mit der Kugel immer nur **ein** Berührungspunkt gibt.

$$g = \frac{Gm_p}{(h + R_p)^2 + r^2}$$

Nach Kapitel 4.1 gilt:

$$F_z = \frac{mgs_r\delta}{\sqrt{1 + s_r^2}} \qquad Z_z = \frac{mv^2\delta}{r \cdot \sqrt{1 + s^2}}$$

δ kommt aufgrund des Reibungsfalls noch hinzu. (Erklärung folgt später)

F_R = Reibungskraft durch die Schwerkraft
Z_R = Reibungskraft durch die Zentrifugalkraft

vgl. die Abbildungen in Kap. 4.1

$$F_R = mg \cos \alpha_r \cdot \mu$$

$$Z_R = Z \sin\alpha \cdot \mu \qquad Z = \frac{mv^2}{r}$$

μ ist ein allgemeiner Reibungskoeffizient. Er ist erklärt durch:

$$\mu = \begin{cases} \frac{\mu'}{R} & \text{falls} \quad \mu_H > \frac{\mu'}{R} \text{ (Rollen)} \\ \mu_G & \text{falls} \quad \frac{\mu'}{R} > \mu_H \text{ (Gleiten)} \\ \mu_G \text{ oder } \frac{\mu'}{R} & \text{falls} \quad \mu_H = \frac{\mu'}{R} \text{ (Entscheidung bleibt offen)} \end{cases}$$

und

$$\delta := \begin{cases} \frac{5}{7} & \text{falls} \quad \frac{\mu'}{R} < \mu_H \text{ (Rollen)} \\ 1 & \text{falls} \quad \mu_H < \frac{\mu'}{R} \text{ (Gleiten)} \\ \frac{5}{7} \text{ oder } 1 & \text{falls} \quad \frac{\mu'}{R} = \mu_H \neq 0 \text{ (Entscheidung bleibt offen)} \\ 1 & \text{falls} \quad 0 = \frac{\mu'}{R} = \mu_H \text{ (reibungsfrei)} \end{cases}$$

vgl dazu Assmann [1] Band 1 Kapitel 11.10 S. 265

Dabei ist:

μ_G = Gleitreibungskoeffizient
μ_H = Haftreibungskoeffizient
μ' = Rollreibungskoeffizient
R =Radius der Kugel, die sich auf der Rotationskörperschale befindet. Zur Begründung von δ und μ vgl. Kapitel 2 am Anfang.

Nach Kapitel 4.1 ist: $\tan\alpha_r = s_r$ und $\tan\alpha = s$ daher:

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}} \qquad \sin\alpha = \frac{\tan\alpha}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}$$

daraus folgt:

$$F_R = \frac{mg\mu}{\sqrt{1+s_r^2}} \qquad Z_R = \frac{mv^2\mu s}{r\cdot\sqrt{1+s^2}}$$

Stabilitätsungleichung: $\quad |\cdot|$ = reeller Betrag

$$|F_z - Z_z| \leq F_R + Z_R$$

Grenzfälle:

$$Z_z - F_z = F_R + Z_R \tag{5.1}$$

$$F_z - Z_z = F_R + Z_R \tag{5.2}$$

aus (1) folgt:

$$\frac{mv_{max}^2\cdot\delta}{r\cdot\sqrt{1+s^2}} - \frac{mgs_r\cdot\delta}{\sqrt{1+s_r^2}} = \frac{mg\mu}{\sqrt{1+s_r^2}} + \frac{mv_{max}^2\cdot\mu s}{r\cdot\sqrt{1+s^2}}$$

vereinfacht:

$$\frac{v_{max}^2}{r\cdot\sqrt{1+s^2}}\cdot(\delta-\mu s) = \frac{g}{\sqrt{1+s_r^2}}\cdot(\mu+s_r\cdot\delta)$$

umgeformt:

$$v_{max}^2 = rg \cdot \sqrt{\frac{1+s^2}{1+s_r^2}} \cdot \frac{\mu + s_r \cdot \delta}{\delta - \mu \cdot s}$$

schließlich:

$$v_{max} = \sqrt{rg \cdot \sqrt{\frac{1+s^2}{1+s_r^2}} \cdot \frac{\mu + s_r \cdot \delta}{\delta - \mu s}} \tag{5.3}$$

Auf ähnliche Weise bekommt man aus (2) einen Ausdruck für die minimale Geschwindigkeit:

$$v_{min} = \sqrt{rg \cdot \sqrt{\frac{1+s^2}{1+s_r^2}} \cdot \frac{s_r \delta - \mu}{\mu s + \delta}} \tag{5.4}$$

Bei $r \ll R_p$ ist $s_r \approx s$ vgl. Kapitel 4.1. Damit gehen in diesem Fall die Gleichungen (3) und (4) in die entsprechenden Formeln des homogenen Feldes (Kapitel 2.2) über.
Bei $\mu = 0$ erhält man aus (3) und (4) die Formel für den reibungsfreien Fall (Kapitel 4.1).

