

Einbeschriebene Dreiecke, Trapeze und Rechtecke

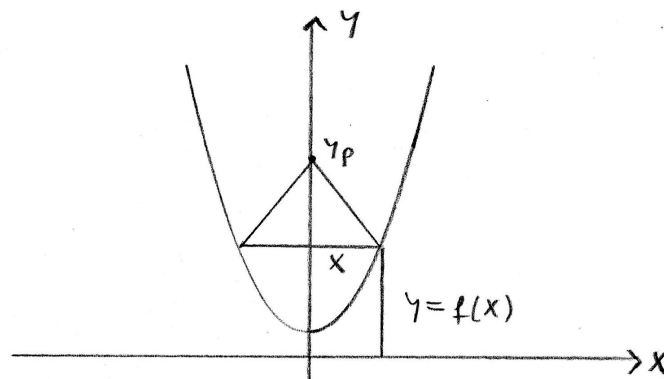
Harald Schröder

2012

Wir behandeln hier verschiedene Extremalprobleme mit Nebenbedingungen. Die Nebenbedingungen werden hier häufig durch allgemeine Funktionen gebildet. Ob ein oder mehrere lokale Maxima oder Minima vorliegen, hängt im allgemeinen von der Funktion ab, die die Nebenbedingung beschreibt. Das gilt auch für die Feststellung, ob überhaupt lokale Extrema vorhanden sind. Setzt man von der Zielfunktion die erste Ableitung gleich Null, so bekommt man eine notwendige aber nicht hinreichende Bedingung für die Existenz von lokalen Extrema. Hier geht es vor allen darum, die Form dieser notwendigen Bedingungen kennenzulernen, und zum anderen die Zielfunktion in Abhängigkeit von den Funktionen ganz allgemein zu ermitteln. Es erfolgt hier dann auch keine Diskussion, ob ein lokales Extremum, Maximum, Minimum vorhanden ist. Dazu müssen die Nebenbedingungsfunktionen erst ausgewählt werden. Anschließend kann dann mit der zweiten Ableitung oder evt. auch höheren Ableitungen darüber entschieden werden.

Einbeschriebenes gleichschenkliges Dreieck

Es soll der maximale Flächeninhalt des folgenden gleichschenkligen Dreiecks berechnet werden. (siehe Abb.)



$y = f(x)$ sei eine achsensymmetrische Funktion d.h. $f(x) = f(-x)$. Die Ableitung $y' = f'(x)$ soll existieren.

Für den Flächeninhalt F des Dreiecks gilt:

$$F = x \cdot (y_p - y) = xy_p - xy$$

Für ein lokales Extremum muß die notwendige Bedingung sein:

$$0 = F' = y_p - y - xy'$$

Die Extremaalbedingung lautet damit:

$$y + xy' = y_p$$

Diese Bedingung gilt für jede symmetrische konvexe Funktion.

Wir geben ein Beispiel mit $p > 0$ und m als gerade Zahl:

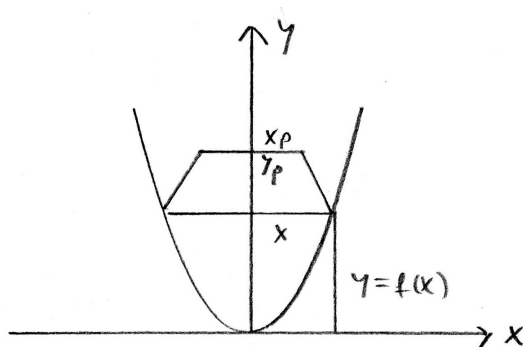
$$\begin{aligned} y &= px^m & y' &= pmx^{m-1} \\ px^m + pmx^m &= y_p & p \cdot (m+1)x^m &= y_p \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$x = \sqrt[m]{\frac{y_p}{p \cdot (m+1)}}$$

Einbeschriebenes Trapez

Wir schauen uns das Trapez in der folgenden Abbildung an: (x_p, y_p sind fest.)



$y = f(x)$ soll differenzierbar, symmetrisch und konvex sein. Gesucht ist auch hier der maximale Flächeninhalt. Für den Flächeninhalt F gilt:

$$F = \frac{(a+c) \cdot h}{2}$$

wobei a, c die beiden parallelen Seiten und h die Höhe des Trapezes ist. Mit $c = 2x_p$, $a = 2x$ und $h = y_p - y$ folgt:

$$F = (y_p - y) \cdot (x_p + x)$$

$$F' = y_p - y - y' \cdot (x_p + x)$$

Notwendige Bedingung für lokale Extrema:

$$F' = 0 \quad \Rightarrow \quad y' \cdot (x_p + x) = y_p - y$$

Spezialfall gleichschenkliges Dreieck: $x_p = 0$

$$\Rightarrow xy' + y = y_p$$

Wir betrachten nun das Rechteck mit $x_p = x$. Damit bekommen wir als Fläche:

$$F = 2x \cdot (y_p - y) \quad F' = 2 \cdot (y_p - y) - 2xy'$$

Als notwendige Bedingung für das Rechteck erhalten wir mit $F' = 0$:

$$xy' = y_p - y$$

Nun wollen wir den extremalen Umfang des Trapezs berechnen. Der Umfang ist $U = a + c + 2 \cdot \sqrt{(y_p - y)^2 + (x - x_p)^2}$. Wenn a und c eingesetzt werden folgt:

$$U = 2 \cdot (x + x_p) + 2 \cdot \sqrt{(y_p - y)^2 + (x - x_p)^2}$$

Kettenregel:

$$U' = 2 + \frac{(-2) \cdot (y_p - y) \cdot y' + 2 \cdot (x - x_p)}{\sqrt{(y_p - y)^2 + (x - x_p)^2}}$$

