Rotierende Scheibe, Bahnen in Hohlkugeln und der schwingende Körper im Gravitationsfeld - ein Versuch

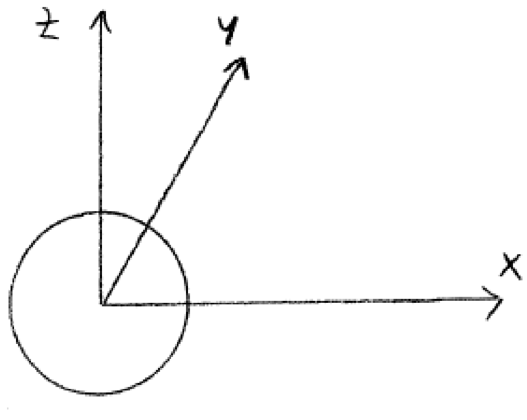
Harald Schröer

2002

Wir führen folgende Größen ein:

$\vec{w}_p$ = Winkelgeschwindigkeit des Planeten
U_t = Rotationszeit des Planeten
R = Radius des Planeten
m_1 = Masse des Planeten
α = Breitengrad
G = Gravitationskonstante
h_a = Höhe über der Oberfläche des Planeten

$\vec{w}_p$ soll zeitlich konstant sein. Auch wird zunächst angenommen, daß $|\vec{w}_p|$ sehr klein ist. Sonst muß die Corioliskraft des Planeten berücksichtigt werden. Das wird nachher gemacht. $|\cdot|$ ist der Betrag eines Vektors. Wir betrachten ein Koordinatensystem für diesen Planeten:



Die Schwerebeschleunigung ist gegeben durch:

$$\vec{g}(\vec{X}) = -\frac{Gm_1}{|\vec{X}|^2} \cdot \frac{\vec{X}}{|\vec{X}|} \qquad \vec{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Die Zentrifugalbeschleunigung kann dargestellt werden als:

$$\vec{b}_z(\vec{X}) = \sqrt{x^2+y^2} \cdot \vec{w}_p^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{w}_p^2 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dabei ist $\vec{w}_p = (0, 0, |\vec{w}_p|)$ mit $w_p = \frac{2\pi}{U_t}$.

Wir erklären nun die Kugelkoordinaten r, α_1, α von $\vec{X}$:

$r = |\vec{X}| = R + h_a$
$\alpha_1 =$ Längengrad
$\alpha =$ Breitengrad $\qquad -90° \leq \alpha \leq 90°$

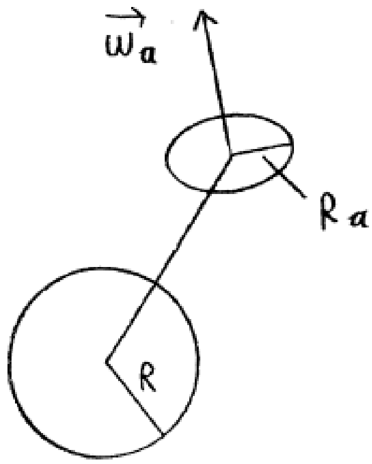
$90° - \alpha$ ist der polare Winkel. Die Position wird bestimmt durch R, h_a, α_1 und α. Das führt zu folgenden Kugelkoordinaten:

$$\vec{X} = r \cdot \begin{pmatrix} \sin(90° - \alpha)\cos\alpha_1 \\ \sin(90° - \alpha)\sin\alpha_1 \\ \cos(90° - \alpha) \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\alpha_1 \\ \cos\alpha\sin\alpha_1 \\ \sin\alpha \end{pmatrix} \tag{1}$$

vgl. Forster [3], §3, (3.6), S.33 und Bronstein [1], Kapitel 4.2.2.2, S.564

1 Rotierende Scheibe (Karussell)

R_a = Radius der Scheibe
$\vec{w}_a$ = Winkelgeschwindigkeit der Scheibe



$\vec{w}_a$ soll konstant sein. Wir kommen nun zu den gegebenen räumlichen Polarkoordinaten $|\vec{w}_a|$,α_2,α_3 von $\vec{w}_a$:

α_2 = Längenwinkel
α_3 = Breitenwinkel $\qquad -90° \leq \alpha_3 \leq 90°$

Dann erhalten wir mit Gleichung (1):

$$\vec{w}_a := |\vec{w}_a| \cdot \begin{pmatrix} \cos\alpha_3 \cos\alpha_2 \\ \cos\alpha_3 \sin\alpha_2 \\ \sin\alpha_3 \end{pmatrix} \tag{2}$$