$v_{max} = \infty$ wenn $\delta - \mu s = 0$ siehe Gleichung (3) daraus folgt:

$$s_{max} = \frac{\delta}{\mu}$$

$v_{min} = 0$ wenn $s_r \cdot \delta - \mu = 0$ siehe Gleichung (4)

$$\Rightarrow \qquad s_{r\,min} = \frac{\mu}{\delta}$$

In Kapitel 4.1 wurde hergeleitet:

$$s_r = \frac{r + s \cdot (h + R_p)}{h + R_p - sr}$$

s_r nimmt mit s zu, wenn $h + R_p - s \cdot r > 0$ ist , daher gibt es auch ein s_{min}. Wir formen nach s um:

$$s_r \cdot h + s_r \cdot R_p - sr \cdot s_r = r + sh + sR_p$$

Auflösung nach s:

$$s_r \cdot h + s_r \cdot R_p - r = s \cdot (r \cdot s_r + h + R_p)$$

$$\Rightarrow \qquad s = \frac{s_r \cdot (h + R_p) - r}{s_r \cdot r + h + R_p}$$

Einsetzung für $s_{r\,min}$:

$$s_{min} = \frac{\frac{\mu}{\delta} \cdot (h + R_p) - r}{\frac{\mu}{\delta} \cdot r + h + R_p}$$

Die Beziehungen von r und r_m und zur Winkelgeschwindigkeit w bleiben dieselben.

In den allgemeinen Gleichungen können in s die Formeln für s bei Rotationskegel, Rotationsellipsoid, Kugel, Paraboloid, Hyperboloid eingesetzt werden. Man erhält dann die zugehörigen Gleichungen für den Makrotyp.

5.2 Stabile Bahnen auf Makrokugelschalen mit Höhenwinkel (Reibungsfall)

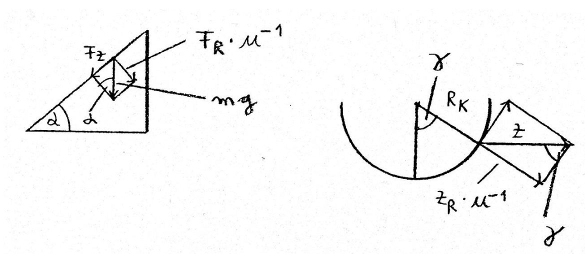
Symbole werden von Kapitel 4.2 (Makrokugel reibungsloser Fall) übernommen.

R_p = Planetenradius
m_p = Masse des Planeten
R_K = Radius der Makrokugel
m = Masse der Kugel
γ = Höhenwinkel
α = Neigungswinkel zur Gravitation
K = Gravitationskraft
G = Gravitationskonstante

Nach Kapitel 4.2 gilt:

$$F_z = mg\delta \sin\alpha \qquad Z_z = \frac{mv^2\delta}{R_K \cdot \tan\gamma}$$

δ kommt aufgrund des Reibungsfalls noch dazu. δ ist im Kapitel 2 und im Kapitel 5.1 erklärt.
F_R = Reibungskraft durch die Schwerkraft
Z_R = Reibungskraft durch die Zentrifugalkraft



Aus Kapitel 4.2 bekommen wir auch:(Zu μ siehe Kap. 2 oder Kap. 5.1)

$$F_R = mg\cos\alpha \cdot \mu \qquad Z_R = Z\sin\gamma \cdot \mu$$

mit

$$Z = \frac{mv^2}{R_K \cdot \sin\gamma}$$

Stabilitätsungleichung:

$$|F_z - Z_z| \leq F_R + Z_R$$

Grenzfälle:

$$Z_z - F_z = F_R + Z_R \tag{5.5}$$

$$F_z - Z_z = F_R + Z_R \tag{5.6}$$

aus (5) folgt:

$$\frac{mv_{max}^2 \cdot \delta}{R_K \tan\gamma} - \delta\sin\alpha \cdot mg = mg\cos\alpha \cdot \mu + \frac{mv_{max}^2 \cdot \mu}{R_K}$$

vereinfacht:

$$\frac{v_{max}^2}{R_K} \cdot \left(\frac{\delta}{\tan\gamma} - \mu\right) = g \cdot (\cos\alpha \cdot \mu + \sin\alpha \cdot \delta)$$

nach v_{max} umgeformt:

$$v_{max} = \sqrt{\frac{gR_K \cdot (\cos\alpha \cdot \mu + \sin\alpha \cdot \delta)}{\frac{\delta}{\tan\gamma} - \mu}} \tag{5.7}$$

analog bekommt man aus (6) folgenden Ausdruck:

$$v_{min} = \sqrt{\frac{gR_K \cdot (\sin\alpha \cdot \delta - \cos\alpha \cdot \mu)}{\mu + \frac{\delta}{\tan\gamma}}} \tag{5.8}$$

