

Seifenblasen

Harald Schröer

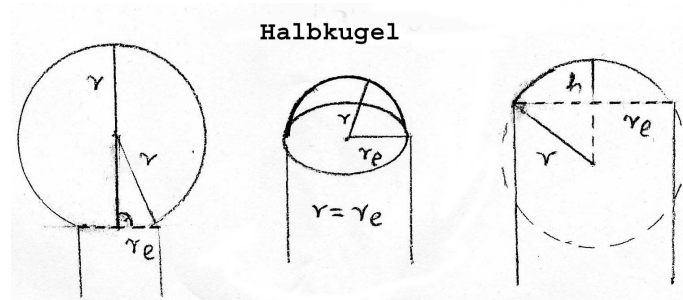
2010

Abstract: Zunächst wird eine Seifenblase mit Öffnung betrachtet. Anschließend wird ein System zweier Seifenblasen beschrieben. Schließlich wird ein verbundenes System von n Seifenblasen behandelt.

Key words: Seifenblase - Druck - Flüssigkeit - Gas - Medium - Kugel

1 Die einfache Seifenblase

Wir betrachten eine Seifenblase, die mit einem Hahn verbunden ist.



Dabei sind σ die Oberflächenspannung und r der Radius der Seifenblase. r_e soll der Radius der kreisförmigen Öffnung des Hahns sein. Wir wollen zunächst den Druck p von einer Seifenblase bestimmen. Die Seifenblase wird dabei näherungsweise die Form einer Kugelkappe haben. F ist dabei die auf die Seifenblase wirkende Kraft.

Die Oberfläche einer Kugelkappe kann beschrieben werden durch:

$$A = m \cdot \pi r^2 \quad 0 < m \leq 4$$

Es gilt, wenn $\Delta r \ll r$:

$$F = p \cdot A$$

Für die aufgewendete Arbeit haben wir:

$$\Delta W = F \cdot \Delta r$$

Es folgt:

$$\Delta W = F \cdot \Delta r = p \cdot A \cdot \Delta r = p \cdot m\pi r^2 \cdot \Delta r$$

Dieselbe Arbeit muß bei der Vergrößerung der Oberfläche aufgewendet werden:

$$\begin{aligned} \Delta W &= \sigma \cdot \Delta A = \sigma m\pi \cdot [(r + \Delta r)^2 - r^2] \\ &= \sigma m\pi(2r\Delta r + \Delta r^2) \end{aligned}$$

Läßt man Δr gegen Null gehen, so wird:

$$\Delta W = 2m\sigma\pi r\Delta r$$

Durch Gleichsetzung erhält man:

$$pm\pi r^2 \cdot \Delta r = 2m\sigma\pi r \cdot \Delta r$$

Daraus folgt für den Druck in einer Blase:

$$p = \frac{2\sigma}{r}$$

Eine Seifenblase besteht jedoch aus zwei Grenzschichten. Daher ist der resultierende Gesamtdruck:

$$p = \frac{2\sigma}{r} + \frac{2\sigma}{r + \Delta r}$$

Bei $\Delta r \ll r$ wird daraus:

$$p \approx \frac{4\sigma}{r}$$

Diese Druckformel wird im weiteren verwendet. Zu dieser Herleitung vgl. auch Höfling [1] Kapitel 2.12.5, S.286.

Wir wollen uns nun kurz das Verhalten einer zusammenziehenden Seifenblase anschauen, bei geöffneten Hahn. Für die Oberfläche einer Kugelkappe gilt:

$$O = 2\pi r h = 2\pi r \cdot (r \pm \sqrt{r^2 - r_e^2}) \quad (1)$$

Für das positive Vorzeichen bei der Wurzel ist ersichtlich, dass mit abnehmenden r auch die Oberfläche kleiner wird. Es wird nun gezeigt, dass beim negativem Wurzel-Vorzeichen mit zunehmenden Radius r die Oberfläche kleiner wird, vgl. die Abbildungen am Anfang. Für die Ableitung der Oberfläche berechnen wir nach Produkt- und Kettenregel:

$$\begin{aligned} O'(r) &= 2\pi \left(r - \sqrt{r^2 - r_e^2} + r \cdot \left(1 - \frac{r}{\sqrt{r^2 - r_e^2}} \right) \right) \\ &= 2\pi \cdot \left(2r - \frac{2r^2 - r_e^2}{\sqrt{r^2 - r_e^2}} \right) \end{aligned}$$

Es gilt für $r_e > 0$:

$$0 < r_e^4$$

Daraus folgt:

$$4r^4 - 4r^2 r_e^2 < 4r^4 - 4r^2 r_e^2 + r_e^4$$

Durch Ausklammern:

$$4r^2 \cdot (r^2 - r_e^2) < 4r^4 - 4r^2 r_e^2 + r_e^4$$

Nun wird die Wurzel gezogen:

