Projektionen auf Ebenen

Harald Schröer

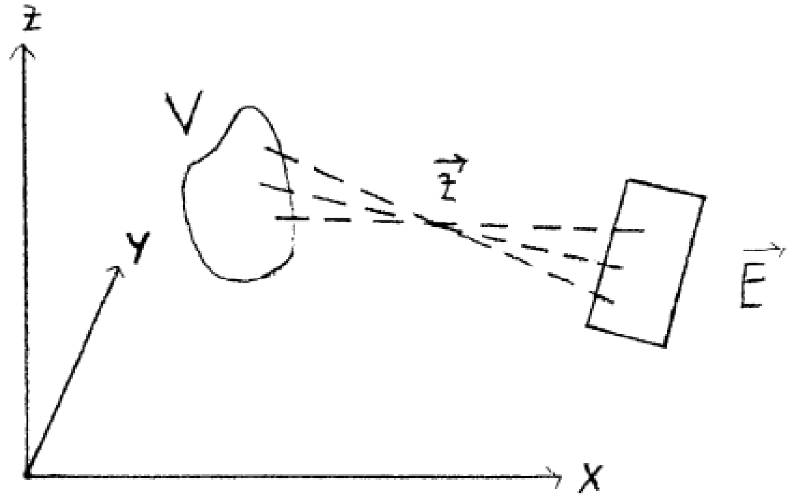
2001

1. Einleitung

Wir haben eine Menge, einen Projektionspunkt und eine Ebene. Das Ziel dieser Arbeit ist es eine mathematische Beschreibung der Projektion auf der Ebene zu bekommen. Für den Leser ist es interessant eine Vorstellung von der Zentralprojektion zu bekommen, und eine mathematische Form für die Projektion im allgemeinen Fall zu betrachten. Weiterhin ist interessant ,daß dieses Problem ähnlich ist zu der Abbildung auf der Netzhaut (Menschen und Tiere). Ich habe diese Herleitung in der Literatur nicht gesehen. Diese Lücke soll mit diesem Artikel geschlossen werden. Wenn wir eine Darstellung des Bildes im R^2 haben, dann kann die Figur mit Hilfe des Koordinatensystem gezeichnet werden. Die Projektion hat eine wichtige Bedeutung in der Mathematik, Physik, Biologie und in der Naturwissenschaft allgemein darüber hinaus in der Architektur und Technik (darstellende Geometrie). Anwendungen von Projektionen in der Biologie finden sich z.B. in den Buch „Arctificial and biological vision systems“ [1]. Anwendungen in der Architektur und in der Technik z.B. bei Salkowski [7], Graf [4], Rehbock [6] und Hohenberg [5].

2. Das Problem

Wir betrachten folgendes Problem:



Eine Menge $V \subset R^3$ wird durch eine Zentralprojektion mit dem Punkt $\vec{z}$ auf eine Ebene $\vec{E}$ abgebildet. Es geht um die Darstellung der Abbildung auf der Ebene $\vec{E}$. $\vec{E}$ stellt eine „Mattscheibe “ hinter $\vec{z}$ dar. Diese Situation kann näherungsweise mit der Abbildung der Augenlinse verglichen werden, wenn der Abstand zwischen V und $\vec{z}$ sehr groß gegenüber dem Abstand von $\vec{z}$ und $\vec{E}$ ist.

3. Die Projektion

Parametrisierung der Ebene:

$$\vec{E} := \vec{p} + \lambda \cdot \vec{v} + \mu \cdot \vec{w} \qquad \lambda, \mu \in R \quad \vec{p}, \vec{v}, \vec{w} \in R^3$$

Voraussetzung: $\vec{v}$ und $\vec{w}$ sind orthogonal.

Es kann eine Abhängigkeit von der Zeit $t \in R$ eingeführt werden.

$$\vec{p} = \vec{p}(t) \quad \vec{v} = \vec{v}(t) \quad \vec{w} = \vec{w}(t) \quad \vec{z} = \vec{z}(t)$$

Parametrisierung von V:

$$V = \vec{a}(b_1, b_2, b_3, c_1, \ldots, c_n, t) = \vec{a}(\vec{b}, \vec{c}, t) \qquad \vec{b} = (b_1, b_2, b_3) \in U \subset R^3$$

$$\vec{c} = (c_1, \ldots, c_n) \in Q \subset R^n$$

b_1, b_2, b_3 sind örtliche Parameter.

$c_1, \ldots, c_n$ sind beliebige Parameter.

Projektionsgerade (siehe Abbildung):

$$\vec{s} := \vec{a} + \varepsilon \cdot (\vec{z} - \vec{a}) \qquad \varepsilon \in R$$

Bild auf der Ebene:

Schnitt zwischen Projektionsgerade und Ebene siehe Abb.:

$$\vec{a} + \varepsilon \cdot (\vec{z} - \vec{a}) = \vec{p} + \lambda \cdot \vec{v} + \mu \cdot \vec{w}$$

Als Lösung folgen:

$$\lambda(\vec{b}, \vec{c}, t), \mu(\vec{b}, \vec{c}, t), \varepsilon(\vec{b}, \vec{c}, t)$$

, weil $\vec{a}$ eine Funktion von $\vec{b}, \vec{c}$ und t ist.