Im homogenen Fall wenn $R_K \ll R_p$ ist $\alpha \approx \gamma$. Damit bekommen wir:

$$v_{max} \approx \sqrt{\frac{gR_K \cdot (\cos\gamma \cdot \mu + \sin\gamma \cdot \delta)}{\frac{\delta}{\tan\gamma} - \mu}}$$

mit $\sin\gamma = \cos\gamma \cdot \tan\gamma$

$$v_{max} \approx \sqrt{\frac{gR_K \sin\gamma \cdot (\mu + \tan\gamma \cdot \delta)}{\delta - \mu\tan\gamma}}$$

Genauso kann man im homogenen Fall (8) betrachten unter der Verwendung von $\sin\gamma = \cos\gamma\tan\gamma$, es folgt:

$$v_{min} \approx \sqrt{\frac{gR_K \sin\gamma \cdot (\tan\gamma \cdot \delta - \mu)}{\mu\tan\gamma + \delta}}$$

Es handeln sich um die entsprechenden Formeln, die im Kapitel 2.1 hergeleitet wurden.(homogener Fall) Für $\mu = 0$ folgt aus (7) und (8):

$$v = \sqrt{gR_K \sin\alpha \tan\gamma}$$

Das ist die Formel (3) für den reibungslosen Fall in Kapitel 4.

$v_{max} = \infty$ wenn $\frac{\delta}{\tan\gamma} - \mu = 0$ siehe Gl. (7) also:

$$\tan\gamma_{max} = \frac{\delta}{\mu}$$

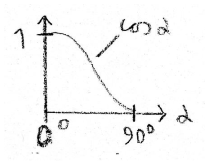
$v_{min} = 0$ wenn $\sin\alpha \cdot \delta - \cos\alpha \cdot \mu = 0$ nach Gl. (8) also folgt mit $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$:

$$\tan\alpha_{min} = \frac{\mu}{\delta}$$

nach Kapitel 4 Gleichung (2) ist:

$$\cos\alpha = \frac{(R_K + R_p) \cdot \cos\gamma - R_K}{\sqrt{(R_K + R_p)^2 + R_K^2 - 2R_K \cdot (R_p + R_K) \cdot \cos\gamma}}$$

$\cos\alpha$ wird kleiner, wenn γ wächst.



Also wird α größer, wenn γ wächst. Daher gibt es auch ein γ_{min}. Zur Abkürzung führen wir bestimmte Symbole ein:

$$\cos\alpha = \frac{A\cos\gamma - R_K}{\sqrt{B - C\cos\gamma}}$$

mit

$$A := R_p + R_K \qquad B := (R_K + R_p)^2 + R_K^2 \qquad C := 2R_K \cdot (R_p + R_K)$$

Wir formen jetzt nach $\cos\gamma$ um:

$$\cos^2\alpha \cdot (B - C\cos\gamma) = (A\cos\gamma - R_K)^2$$

$$\cos^2\alpha \cdot B - R_K^2 = A^2\cos^2\gamma + (C\cos^2\alpha - 2AR_K)\cdot\cos\gamma$$

$$\frac{B\cos^2\alpha - R_K^2}{A^2} = \cos^2\gamma + \frac{\cos^2\alpha \cdot C - 2AR_K}{A^2}\cdot\cos\gamma$$

schließlich folgt:

$$\cos\gamma_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{B\cos^2\alpha - R_K^2}{A^2} + \frac{(C\cos^2\alpha - 2AR_K)^2}{4A^4}} - \frac{C\cos^2\alpha - 2AR_K}{2A^2}$$

Zusatzbedingung: $\cos\gamma \geq 0 \qquad (0 \leq \gamma \leq 90°)$

Mit dieser Formel kann man γ_{min} aus α_{min} bestimmen. Die Gleichungen zwischen r und r_m sowie der Winkelgeschwindigkeit w ändern sich nicht.

Literaturverzeichnis

[1] Bruno Assmann „Technische Mechanik“ Band 1 Oldenbourg Verlag 12.Auflage München 1991

[2] A Budo „Theoretische Mechanik“ 10.Auflage VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften Berlin 1980

[3] Otto Forster „Analysis 1“ 4.Auflage 1984 Vieweg Verlag Braunschweig

[4] Otto Forster „Analysis 2“ 5.Auflage 1984 Vieweg Verlag Braunschweig

[5] Arnold Sommerfeld „Mechanik“ Band 1 Verlag Harri Deutsch 8.Auflage Frankfurt am Main 1977