Nun betrachten wir die Größen:

r_a = Abstand von der Scheibenachse $\vec{w}_a$, dieser kann maximal gleich R_a sein.
α_3 = Breitenwinkel (Neigungswinkel) der Scheibe und von $\vec{w}_a$
α_2 = Längenwinkel von $\vec{w}_a$
α_4 = Längenwinkel auf der Scheibe

α_3 soll aus Gründen der Einfachheit nur im Bereich $[0, 90°]$ betrachtet werden. Es gilt nun, wie im Anhang gezeigt, für $0 \leq \alpha_4 \leq 360°$:

$$\sin\alpha_5 = \sin\alpha_3 \cdot \sin\alpha_4$$

$$\tan\alpha_6 = \cos\alpha_3 \cdot \tan\alpha_4$$

Dabei sind α_5 der Breitengrad und α_6 der Längengrad von $\vec{r}_a$. Nun haben wir nach Gleichung (1):

$$\vec{r}_a(\alpha_3, \alpha_4, r_a) = r_a \cdot \begin{pmatrix} \sin(90° - \alpha_5)\cos\alpha_6 \\ \sin(90° - \alpha_5)\sin\alpha_6 \\ \cos(90° - \alpha_5) \end{pmatrix} = r_a \cdot \begin{pmatrix} \cos\alpha_5 \cos\alpha_6 \\ \cos\alpha_5 \sin\alpha_6 \\ \sin\alpha_5 \end{pmatrix}$$

Dabei ist $-90° \leq \alpha_5 \leq 90°$.

$\vec{r}_a$ und $\vec{w}_a$ können mit einer Methode in Schröer [4], Kapitel 7 ins Oberflächenkoordinatensystem umgewandelt werden.

Nun berechnen wir die Zentrifugalbeschleunigung $\vec{z}_1$ auf der Scheibe im Abstand r_a:

$$\vec{z}_1 = |\vec{r}_a| \cdot \vec{w}_a^2 \cdot \frac{\vec{r}_a}{|\vec{r}_a|} = \vec{r}_a \cdot \vec{w}_a^2$$

Die Gesamtbeschleunigung $\vec{b}_{ges}$ an der Stelle $\vec{X} + \vec{r}_a$ kann dann ausgedrückt werden durch:

$$\vec{b}_{ges}(\vec{X} + \vec{r}_a) = \vec{z}_1 + \vec{g}(\vec{X} + \vec{r}_a) + \vec{b}_z(\vec{X} + \vec{r}_a)$$

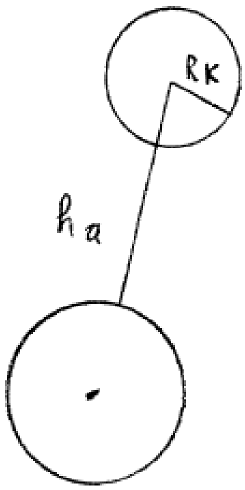
$\beta = \angle(\vec{b}_{ges}, \vec{g})$ ist der Abweichungswinkel. Dazu verwenden wir das Skalarprodukt:

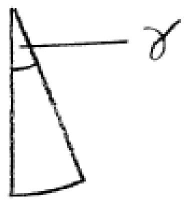
$$\cos\beta = \frac{\vec{b}_{ges}(\vec{X} + \vec{r}_a) \cdot \vec{g}(\vec{X} + \vec{r}_a)}{|\vec{b}_{ges}(\vec{X} + \vec{r}_a)| \cdot |\vec{g}(\vec{X} + \vec{r}_a)|}$$

2 Bahnen in einer Hohlkugel

Wir führen folgende Bezeichnungen ein:

R_k = Hohlkugelradius
γ = Steigungswinkel der Bahn der kleinen Kugel in der Hohlkugel
$\vec{w}_a$ = Winkelgeschwindigkeit der Hohlkugel, diese ist konstant.
Voraussetzung: Der Radius der kleinen Kugel ist sehr klein gegenüber R_k.





