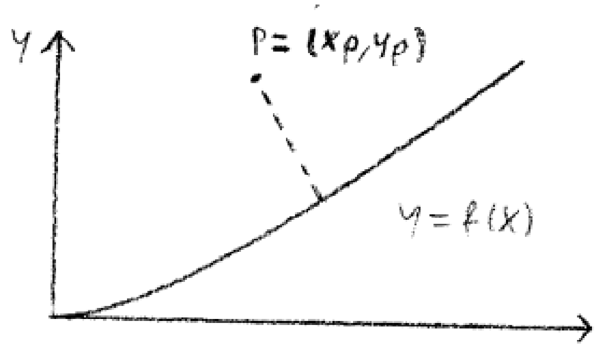
Der Minimalabstand

Harald Schröer

2001

1 Der Minimalabstand reeller Funktionen in der Ebene:

Eine Funktion $f(x)$ hat zu den Punkt $P = (x_p, y_p)$ einen Minimalabstand. Dieser soll berechnet werden.(siehe auch Abb.)



Es gilt für den Abstand D:

$$D^2 = (y - y_p)^2 + (x - x_p)^2$$

Wir differenzieren dann D^2:

$$(D^2)' = 2 \cdot (y - y_p) \cdot y' + 2 \cdot (x - x_p)$$

Notwendige Bedingung für lokale Extrema:

$$y' \cdot (y - y_p) + x - x_p = 0 \tag{1}$$

Differenziert man D, dann folgt mit Hilfe der Kettenregel dasselbe Resultat.

Beispiele:

$y = p \cdot x^m$

$$pmx^{m-1} \cdot (px^m - y_p) + x - x_p = 0$$

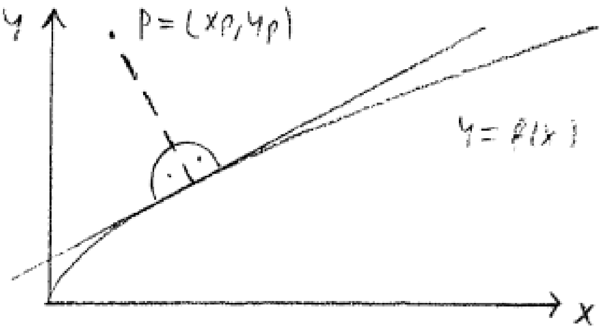
$y = \sin x$

$$\cos x \cdot (\sin x - y_p) + x - x_p = 0$$

$y = r \cdot a^x$

$$ra^x \ln a \cdot (ra^x - y_p) + x - x_p = 0$$

Nun stellt sich die Frage, ob der Minimalabstand senkrecht zur Tangente der Funktion steht?



m ist die Steigung der Senkrechten zur Tangente. Dann muß $y' \cdot m = -1$ gezeigt werden. Es gilt:

$$m = \frac{y - y_p}{x - x_p}$$

Nach (1) erhalten wir:

$$y' = -\frac{x - x_p}{y - y_p}$$

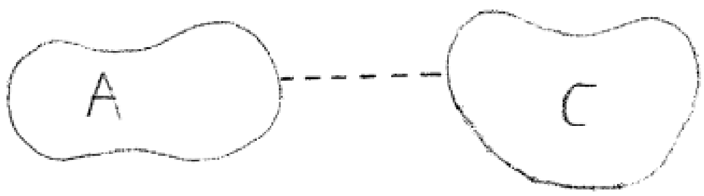
Prüfung:

$$y' \cdot m = -\frac{x - x_p}{y - y_p} \cdot \frac{y - y_p}{x - x_p} = -1$$

Die Vermutung stimmt.

2 Minimalabstand von zweidimensionalen Gebilden:

Wir schauen uns folgende Abbildung an:



Die beiden Flächen sollen durch $A = \vec{a}(p_1, p_2, t)$ und $C = \vec{c}(q_1, q_2, t)$ dargestellt werden.

p_1, p_2, q_1, q_2 sind Flächenparameter. t ist die Zeit oder ein zusätzlicher Parameter.

Für den Abstand r erhalten wir:

$$r(p_1, p_2, q_1, q_2, t) = \sqrt{(\vec{a} - \vec{c})^2}$$

Wir führen folgende Notationen ein:

$$D_1 := \frac{d}{dp_1} \qquad D_2 := \frac{d}{dp_2} \qquad D_3 := \frac{d}{dq_1} \qquad D_4 := \frac{d}{dq_2}$$

Es gilt die Produktregel für Skalarprodukte:

$$D(\vec{a} \cdot \vec{c}) = D\vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{a} \cdot D\vec{c}$$

Daraus folgt:

$$D(\vec{a}^2) = 2 \cdot \vec{a} \cdot D\vec{a}$$

Wir haben:

$$r^2 = (\vec{a} - \vec{c})^2$$

r und damit r^2 muß abgeleitet werden:

$$D_1 r^2 = 2 \cdot (\vec{a} - \vec{c}) \cdot D_1\vec{a}$$

$$D_2 r^2 = 2 \cdot (\vec{a} - \vec{c}) \cdot D_2\vec{a}$$

$$D_3 r^2 = 2 \cdot (\vec{a} - \vec{c}) \cdot -D_3\vec{c}$$

$$D_4 r^2 = 2 \cdot (\vec{a} - \vec{c}) \cdot -D_4\vec{c}$$

Notwendige Bedingung für lokale Extrema:

$$D_i r^2 = 0 \qquad \text{für} \qquad i \in 1, 2, 3, 4$$

Daraus folgt:

$$(\vec{a} - \vec{c}) \cdot D_1\vec{a} = 0$$

$$(\vec{a} - \vec{c}) \cdot D_2\vec{a} = 0$$

$$(\vec{a} - \vec{c}) \cdot D_3\vec{c} = 0$$

$$(\vec{a} - \vec{c}) \cdot D_4\vec{c} = 0$$

$D_1\vec{a}, D_2\vec{a}, D_3\vec{c}, D_4\vec{c}$ sind Tangentenvektoren vgl. Forster [1] §15 Satz 1 S.148.

Wir kommen dann zu folgender Aussage:

Der Minimalabstand steht auf beiden Mengen senkrecht.

Das Resultat gilt auch für Mengen mit beliebig endlich vielen Parametern, das man genauso herleiten kann.

Bei $A \cap C = \emptyset$ muß es einen Minimalabstand geben. Wenn sich aus den vier

Gleichungen keine Lösung ergibt, dann ist der minimale Abstand ein Randminimum.

Spezialfälle:

A ist eine Kurve, wenn entweder p_1 oder p_2 wegfällt.

C ist eine Kurve, wenn entweder q_1 oder q_2 wegfällt.

A ist ein Punkt, wenn p_1 und p_2 wegfallen.

C ist ein Punkt, wenn q_1 und q_2 wegfallen.

Fällt t weg, dann sind die Mengen (zeitlich) invariant.

Besondere Parameterwahl:

für Kurven: i kann 1 oder 2 sein.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} p_i \\ f_1(p_i) \\ g_1(p_i) \end{pmatrix} \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} q_i \\ f_2(q_i) \\ g_2(q_i) \end{pmatrix}$$

für Flächen:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ f_1(p_1, p_2) \end{pmatrix} \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ f_2(q_1, q_2) \end{pmatrix}$$

Literatur

[1] Otto Forster „Analysis 3“ 2.Auflage 1983 Vieweg Verlag Braunschweig