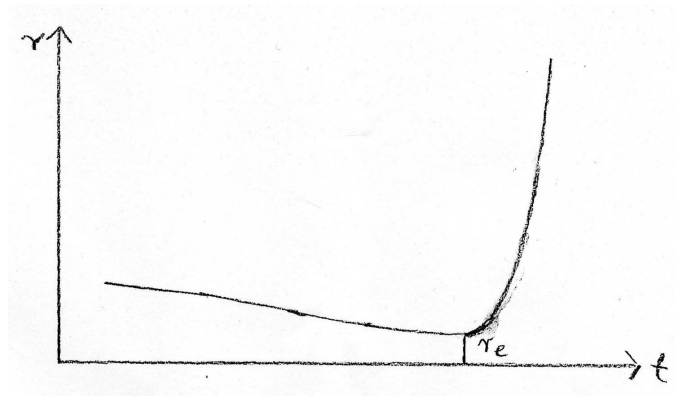
$$2r \cdot \sqrt{r^2 - r_e^2} < 2r^2 - r_e^2$$

Das führt zu:

$$2r < \frac{2r^2 - r_e^2}{\sqrt{r^2 - r_e^2}}$$

Damit ist bewiesen, dass $O'(r) < 0$ ist, somit folgt aus dem Monotoniesatz, dass die Oberfläche mit zunehmenden r und negativem Wurzel-Vorzeichen abnimmt.

Betrachtet man das zeitliche Zusammenziehen einer Seifenblase, so ergibt sich nach Jackson [2] folgende Skizze:



Bei Jackson [2] wird die Zeit $t(r)$ berechnet, dazu wird eine Differentialgleichung mit getrennten Variablen gelöst. Dabei wird auch ein Kugelteilmodell verwendet. Insgesamt folgt daraus, dass $O(r(t))$ mit t monoton fällt.

Was passiert mit der Oberfläche, wenn r gegen Unendlich geht?

Wir haben dann:

$$O(r) = 2\pi r(r - \sqrt{r^2 - r_e^2})$$

Aus der Definition der Ableitung folgt für $h \ll a$:

$$\sqrt{a} - \sqrt{a-h} \approx \frac{h}{2\sqrt{a}}$$

Also für $r_e \ll r$:

$$r - \sqrt{r^2 - r_e^2} \approx \frac{r_e^2}{2\sqrt{r^2}} = \frac{r_e^2}{2r}$$

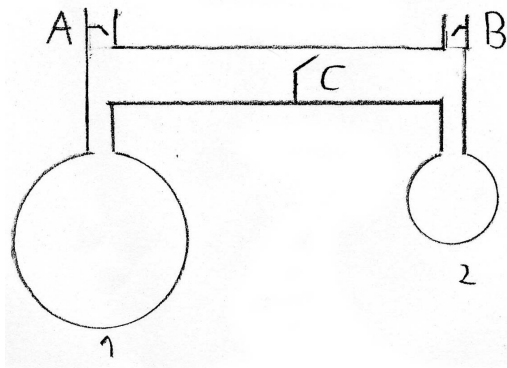
Also bekommen wir dann:

$$O(r) \approx 2\pi r \cdot \frac{r_e^2}{2r} = \pi \cdot r_e^2$$

Daher die Oberfläche reduziert sich auf die Kreisfläche der Öffnung.

2 Ein System von 2 Seifenblasen

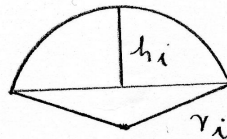
Wir betrachten nun 2 Seifenblasen wie in der Abbildung mit den Hähnen A, B und C .



Zunächst ist der Hahn C geschlossen. Die beiden Seifenblasen werden erzeugt. Die Hähne A und B sind geöffnet. Dann werden A und B geschlossen und der Hahn C geöffnet, vgl. auch Höfling [1] ebd.

Gegeben sind:

$\sigma_i, p_i, r_i, r_{ei}, h_i$ = Oberflächenspannung, Druck, Radius, Radius der Öffnung und Höhe der i . Seifenblase, i ist entweder 1 oder 2.



Voraussetzung:

$$\frac{\sigma_1}{r_1} < \frac{\sigma_2}{r_2} \quad r_i > r_{ei}$$

Dann zieht sich Seifenblase 2 zusammen, und Seifenblase 1 dehnt sich aus. Für die Kraft auf eine Seifenblase ergibt sich:

$$F(h) = O(h) \cdot p(r(h)) = 2\pi r h \cdot \frac{4\sigma}{r} = 8\pi\sigma h$$

Nun wenden wir den Energiesatz bezüglich der potentiellen Energie an. Da uns nur der Endzustand interessiert, ist die kinetische Energie gleich Null. Die von der Schwerkraft erzeugte potentielle Energie ($m \cdot g \cdot \Delta h$) kann vernachlässigt werden, aufgrund der geringen Masse von Gas und Flüssigkeit. Wir erhalten

daher:

$$W_R + 8\pi\sigma_1 \cdot \int_{h_1}^{h_3} h \, dh = 8\pi\sigma_2 \cdot \int_0^{h_2} h \, dh$$

W_R ist die Reibungsarbeit, während h_3 die neue Höhe der Seifenblase 1 darstellt.

