Der „Radius“ des Ellipsoiden und die Oberfläche des Rotationsellipsoiden

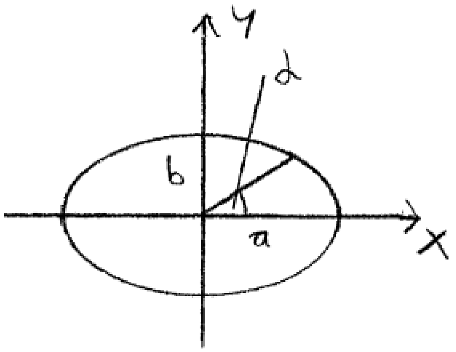
Harald Schröer

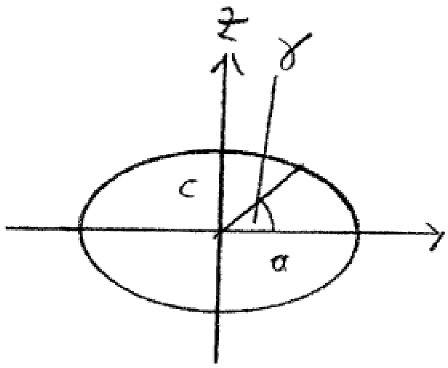
2001

Kapitel 1

Der „Radius“ des Ellipsoiden

Wir schauen uns die folgenden Abbildungen an:





r = „Radius“ des Ellipsoiden

a, b, c = Halbachsen des Ellipsoiden

Bei r handelt es sich um keinen wirklichen Radius. r wird nur so bezeichnet, weil der Ellipsoid im Fall gleicher Halbachsen in eine Kugel übergeht und r dann der Kugelradius ist. Es ist aber interessant auch beim Ellipsoiden diese Größe r zu betrachten. r wird anders als bei der Kugel nicht konstant sein, sondern von den Koordinaten x, y, z abhängen. Die erste Gleichung folgt mit dem Satz des Pythagoras:

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 \tag{1.1}$$

Die zweite Gleichung erhalten wir z.B. mit Bronstein [1] Kapitel 2.6.6.2 S. 233:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \tag{1.2}$$

Für die Winkel bekommen wir nach den Abbildungen die Beziehungen:

$$\tan\alpha = \frac{y}{x} \qquad \tan\gamma = \frac{z}{x}$$

Wir formen Gleichung (2) nach z^2 um und setzen bei z^2 in Gleichung (1) ein:

$$r^2 = x^2 + y^2 + c^2 \cdot \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)$$

Damit haben wir eine Gleichung für r die nur von zwei Koordinaten und von den Halbachsen abhängig ist. Auflösung von Gleichung (2) nach y^2 und Einsetzen in Gleichung (1) liefert:

$$r^2 = x^2 + b^2 \cdot \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2}\right) + z^2$$

Umformung von Gleichung (2) nach x^2 und Einsetzen in Gleichung (1) führt zu:

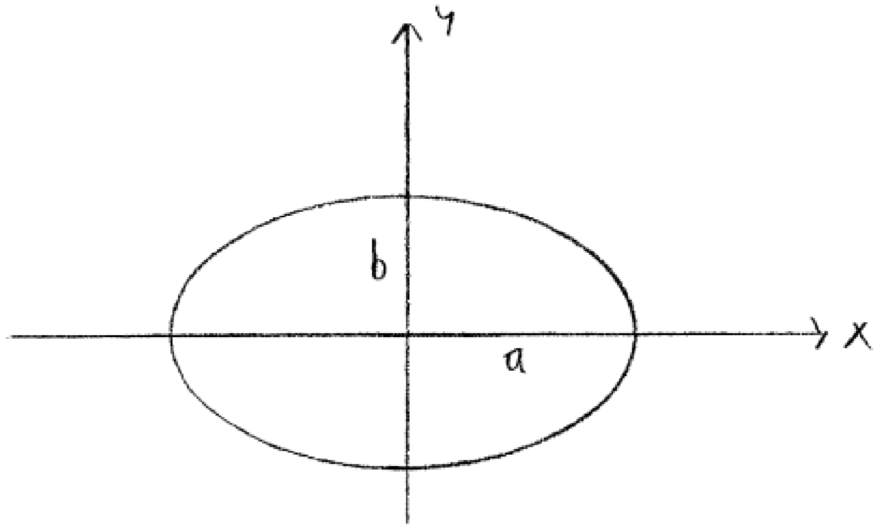
$$r^2 = a^2 \cdot \left(1 - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}\right) + y^2 + z^2$$