Mit der notwendigen Bedingung $U' = 0$ wird daraus:

$$(y_p - y)^2 + (x - x_p)^2 = ((y_p - y) \cdot y' - x + x_p)^2$$

Spezialfall gleichschenkliges Dreieck mit $x_p = 0$:

$$(y_p - y)^2 + x^2 = ((y_p - y)y' - x)^2$$

Das Rechteck mit $x_p = x$ muß gesondert ausgerechnet werden.

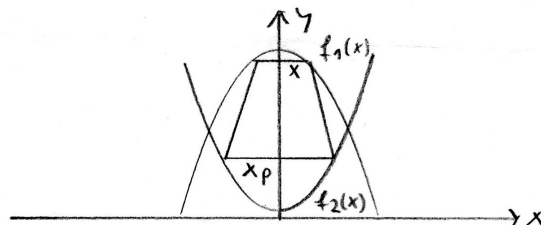
Umfang des Rechtecks:

$$U = 4x + 2 \cdot (y_p - y) \quad U' = 4 - 2y'$$

$$U' = 0 \quad \Rightarrow \quad y' = f'(x) = 2$$

Das Trapez in zwei Funktionen eingeschrieben

Wir betrachten das Trapez in der Abbildung:



x ist die Veränderliche, x_p ist fest. Die Funktionen f_1, f_2 sollen achsensymmetrisch und konkav bzw. konvex sein. Nach der elementaren Flächenformel erhält man für die Fläche:

$$F = (x + x_p) \cdot (f_1(x) - f_2(x_p))$$

nach Produktregel:

$$F' = (x + x_p) \cdot f_1'(x) + f_1(x) - f_2(x_p)$$

$F' = 0$ ist notwendige Bedingung für lokale Extrema, also folgt:

$$f_2(x_p) - f_1(x) = (x + x_p) \cdot f_1'(x)$$

Nun geht es um den extremalen Umfang:

$$U = 2 \cdot (x_p + x) + 2 \cdot \sqrt{(x - x_p)^2 + (f_1(x) - f_2(x_p))^2}$$

U nach Kettenregel differenziert:

$$U' = 2 + 2 \cdot \frac{x - x_p + (f_1(x) - f_2(x_p)) \cdot f_1'(x)}{\sqrt{(x - x_p)^2 + (f_1(x) - f_2(x_p))^2}}$$

Die notwendige Bedingung für lokale Extrema $U' = 0$ führt zu:

$$(x - x_p + f_1'(x) \cdot (f_1(x) - f_2(x_p)))^2 = (x - x_p)^2 + (f_1(x) - f_2(x_p))^2$$

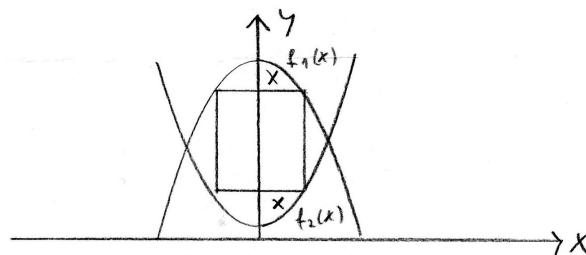
Für den Spezialfall $x_p = 0$ ergibt sich ein gleichschenkliges Dreieck. Die Bedingung für extremale Fläche lautet:

$$f_2(0) - f_1(x) = x \cdot f_1'(x)$$

Bedingung für extremalen Umfang:

$$(x + f_1'(x) \cdot (f_1(x) - f_2(0)))^2 = x^2 + (f_1(x) - f_2(0))^2$$

Die Formeln für das Rechteck müssen extra hergeleitet werden. Wir betrachten die Abbildung:



Die Fläche des Rechtecks ist:

$$F = (y_1 - y_2) \cdot 2x$$

Ableitung:

$$F' = 2 \cdot ((y_1' - y_2') \cdot x + y_1 - y_2)$$

Aus der notwendigen Bedingung $F' = 0$ folgt:

$$x \cdot (y'_1 - y'_2) = y_2 - y_1$$

Für $y_2 = k$ (konstant) ergibt sich:

$$xy'_1 = k - y_1$$

Nun bestimmen wir den Umfang des Rechtecks:

$$U = 4x + 2 \cdot (y_1 - y_2) \quad U' = 4 + 2 \cdot (y'_1 - y'_2)$$

Die notwendige Bedingung ist $U' = 0$, daraus folgt:

$$y'_2 - y'_1 = 2 \quad y_1 \geq y_2$$

Weitere Extremalprobleme findet man bei Schröder [1].

Literatur

- [1] Harald Schröder „Extremalprinzipien“, Wissenschaft und Technik Verlag, Berlin, 2000