

Geodätische Linien auf verschiedenen
Oberflächen und die maximale Entfernung auf
einer Kugeloberfläche

Harald Schröer

2002

1 Geodätische Linien

Wir behandeln hier ein Problem aus der Differentialgeometrie. Man bezeichnet eine Linie, die zwei verschiedene Punkte auf einer Oberfläche mit minimaler Umfangslänge verbindet, als geodätische Linie oder Geodäte. Es wird nun angedeutet, wie man auf einer gegebenen Oberfläche im R^3 zu geodätischen Linien kommen kann.

Die allgemeine Gleichung für geodätische Linien wird in Laugwitz [6] Kapitel II Aufgabe 4.13 S.41 angegeben:

$$\ddot{u}^i + \sum_{j,k=1}^2 \Gamma_{jk}^i \dot{u}^j \dot{u}^k = \lambda \cdot \dot{u}^i \quad \text{mit} \quad \lambda = -\frac{d^2 t}{ds^2} \cdot \left(\frac{ds}{dt} \right)^2$$

Die Christoffel-Symbole zweiter Art Γ_{jk}^i werden erklärt durch die Gleichung (4.9) in a.a.O.:

$$\Gamma_{ik}^r = \sum_{l=1}^2 \frac{g^{lr}}{2} \left(\frac{\partial g_{il}}{\partial u^k} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial u^l} + \frac{\partial g_{lk}}{\partial u^i} \right)$$

Die Größe g^{il} wird gebildet mit Gleichung (4.6) in a.a.O.:

$$\sum_{l=1}^2 g^{il} g_{lk} = \delta_k^i \quad g^{il} = g^{li} \quad \delta_k^i = \begin{cases} 1 & : i = k \\ 0 & : i \neq k \end{cases}$$

Die metrische Fundamentalgröße g_{ik} wird definiert in a.a.O. Gleichung (3.16) durch:

$$g_{ik} = x_i x_k$$

Mit $x_i = \frac{\partial x}{\partial u^i}$ nach Gleichung (3.2) in a.a.O., x ist das Flächenstück nach a.a.O. Gleichung (3.1). In dieser Form können in Prinzip die geodätischen Linien auf einer gegebenen Oberfläche berechnet werden. Ein interessantes Teilresultat ist das Clairautsche Theorem auf einer Rotationsfläche vgl. Arnol'd [1] Kapitel 4.3.4.3 S.94 und Abbildung 66 oder Strubecker [8] Gleichung (38.6). Bei Köhnllein [5] werden Dreiecke aus Geodäten auf Rotationsflächen behandelt.

Zu geodätischen Linien auf Rotationsparaboloiden wird in Strubecker [8] Kapitel III 38. Beispiel 5 S.227 -232 eingegangen.

Zu Geodäten auf Rotationsellipsoiden findet man in Strubecker [8] Kapitel III 38. Beispiel 6 S.232,233 ein elliptisches Integral, das numerisch bestimmt werden muß evt. mit Hilfe von Hofreiter [4] Nr.244 1)-3) S.81,82.

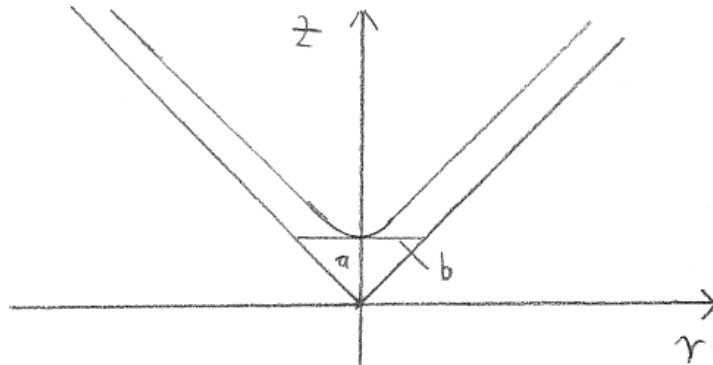
Das Problem der Bestimmung von Geodäten auf Rotationsellipsoiden spielt eine große Rolle in der Geodäsie, weil die Erde selbst als Rotationsellipsoid beschrieben werden kann. In der Geodäsie gibt es die „zweite geodätische Grundaufgabe“: Bestimmung der Entfernung von zwei Punkten, die bekannte geographische Länge und geographische Breite haben. In Schödlbauer [7] werden verschiedene Verfahren zur Entfernungsberechnung für kurze, mittlere und lange Distanzen dargestellt. Dort werden auch ellipsoide Dreiecke ausgerechnet. Das wird auch in Heck [3] Kapitel 6.6 S.212-214 gemacht für Dreiecke deren Seiten kleiner als $\frac{1}{10}$ des Erdradius ist. Ähnliche Formeln findet man teilweise auch bei Großmann [2]

§38.2 S.87.