Es können nach Gleichung (1) räumliche Polarkoordinaten gebildet werden:

$$\vec{w}_a = |\vec{w}_a| \cdot \begin{pmatrix} \sin(90^\circ - \alpha_3)\cos\alpha_2 \\ \sin(90^\circ - \alpha_3)\sin\alpha_2 \\ \cos(90^\circ - \alpha_3) \end{pmatrix} = |\vec{w}_a| \cdot \begin{pmatrix} \cos\alpha_3 \cos\alpha_2 \\ \cos\alpha_3 \sin\alpha_2 \\ \sin\alpha_3 \end{pmatrix} \tag{3}$$

mit:
α_3 = Breitenwinkel von $\vec{w}_a$ $\qquad -90^\circ \leq \alpha_3 \leq 90^\circ$
α_2 = Längenwinkel von $\vec{w}_a$

Die Winkelgeschwindigkeit $\vec{w}_b$ der kleinen Kugel in der großen Hohlkugel kann auch in räumliche Polarkoordinaten zerlegt werden, mit der Gleichung (1):

$$\vec{w}_b = |\vec{w}_b| \cdot \begin{pmatrix} \sin(90^\circ - \gamma)\cos\alpha_4 \\ \sin(90^\circ - \gamma)\sin\alpha_4 \\ \cos(90^\circ - \gamma) \end{pmatrix} = |\vec{w}_b| \cdot \begin{pmatrix} \cos\gamma \cos\alpha_4 \\ \cos\gamma \sin\alpha_4 \\ \sin\gamma \end{pmatrix}$$

mit:
γ = Steigungswinkel der Kugelbahn (von $\vec{w}_b$) $\qquad -90^\circ \leq \gamma \leq 90^\circ$
α_4 = Längenwinkel von $\vec{w}_b$ (der Kugelbahn)
γ und α_4 gelten bezüglich des Koordinatansystems des Planetenmittelpunkts.

Nun beschäftigen wir uns mit Beschleunigungen:

$\vec{z}_1$ = Zentrifugalbeschleunigung, die von der rotierenden großen Hohlkugel ($\vec{w}_a$) erzeugt wird.
$\vec{z}_c$ = Coriolisbeschleunigung der großen Hohlkugel ($\vec{w}_a$)
$\vec{z}_2$ = Zentrifugalbeschleunigung, die durch die kleine Kugel ($\vec{w}_b$) erzeugt wird.

Weitere Beschleunigungen treten nicht auf, da $\vec{w}_a$ konstant ist.

Räumliche Polarkoordinaten von $\vec{r}_a$ nach Gleichung (1):

$$\vec{r}_a = R_k \cdot \begin{pmatrix} \sin(90^\circ - \alpha_5)\cos\alpha_6 \\ \sin(90^\circ - \alpha_5)\sin\alpha_6 \\ \cos(90^\circ - \alpha_5) \end{pmatrix} = R_k \cdot \begin{pmatrix} \cos\alpha_5\cos\alpha_6 \\ \cos\alpha_5\sin\alpha_6 \\ \sin\alpha_5 \end{pmatrix}$$

mit:

$R_k = |\vec{r}_a|$
α_5 = Höhenwinkel von $\vec{r}_a$ $\quad -90^\circ \leq \alpha_5 \leq 90^\circ$
α_6 = Längenwinkel von $\vec{r}_a$

$\vec{r}_a$ ist die Bewegung der kleinen Kugel in der großen Hohlkugel. $\vec{w}_a$,$\vec{w}_b$ und $\vec{r}_a$ können mit der Methode in Schröer [4], Kapitel 7 ins Oberflächenkoordinatensystem transformiert werden.

Nach Budo [2], §14, Gleichung (16), S.74 gilt:

$$\vec{z}_1 = -\vec{w}_a \times (\vec{w}_a \times \vec{r}_a) \qquad \vec{z}_2 = -\vec{w}_b \times (\vec{w}_b \times \vec{r}_a)$$

$$\vec{z}_c = -2 \cdot (\vec{w}_a \times \vec{v})$$

$\vec{v}$ = Geschwindigkeit der kleinen Kugel in der großen Hohlkugel

$$\vec{v} = \vec{w}_b \times \vec{r}_a \qquad \text{nach Budo [2], §14, Gleichung (8), S.72}$$

Die Gesamtbeschleunigung $\vec{b}_{ges}$ ergibt sich nach Budo [2], §14, Gleichung (16), S.74:

$$\vec{b}_{ges}(\vec{X} + \vec{r}_a) = \vec{g}(\vec{X} + \vec{r}_a) + \vec{b}_z(\vec{X} + \vec{r}_a) + \vec{z}_1 + \vec{z}_c + \vec{z}_2$$