Das Bild hat dann die folgende (Koordinaten)-Gestalt:

$$\vec{R}(\vec{b}, \vec{c}, t) := \vec{a} + \varepsilon(\vec{b}, \vec{c}, t) \cdot (\vec{z} - \vec{a}) \tag{1}$$

$$= \vec{p} + \lambda(\vec{b}, \vec{c}, t) \cdot \vec{v} + \mu(\vec{b}, \vec{c}, t) \cdot \vec{w}$$

Form des Bildes auf der Ebene:

$$\vec{f}(\vec{b}, \vec{c}, t) := \vec{R}(\vec{b}, \vec{c}, t) - \vec{p}$$

Der Punkt $\vec{p}$ wird in den Ursprung des Koordinatensystems der Ebene gelegt.

Es handelt sich hier allerdings um eine Darstellung im R^3. Angestrebt wird eine Darstellung im R^2.

Durch Drehung des Koordinatensystems z.B. nach Bronstein [2] Kapitel 2.6.5.2.3 S.216,217 kann eine Darstellung im R^2 erreicht werden.

Evt. kann eine Verschiebung des geometrischen Mittelpunkts des Bildes in den Ursprung sinnvoll sein.

Schließlich ist evt. eine Drehung im R^2 z.B. nach Bronstein [2] Kapitel 2.6.5.1.3 S.212,213 nötig.

Diese 3 Operationen können (abhängig vom Bild) evt. auch in einer anderen Reihenfolge vorgenommen werden.

Ziel dieser Operationen ist es, eine möglichst einfache Darstellung des Bildes zu erhalten.

4. Zur Voraussetzung, daß $\vec{v}$ und $\vec{w}$ orthogonal sind:

Die Gestalt der Bilder kann am einfachsten erkannt werden, wenn $\vec{v}$ und $\vec{w}$ orthogonal sind. Sind $\vec{v}$ und $\vec{w}$ nicht orthogonal, so ist es günstig die Richtungsvektoren orthogonal zu machen. Dabei darf allerdings die Ebene nicht **selbst** verändert werden.

Dazu bilden wir einen Normalenvektor:

$$\vec{n} := \vec{v} \times \vec{w}$$

und dann anschließend:

$$\vec{q} := \vec{n} \times \vec{v}$$

Damit ist $\vec{q}$ orthogonal zu $\vec{n}$ und $\vec{v}$. Da $\vec{q}$ orthogonal zu $\vec{n}$ ist, liegt $\vec{q}$ in der Ebene.

$\vec{q}$ kann auch aus $\vec{q} \cdot \vec{n} = 0$ und $\vec{q} \cdot \vec{v} = 0$ ausgerechnet werden.(Skalarprodukt)

Damit ist $\vec{q}$ bis auf den Betrag bestimmt. Der Betrag kann gewählt werden.

Die neuen zueinander orthogonalen Richtungsvektoren sind dann $\vec{v}$ und $\vec{q}$.

Wenn $\vec{v}$ und $\vec{w}$ nicht orthogonal sind, sollte dieses Verfahren zuerst gemacht werden.

5. Die Größe des Bildes:

Definition des Abstandsvektors:

$$\vec{r}(\lambda, \mu) := \vec{z} - \vec{E}(\lambda, \mu) = \vec{z} - \vec{p} - \lambda \cdot \vec{v} - \mu \cdot \vec{w}$$

$$r(\lambda, \mu) = |\vec{r}(\lambda, \mu)|$$

Interessant ist nun der minimale Abstand:

$$d := \min\{r(\lambda, \mu) \,|\, (\lambda, \mu) \in R^2\} = r(\lambda_0, \mu_0)$$

Die Ermittlung von λ_0, μ_0 über $\text{grad}[r(\lambda, \mu)] = 0$ ist eher umständlich. Einfacher geht es so:

Man bildet zuerst die Normalenform der Ebene mit $\vec{n} := \vec{v} \times \vec{w}$ z.B. nach Fischer [3] Kapitel 0.5.5 S.25. Man rechnet die Parameterform der Ebene in die Normalenform der Ebene um.

Dann kann man z.B. mit Fischer [3] Kapitel 0.4.6 S.21 den minimalen Abstand d berechnen.

Hat die Ebene E die Normalenform

$$n_1 x + n_2 y + n_3 z = e \qquad e \in R \quad \vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$$

, so folgt für den Abstand d mit $\vec{z} = (z_1, z_2, z_3)$:

$$d = \frac{|n_1 z_1 + n_2 z_2 + n_3 z_3 - e|}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}}$$

Sind $\vec{p}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{z}$ Funktionen von t, so sind auch r und d Funktionen von t.

Es gilt:

Bildgröße $\sim d(t)$ (Strahlensatz), wenn $\vec{p}, \vec{v}, \vec{w}, V$ konstant bleiben, $\vec{z}$ dagegen eine Funktion von t ist.

Literatur

[1] „Arctificial and biological vision systems“ Springer Verlag Berlin 1992

[2] Bronstein, Semendjajew „Taschenbuch der Mathematik“ 22.Auflage 1985 Leipzig

[3] Gerd Fischer „Lineare Algebra“ 8.Auflage Vieweg Verlag Braunschweig 1984

[4] Ulrich Graf „Darstellende Geometrie“ 8.Auflage Heidelberg 1964

[5] F. Hohenberg „Konstruktive Geometrie für Techniker“ Wien 1956

[6] F.Rehbock „Darstellende Geometrie“ 3.Auflage Heidelberg 1969

[7] E. Salkowski „Grundzüge der darstellende Geometrie“ 9.Auflage Leipzig 1963