Beim Rotationshyperboloiden haben wir die Gleichung:

$$\frac{z^2}{a^2} - \frac{r^2}{b^2} = 1$$

vgl. Abbildung:



Eine Umformung ergibt:

$$z^2 = a^2 \cdot \left(1 + \frac{r^2}{b^2}\right)$$

Das führt zu:

$$z(r) = \frac{a}{b} \cdot \sqrt{b^2 + r^2}$$

Weiter erhalten wir:

$$\frac{\partial z(r)}{\partial r} = \frac{a}{b} \cdot \frac{r}{\sqrt{b^2 + r^2}}$$

Setzen wir das in die Gleichung (38.8) bei Strubecker [8] S. 223 ein, so bekommen wir die Polargleichung der Geodäten auf einen Rotationshyperboloiden:

$$(\varphi - \varphi_0) = k \cdot \int \frac{1}{r} \cdot \sqrt{\frac{1 + \frac{a^2 r^2}{b^2(b^2 + r^2)}}{r^2 - k^2}} dr$$

2 Die maximale Entfernung auf einer Kugeloberfläche

Wir wollen hier sehen, wie man den Ort mit der maximalen Entfernung zu bekannten Städten wie z.B. Boston, New York, Washington, Paris, London, Berlin, Hamburg, Kopenhagen, Stockholm, Helsinki berechnen kann.

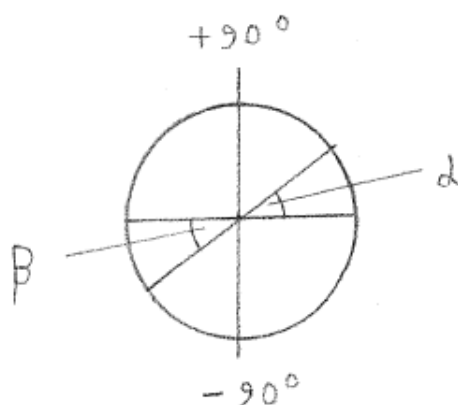
Die folgenden Größen sind gegeben:

R = Radius der (Erd-) Kugel

α = Breitengrad des Ausgangsortes $\alpha \in [-90^\circ, 90^\circ]$

φ = Längengrad des Ausgangsortes $\varphi \in [-180^\circ, 180^\circ]$

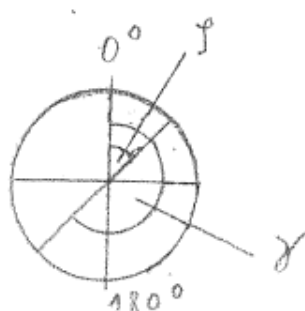
Längengrad und Breitengrad werden in Grad angegeben. Der Längengrad wird westlich vom Nulllängenkreis positiv und östlich davon negativ gezählt. In Atlanten werden häufig beim östlichen Bereich die negativen Vorzeichen weggelassen.



Gesucht sind jetzt Breiten- und Längengrad mit maximaler Entfernung zum Ausgangsort.

β, γ = Breitengrad, Längengrad des Ortes, der zum Ausgangsort die maximale Entfernung hat.

Für β erhalten wir $\beta = -\alpha$ nach der ersten Zeichnung.



γ bekommen wir auf folgende Weise aus der zweiten Zeichnung:

$$\gamma^\circ = \begin{cases} \varphi^\circ - 180^\circ & \text{falls } \varphi^\circ \geq 0 \\ 180^\circ + \varphi^\circ & \text{falls } \varphi^\circ \leq 0 \end{cases}$$

Maximale Entfernung = $\pi \cdot R$

(γ, β) bestimmen den Ort mit der maximalen Entfernung von (φ, α) .

Literatur

- [1] Vladimir Arnol'd „Mathematische Methoden der klassischen Mechanik“ Birkhäuser Verlag Basel 1988
- [2] Walter Großmann „Geodätische Rechnungen und Abbildungen“ Verlag Konrad Wittwer Stuttgart 1964
- [3] Bernhard Heck „Rechenverfahren und Auswertemodelle der Landesvermessung: klassische und moderne Methoden“ Karlsruhe Wichmann Verlag 1987
- [4] Wolfgang Gröbner und Nikolaus Hofreiter „Integraltafel Erster Teil“ 5.Auflage 1975 Springer Verlag Wien
- [5] Walter Köhnlein „Untersuchungen über große geodätische Dreiecke auf geschlossenen Rotationsflächen unter besonderer Berücksichtigung des Rotationsellipsoiden“ Dissertation, Bayerische Akademie der Wissenschaften 1962 München
- [6] Detlef Laugwitz „Differentialgeometrie“ 3.Auflage 1977 Teubner Verlag Stuttgart
- [7] Albert Schödlbauer „Rechenformeln und Rechenbeispiele zur Landesvermessung“ Wichmann-Skripten Heft 2 Teil 1 Herbert Wichmann Verlag Karlsruhe 1981
- [8] Karl Strubecker „Differentialgeometrie“ Band 2 de Gruyter Verlag Berlin