Den Abweichungswinkel $\beta = \angle(\vec{g}(\vec{X} + \vec{r}_a), \vec{b}_{ges}(\vec{X} + \vec{r}_a))$ erhalten wir mit dem Skalarprodukt:

$$\cos\beta = \frac{\vec{g}(\vec{X} + \vec{r}_a) \cdot \vec{b}_{ges}(\vec{X} + \vec{r}_a)}{|\vec{g}(\vec{X} + \vec{r}_a)| \cdot |\vec{b}_{ges}(\vec{X} + \vec{r}_a)|}$$

Der Spezialfall $\vec{w}_a = 0$ ergibt den schiefen Makrolooping.

Eine wichtige Rolle spielt der Winkel $\beta_2 = \angle(\vec{r}_a, \vec{b}_{ges})$. Mit dem Skalarprodukt bekommen wir:

$$\cos\beta_2 = \frac{\vec{r}_a \cdot \vec{b}_{ges}(\vec{X} + \vec{r}_a)}{|\vec{r}_a| \cdot |\vec{b}_{ges}(\vec{X} + \vec{r}_a)|}$$

1) $0 \leq \beta_2 \leq 90°$, die kleine Kugel bleibt an der Schale der großen Hohlkugel.

2) $90° \leq \beta_2 \leq 180°$, die kleine Kugel fällt innerhalb der großen Hohlkugel.

Daraus können mit

$$1) \qquad \Leftrightarrow \qquad 0 = \cos 90° \leq \frac{\vec{r}_a \cdot \vec{b}_{ges}}{|\vec{r}_a| \cdot |\vec{b}_{ges}|} \leq \cos 0° = 1$$

$$2) \qquad \Leftrightarrow \qquad 0 = \cos 90° \geq \frac{\vec{r}_a \cdot \vec{b}_{ges}}{|\vec{r}_a| \cdot |\vec{b}_{ges}|} \geq \cos 180° = -1$$

konkrete Bedingungen für das Bleiben oder Fallen abgeleitet werden.

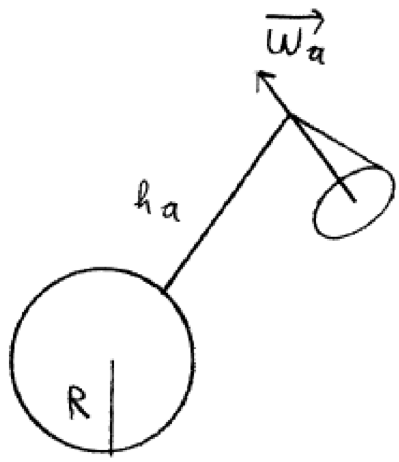
3 Der schwingende Körper

Wir zerlegen die Winkelgeschwindigkeit $\vec{w}_a$ der Kreisbewegung des Körpers (ohne Gravitation) in Kugelkoordinaten. Diese Winkelgeschwindigkeit soll konstant sein. Nach Gleichung (1):

$$\vec{w}_a = |\vec{w}_a| \cdot \begin{pmatrix} \sin(90^\circ - \alpha_3)\cos\alpha_2 \\ \sin(90^\circ - \alpha_3)\sin\alpha_2 \\ \cos(90^\circ - \alpha_3) \end{pmatrix} = |\vec{w}_a| \cdot \begin{pmatrix} \cos\alpha_3 \cos\alpha_2 \\ \cos\alpha_3 \sin\alpha_2 \\ \sin\alpha_3 \end{pmatrix}$$

mit den Größen:

α_3 = Breitenwinkel von $\vec{w}_a$ $\qquad -90^\circ \leq \alpha_3 \leq 90^\circ$
α_2 = Längenwinkel von $\vec{w}_a$
l = Länge des Seils, an dem der Körper befestigt ist. l ist gegeben. $\qquad l = |\vec{l}_a|$
$\vec{l}_a$ = Bewegung des schwingenden Körpers



Wir führen Kugelkoordinaten ein, nach Gleichung (1):

$$\vec{l}_a = l \cdot \begin{pmatrix} \sin(90^\circ - \alpha_5)\cos\alpha_6 \\ \sin(90^\circ - \alpha_5)\sin\alpha_6 \\ \cos(90^\circ - \alpha_5) \end{pmatrix} = l \cdot \begin{pmatrix} \cos\alpha_5 \cos\alpha_6 \\ \cos\alpha_5 \sin\alpha_6 \\ \sin\alpha_5 \end{pmatrix} \qquad (4)$$

mit folgenden Größen:

α_6 = Längenwinkel von $\vec{l}_a$
α_5 = Breitenwinkel von $\vec{l}_a$
α_5 und α_6 sind bezogen auf das Koordinatensystem vom Mittelpunkt des Planeten. $\vec{w}_a$ und $\vec{l}_a$ können auch ins Oberflächenkoordinatensystem umgerechnet werden mit der Methode in Schröer [4], Kapitel 7.