Nach der Integration:

$$W_R + 4\pi\sigma_1 \cdot (h_3^2 - h_1^2) = 4\pi\sigma_2 h_2^2$$

Nach h_3 wird gesucht, wir lösen auf:

$$h_3^2 - h_1^2 = \frac{4\pi\sigma_2 h_2^2 - W_R}{4\pi\sigma_1}$$

Schließlich:

$$h_3 = \sqrt{\frac{\sigma_2 h_2^2}{\sigma_1} - \frac{W_R}{4\pi\sigma_1} + h_1^2}$$

Den Radius erhält man aus Gleichung (1):

$$h_i = r_i \pm \sqrt{r_i^2 - r_{ei}^2}$$

Quadriert:

$$(h_i - r_i)^2 = r_i^2 - r_{ei}^2$$

Es folgt:

$$-2h_i r_i + h_i^2 = -r_{ei}^2$$

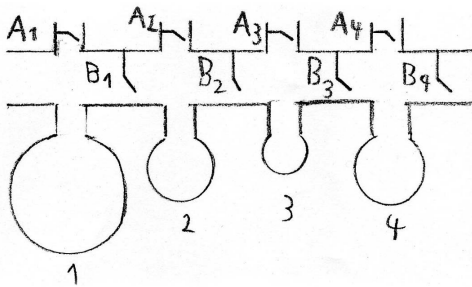
Schließlich bekommen wir:

$$r_i = \frac{h_i^2 + r_{ei}^2}{2h_i} = \frac{h_i}{2} + \frac{r_{ei}^2}{2h_i}$$

In diesem Modell wird eine vorhandene Viskosität in die Reibungsarbeit W_R einbezogen. Ein Spezialfall ist $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$.

3 Ein System mit n Seifenblasen

Die Notationen werden sinngemäß übernommen mit $i \in 1, \dots, n+1$. Nun betrachten wir ein System wie in der Abbildung:



Die Hähne B_1 bis B_n sind zunächst geschlossen. Die Hähne A_1 bis A_n sind geöffnet. Die n Seifenblasen werden erzeugt. Anschließend werden A_1 bis A_n geschlossen und die Hähne B_1 bis B_n geöffnet.

Voraussetzung:

$$\frac{\sigma_1}{r_1} < \frac{\sigma_i}{r_i} \quad \text{für} \quad i \in 2, \dots, n$$

Dann dehnt sich Seifenblase 1 aus. Die anderen Seifenblasen ziehen sich zusammen. Wir verallgemeinern die Betrachtung von vorher. Gesucht ist die neue Höhe h_{n+1} der Seifenblase 1. Wir wenden nun den Energiesatz wie vorher an:

$$W_R + 8\pi\sigma_1 \cdot \int_{h_1}^{h_{n+1}} h \, dh = 8\pi \cdot \sum_{i=2}^n \sigma_i \cdot \int_0^{h_i} h \, dh$$

Integration:

$$W_R + 4\pi\sigma_1 \cdot (h_{n+1}^2 - h_1^2) = 4\pi \cdot \sum_{i=2}^n \sigma_i h_i^2$$

Auflösung:

$$h_{n+1}^2 - h_1^2 = \frac{4\pi \cdot \sum_{i=2}^n \sigma_i h_i^2 - W_R}{4\pi\sigma_1}$$

Schließlich bekommt man:

$$h_{n+1} = \sqrt{\frac{1}{\sigma_1} \cdot \sum_{i=2}^n \sigma_i h_i^2 - \frac{W_R}{4\pi\sigma_1} + h_1^2}$$

Den Radius erhält man wie vorher aus:

$$r_i = \frac{h_i^2 + r_{ei}^2}{2h_i} = \frac{h_i}{2} + \frac{r_{ei}^2}{2h_i} \quad \text{für} \quad i \in 1, \dots, n+1$$

Ein Spezialfall stellt $\sigma_1 = \sigma_2 = \dots = \sigma_n = \sigma$ dar. Zu beachten ist, dass n begrenzt ist, aufgrund der Lebensdauer von Seifenblasen.

Nun soll noch weiterführende Literatur zu Seifenblasen genannt werden. Mit Seifenblasen bei tiefen Temperaturen hat sich Grosse [3] befaßt. Die möglichen mathematischen Formen einer Seifenblase wurden von Ferus [4] behandelt. Oszillationen von Seifenblasen sind z.B. bei Kornek [5] dargestellt.

Literatur

- [1] Höfling „Physik“, Band 2, Teil 1 Dümmler Verlag, Bonn 1981
- [2] Jackson DP, Sleyman S „Analysis of a deflating soap bubble“ American Journal of Physics, College Park, Md., 2010, Volume 78, Issue 10, p.990-994
- [3] Grosse Av „Effect of temperature on life of soap bubbles and their solidification at low temperature“ Science, Washington, DC, Volume 153, Issue 3738, p.895-898, 1966
- [4] Dirk Ferus „Von den Seifenblasen“ p.303-312 aus „Alles Mathematik von Pythagoras zum CD-Player“ Martin Aigner(Hrsg.), 3.Auflage, Wiesbaden, Vieweg+Teubner, 2008
- [5] U Kornek, F Müller, K Harth und weitere „Oscillations of soap bubbles“ New Journal of Physics, 12 (2010) 073031, 25pp.