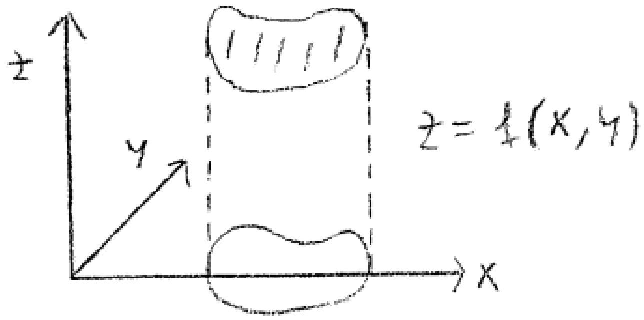
Oberflächenberechnung

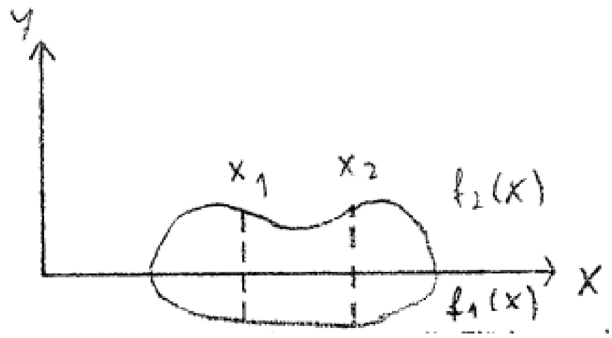
Harald Schröer

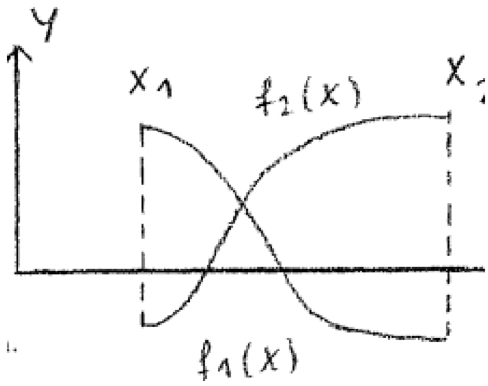
2001

Wir betrachten Oberflächen wie in den Abbildungen. Es stellt sich die Frage wie kann der Flächeninhalt berechnet werden? Welche Größen gehen bei der Berechnung mit ein? Gibt es Größen von denen dieser Flächeninhalt unabhängig ist? Kann man den Flächeninhalt einfach berechnen oder ist es eine komplizierte Aufgabe?



zwei Möglichkeiten werden hier gezeigt:





$f_1(x), f_2(x)$ begrenzen die Fläche zu y hin.

Für die Oberflächenberechnung benötigen wir eine Formel aus der Integralrechnung. Nach Forster [1] §14 (14.7) S.142,143 gilt folgendes:

$f : T \rightarrow R$ ist stetig differenzierbar $T \subset R^{n-1}$
$M := \{(x_1, \ldots, x_n) \in T \times R \quad : \quad x_n = f(x_1, \ldots, x_{n-1})\}$
Daraus folgt, wenn das Integral existiert:

$$\mathrm{Vol}_{n-1}(M) = \int_T \sqrt{1 + ||\nabla f(t)||^2}\, d^{n-1}t$$

$|| \cdot || =$ euklidische Norm

Spezialfall $n = 3$:
Wir nehmen jetzt $x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z = f(x, y)$.

$f : T \rightarrow\ R$ ist stetig differenzierbar.

$$T \subset R^2 \qquad (x, y) \in T \qquad t = (x, y)$$

$$M = \{(x, y, z) \in T \times R \quad : \quad z = f(x, y)\}$$

Daraus erhalten wir:

$$O = \mathrm{Vol}_2(M) = \int\limits_T \sqrt{1 + ||\nabla f(t)||^2}\, d^2t$$

$$\text{mit} \qquad \nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Die gesuchte Oberfläche ist ein Spezialfall dieser Formel für:

$$T = \{(x, y) \in R^2 \,| \quad x_1 \leq x \leq x_2 \quad f_1(x) \leq y \leq f_2(x)\}$$

Für dieses T kann das zweidimensionale Integral folgendermaßen geschrieben werden:

$$O = \int\limits_{x_1}^{x_2} \int\limits_{f_1(x)}^{f_2(x)} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\right)^2}\, dy\, dx$$

Das ist die gesuchte Formel für die Oberfläche.

Sie gilt, wenn die Integrale existieren und, wenn $f(x, y)$ stetig differenzierbar ist. Das heißt $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ und $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ sind stetig nach (x, y).

Literatur

[1] Otto Forster „Analysis 3“ 2.Auflage 1983
Vieweg Verlag Braunschweig