Wir wenden uns nun der Zentrifugalbeschleunigung $\vec{z}_1$ des schwingenden

Körpers zu:

$$\vec{z}_1 = -\vec{w}_a \times (\vec{w}_a \times \vec{l}_a) \qquad \text{nach Budo [2], §14, Gleichung (16), S.74}$$

Mit derselbem Gleichung in Budo [2] bilden wir die Gesamtbeschleunigung:

$$\vec{b}_{ges}(\vec{X} + \vec{l}_a) = \vec{g}(\vec{X} + \vec{l}_a) + \vec{b}_z(\vec{X} + \vec{l}_a) + \vec{z}_1 \tag{5}$$

Den Abweichungswinkel $\beta = \angle(\vec{b}_{ges}, \vec{g})$ berechnen wir mit dem Skalarprodukt:

$$\cos\beta = \frac{\vec{b}_{ges}(\vec{X} + \vec{l}_a) \cdot \vec{g}(\vec{X} + \vec{l}_a)}{|\vec{b}_{ges}(\vec{X} + \vec{l}_a)| \cdot |\vec{g}(\vec{X} + \vec{l}_a)|}$$

$\vec{b}_{ges}$ muß mit der Richtung von $\vec{l}_a$ übereinstimmen:

$$\frac{\vec{b}_{ges}(\vec{X} + \vec{l}_a)}{|\vec{b}_{ges}(\vec{X} + \vec{l}_a)|} = \frac{\vec{l}_a}{|\vec{l}_a|} \tag{6}$$

Durch die Gleichungen (5) und (6) wird die Bewegung $\vec{l}_a$ des schwingenden Körpers beschrieben. l ist bekannt. α_6 und α_5 müssen aus (5) und (6) bestimmt werden.
Der Winkel $\gamma = \angle(\vec{l}_a, \vec{w}_a)$ des schwingenden Körpers:

$$\cos\gamma = \frac{\vec{l}_a \cdot \vec{w}_a}{|\vec{l}_a| \cdot |\vec{w}_a|}$$

Im Spezialfall $\frac{\vec{w}_a}{|\vec{w}_a|} = \frac{\vec{X}}{|\vec{X}|}$ ist $\vec{w}_a$ senkrecht zur Planetenoberfläche. Der schwingende Körper führt dann eine Kreisbewegung aus.

Nun soll auch die Coriolisbeschleunigung, die durch die Rotation des Planeten verursacht wird, bestimmt werden.

$$\vec{b}_c = -2 \cdot (\vec{w}_p \times \vec{v}) \qquad \text{nach Budo [2], §14, Gleichung (16), S.74}$$

$$\vec{v} = \vec{w}_p \times (\vec{X} + \vec{r}_a) \qquad \text{in den Fällen 1) und 2)}$$

und

$$\vec{v} = \vec{w}_p \times (\vec{X} + \vec{l}_a) \qquad \text{im Fall 3)}$$

Vgl. auch Budo [2], §14, Gleichung (8), S.72.

Daraus folgt:

$$\vec{b}_c(\vec{X} + \vec{r}_a) = -2 \cdot [\vec{w}_p \times (\vec{w}_p \times (\vec{X} + \vec{r}_a))] \qquad \text{in den Fällen 1) und 2)}$$

$$\vec{b}_c(\vec{X} + \vec{l}_a) = -2 \cdot [\vec{w}_p \times (\vec{w}_p \times (\vec{X} + \vec{l}_a))] \qquad \text{im Fall 3)}$$

Wir berechnen die Gesamtbeschleunigungen, vgl. auch Budo [2], §14, Gleichung (16), S.74.