Wesentlich schwieriger ist eine Darstellung von r mit 2 Winkeln und den 3 Halbachsen. Mutige Leser können sich mit diesem Problem auseinandersetzen.

Kapitel 2

Die Oberfläche des Rotationsellipsoiden

Wir schauen uns eine Ellipse an:



Wir benötigen die Mittelpunktsgleichung:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \Rightarrow \qquad y^2 = b^2 \cdot \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$$

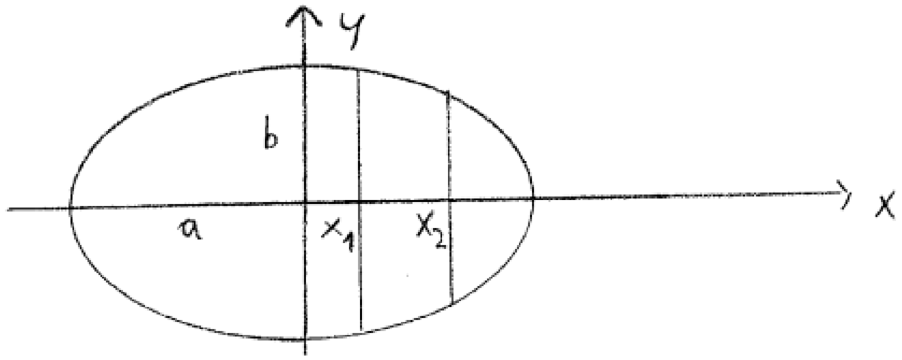
Nach y aufgelöst:

$$y = \pm\frac{b}{a} \cdot \sqrt{a^2 - x^2}$$

Wir bilden die Ableitung:

$$y' := \frac{dy}{dx} = \pm\frac{b}{a} \cdot \frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

Wir betrachten nun den Rotationsellipsoiden in der folgenden Abbildung:



Für den Mantel des Rotationskörpers gilt:

$$M(x_1, x_2) = 2\pi \cdot \int_{x_1}^{x_2} y \cdot \sqrt{1 + y'^2} \, dx$$

Es ist dabei $-a \leq x_1 \leq x_2 \leq a$. Nun setzen wir für den Rotationsellipsoiden ein:

$$M(x_1, x_2) = 2\pi \cdot \frac{b}{a} \cdot \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{a^2 - x^2} \cdot \sqrt{1 + \frac{b^2 x^2}{a^2 \cdot (a^2 - x^2)}} \, dx$$

$$= 2\pi \cdot \frac{b}{a} \cdot \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{a^2 - x^2 + \frac{b^2}{a^2} \cdot x^2} \, dx$$

Dann erreichen wir:

$$M(x_1, x_2) = 2\pi \cdot \frac{b}{a} \cdot \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{a^2 - \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right) \cdot x^2} \, dx \tag{2.1}$$

Wir formen diesen Term noch weiter um zu: $\quad a > b > 0$

$$M(x_1, x_2) = 2\pi \cdot \frac{b}{a} \cdot \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \cdot \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{\frac{a^2}{1 - \frac{b^2}{a^2}} - x^2} \, dx \tag{2.2}$$

Die Integration kann z.B. nach Gröbner [2] Kapitel 236 S.52 Nr. 5f oder Bronstein [1] Kapitel 1.1.3.3 S.44 Nr. 157 geleistet werden.