Es gilt dann im Fall 1):

$$\vec{b}_{ges}(\vec{X}+\vec{r}_a) = \vec{z}_1 + \vec{b}_c + \vec{g}(\vec{X}+\vec{r}_a) + \vec{b}_z(\vec{X}+\vec{r}_a)$$

im Fall 2):

$$\vec{b}_{ges}(\vec{X}+\vec{r}_a) = \vec{g}(\vec{X}+\vec{r}_a) + \vec{b}_z(\vec{X}+\vec{r}_a) + \vec{z}_1 + \vec{z}_c + \vec{z}_2 + \vec{b}_c$$

im Fall 3) wegen Gleichung (5):

$$\vec{b}_{ges}(\vec{X}+\vec{l}_a) = \vec{g}(\vec{X}+\vec{l}_a) + \vec{b}_z(\vec{X}+\vec{l}_a) + \vec{z}_1 + \vec{b}_c \qquad (7)$$

Alle anderen Gleichungen verändern sich nicht. $\vec{w}_p$ ist konstant. $|\vec{w}_p|$ muß dann nicht mehr sehr klein sein. Wenn $|\vec{w}_p|$ sehr klein ist, dann kann die Berechnung in allen Fällen näherungsweise ohne $\vec{b}_z$ und $\vec{b}_c$ geführt werden.

Wir fassen die Fälle noch einmal zusammen:

Fall 1): Rotierende Scheibe (Karussell)
Fall 2): Bahnen in einer Hohlkugel
Fall 3): schwingender Körper

Sind die Winkelgeschwindigkeiten nicht mehr zeitlich konstant, dann treten noch weitere Beschleunigungen auf. Soll aber eine genaue zeitliche Beschreibung dieser Vorgänge erfolgen, so sind Materialeigenschaften (bei Karussell und Hohlkugel Reibung, beim schwingenden Körper Elastizitätseigenschaften des Seils) mit zu berücksichtigen. Das wird hier nicht gemacht.
Die Beschleunigungen, die durch andere Planeten, Fixsterne, Satelliten und andere Massen (bei der Erde vor allem Sonne und Mond) hervorgerufen werden, können durch ein Zusatzglied $\vec{b}_r(t)$ berücksichtigt werden. Dieser Zusatzterm ist aber gerade bei der Erde wegen der Mondbewegung stark zeitabhängig.

Bei der Erde ist: $\odot$ = Sonne E= Erde M=Mond

$$\frac{Gm_\odot}{r^2_{E\odot}} + \frac{Gm_M}{r^2_{EM}} \approx 6 \cdot 10^{-3}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} + 4 \cdot 10^{-5}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

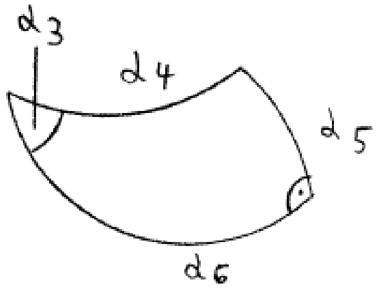
Das ist vernachlässigbar klein gegenüber $g = 9.81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$. Nur bei genauen Berechnungen ist dieses Korrekturglied erforderlich. $\vec{b}_r(t)$ kann aber durchaus auch nicht vernachlässigbar klein sein, wenn z.B. 2 Planeten nicht weit voneinander entfernt sind.

Anhang

Es geht hier um die Herleitung von $\sin\alpha_5 = \sin\alpha_3 \cdot \sin\alpha_4$ und
$\tan\alpha_6 = \cos\alpha_3 \cdot \tan\alpha_4$ für $0° \leq \alpha_4 \leq 360°$.

α_5 = Breitengrad von $\vec{r}_a$ $\qquad -90° \leq \alpha_5 \leq 90°$
α_6 = Längengrad von $\vec{r}_a$

Wir betrachten zuerst den Fall $0° \leq \alpha_4 \leq 90°$. Dabei ist $\alpha_5 \geq 0°$.

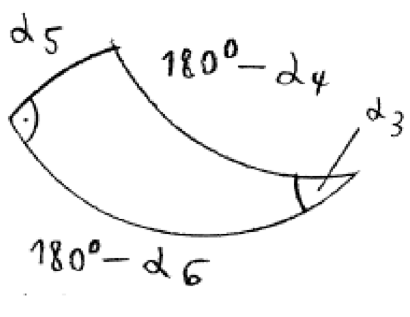


Nach Bronstein [1], Kapitel 2.6.4.3.2, S.209, Gleichung (2.87) und (2.95):

$$\sin\alpha_5 = \sin\alpha_4 \cdot \sin\alpha_3$$

$$\cos\alpha_3 = \tan\alpha_6 \cdot \cot\alpha_4 = \frac{\tan\alpha_6}{\tan\alpha_4} \qquad \Rightarrow \qquad \tan\alpha_6 = \cos\alpha_3 \cdot \tan\alpha_4$$

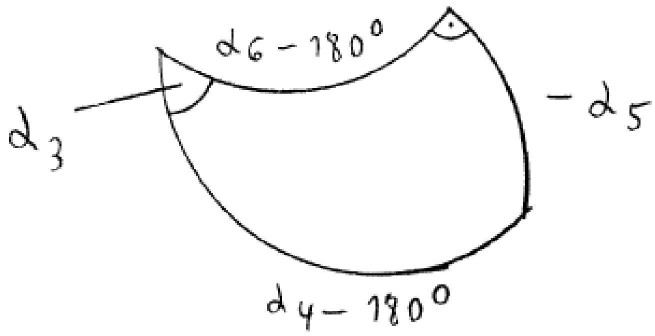
Nun zum Fall $90° \leq \alpha_4 \leq 180°$, mit $\alpha_5 \geq 0°$:



$\sin\alpha_5 = \sin(180° - \alpha_4) \cdot \sin\alpha_3 = \sin\alpha_4 \cdot \sin\alpha_3$

$$\cos\alpha_3 = \frac{\tan(180° - \alpha_6)}{\tan(180° - \alpha_4)} = \frac{-\tan\alpha_6}{-\tan\alpha_4} \qquad \Rightarrow \qquad \tan\alpha_6 = \cos\alpha_3 \cdot \tan\alpha_4$$

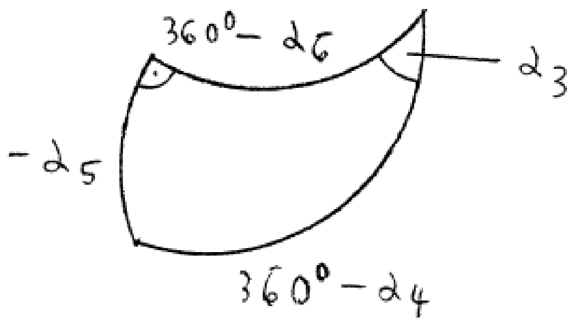
Der Fall $180° \leq \alpha_4 \leq 270°$: $\qquad \alpha_5 \leq 0°$



$-\sin\alpha_5 = \sin(-\alpha_5) = \sin\alpha_3 \cdot \sin(\alpha_4 - 180°) = -\sin\alpha_3 \cdot \sin\alpha_4$
$\Rightarrow \qquad \sin\alpha_5 = \sin\alpha_3 \cdot \sin\alpha_4$

$$\cos\alpha_3 = \frac{\tan(\alpha_6 - 180°)}{\tan(\alpha_4 - 180°)} = \frac{\tan\alpha_6}{\tan\alpha_4} \qquad \Rightarrow \qquad \tan\alpha_6 = \cos\alpha_3 \cdot \tan\alpha_4$$

Schließlich zum Fall $270° \leq \alpha_4 \leq 360°$: $\qquad \alpha_5 \leq 0°$



$-\sin\alpha_5 = \sin(-\alpha_5) = \sin\alpha_3 \cdot \sin(360° - \alpha_4) = -\sin\alpha_3 \cdot \sin\alpha_4$
$\Rightarrow \qquad \sin\alpha_5 = \sin\alpha_3 \cdot \sin\alpha_4$

$$\cos\alpha_3 = \frac{\tan(360° - \alpha_6)}{\tan(360° - \alpha_4)} = \frac{-\tan\alpha_6}{-\tan\alpha_4} \qquad \Rightarrow \qquad \tan\alpha_6 = \cos\alpha_3 \cdot \tan\alpha_4$$

Damit ist die Behauptung gezeigt.

Literatur

[1] I.N. Bronstein, K.A. Semendjajew „Taschenbuch der Mathematik“, Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1985, 22.Auflage

[2] A Budo „Theoretische Mechanik“, 10.Auflage, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1980

[3] Otto Forster „Analysis 3“, 2.Auflage, 1983, Vieweg Verlag, Braunschweig

[4] Harald Schröer „Orientierungstheorie - die visuelle Vertikale“, Verlag Wissenschaft und Technik, Berlin, 2002