$$\int \sqrt{R^2 - x^2} \, dx = \frac{x}{2} \cdot \sqrt{R^2 - x^2} + \frac{R^2}{2} \cdot \arcsin \frac{x}{|R|} + c$$

c ist die Integrationskonstante. Dieses Integral kann durch Differenzieren bestätigt werden. Es gilt $a > b > 0$. Wir setzen ein für den Rotationsellipsoiden:

$$M(x_1, x_2) = 2\pi \cdot \frac{b}{a} \cdot \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \cdot \left[\frac{x}{2} \cdot \sqrt{\frac{a^2}{1 - \frac{b^2}{a^2}} - x^2} \right.$$

$$+\frac{\frac{1}{2}\cdot a^2}{1-\frac{b^2}{a^2}}\cdot\arcsin\left(\frac{x}{a}\cdot\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}\right)\Bigg]_{x_1}^{x_2}$$

Nun setzen wir $x_2 = h$ und $x_1 = 0$:

$$M(0,h) = 2\pi\cdot\frac{b}{a}\cdot\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}\cdot\left(\frac{h}{2}\cdot\sqrt{\frac{a^2}{1-\frac{b^2}{a^2}}-h^2}\right.$$

$$\left.+\frac{a^2}{2\cdot\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right)}\cdot\arcsin\left(\frac{h}{a}\cdot\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}\right)\right)$$

Nun vereinfachen wir weiter für $h = a$, dann kommt die halbe Oberfläche heraus:

$$M(0,a) = 2\pi\cdot\frac{b}{a}\cdot\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}\cdot\left(\frac{a}{2}\cdot\sqrt{\frac{a^2}{1-\frac{b^2}{a^2}}-a^2}\right.$$

$$\left.+\frac{a^2}{2\cdot\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right)}\cdot\arcsin\left(\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}\right)\right)$$

Wir führen eine Zwischenrechnung durch:

$$\sqrt{\frac{a^2}{1-\frac{b^2}{a^2}}-a^2} = \sqrt{\frac{a^4}{a^2-b^2}-a^2} = \sqrt{\frac{a^4-a^4+b^2a^2}{a^2-b^2}} = \frac{ba}{\sqrt{a^2-b^2}}$$

Mit dieser Zwischenrechnung bekommen wir:

$$M(0,a) = 2\pi\cdot\frac{b}{a^2}\cdot\sqrt{a^2-b^2}\cdot\left(\frac{ba^2}{\sqrt{a^2-b^2}}\cdot\frac{1}{2}+\frac{a^4}{2\cdot(a^2-b^2)}\cdot\arcsin\left(\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}\right)\right)$$

Schließlich erhalten wir:

$$M(0,a) = 2\pi\cdot\left(\frac{b^2}{2}+\frac{ba^2}{2\cdot\sqrt{a^2-b^2}}\cdot\arcsin\left(\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}\right)\right)$$

Diese Formel ist gültig für $a > b > 0$. Die gesamte Oberfläche O bekommen wir mit:

$$O = 2\cdot M(0,a) = M(-a,a)$$

$$= 4\pi\cdot\left(\frac{b^2}{2}+\frac{ba^2}{2\cdot\sqrt{a^2-b^2}}\cdot\arcsin\left(\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}\right)\right)$$

Nun untersuchen wir den Spezialfall $r = a = b$ (Kugel). Dieser Fall kann mit der vorletzten Formel nicht ausgerechnet werden. Wir müssen von Gleichung (1) ausgehen. Wir setzen dort ein:

$$M(0,r) = 2\pi\cdot\int_0^r r\,dx = 2\pi[rx]_0^r = 2\pi r^2$$

$M(0,r)$ ist die Oberfläche der Halbkugel.

Literaturverzeichnis

[1] I.N. Bronstein, K.A. Semendjajew „Taschenbuch der Mathematik“ Teubner Verlagsgesellschaft Leipzig 1985 22.Auflage

[2] Wolfgang Gröbner und Nikolaus Hofreiter „Integraltafel Erster Teil“ 5.Auflage 1975 Springer Verlag Wien