Die scheinbare Helligkeit von Planeten

Harald Schröer

2009

Abstract: Die scheinbare Helligkeit von Planeten wird zuerst allgemein und dann bei geneigten Kreisbahnen bestimmt.

Key words: Helligkeit - Phase - Phasenwinkel - Kreisbahn - Planet

1 Grundlagen

Es ist bekannt, daß die Planeten Merkur und Venus im Fernrohr verschiedene Phasen ähnlich wie der Mond zeigen. Zur Bestimmung der scheinbaren Helligkeit ist neben der Entfernung die Phase entscheidend. Aus diesem Grund haben Merkur und Venus nicht die größte scheinbare Helligkeit, wenn sie die geringste Entfernung zur Erde haben. Im Fernrohr sind dann beide Planeten als sehr schmale Sicheln zu sehen. Die maximale scheinbare Helligkeit wird erreicht, wenn Venus und Merkur im Fernrohr eine dicke Sichel zeigen. Wir wollen hier die scheinbare Helligkeit eines Planeten in Abhängigkeit von seiner Bewegung untersuchen. Dazu führen wir folgende Größen ein:

$\vec{r}_s(t)$ = Position eines **selbstleuchtenden** Körpers S (Fixstern)

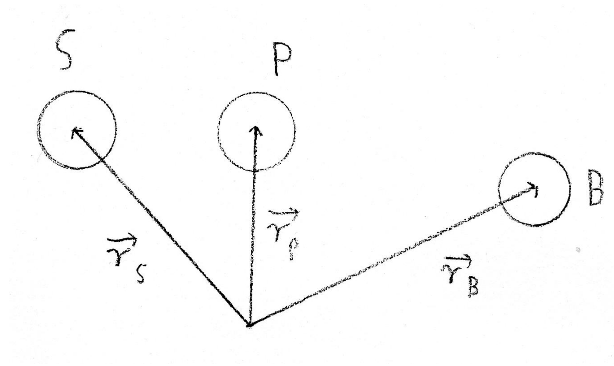
$\vec{r}_p(t)$ = Position eines bestrahlten Körpers P (Planet), P leuchtet nicht selbst.

$\vec{r}_B(t)$ = Position eines anderen Körpers B (Planet), auf dem sich ein Beobachter befindet. B leuchtet nicht selbst.

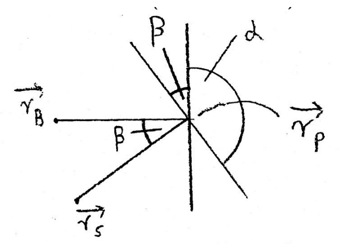
$\vec{r}_s, \vec{r}_B, \vec{r}_p \in R^3 \qquad t = \text{Zeit}$

Annahme: P und B besitzen **keine** Atmosphären.

Alle 3 Körper sind Kugeln, deren Radien klein gegenüber den Entfernungen der 3 Körper untereinander sein sollen.



Der Reflektionswinkel (Phasenwinkel):



α = Phasenwinkel, unter dem P bei B gesehen wird.

$$\alpha = 180^\circ - \beta \qquad \cos\alpha = \cos(180^\circ - \beta) = -\cos\beta$$

Der Winkel β kann mit dem Skalarprodukt beschrieben werden:

$$\cos\beta = \frac{(\vec{r}_B - \vec{r}_p) \cdot (\vec{r}_s - \vec{r}_p)}{|\vec{r}_p - \vec{r}_B| \cdot |\vec{r}_s - \vec{r}_p|}$$

Daraus folgt:

$$\cos\alpha = \frac{(\vec{r}_p - \vec{r}_B) \cdot (\vec{r}_s - \vec{r}_p)}{|\vec{r}_p - \vec{r}_B| \cdot |\vec{r}_s - \vec{r}_p|} \tag{1}$$

Nun erklären wir folgende Größen:

R_s = Radius der Kugel S (Fixstern)

R_p = Radius der Kugel P (Planet)

R_B = Radius der Kugel B (Planet mit Beobachter)

R_a = Radius der Augenlinse des Beobachters

Das Problem ist, die Helligkeit der Kugel P, von B aus gesehen, zu bestimmen.

$\Phi_{s,p}$ = Lichtstrom, der von S nach P geht.

I = Lichtstärke von S

$\Omega_{s,p}$ = Raumwinkel, unter dem P von S aus erscheint.

Nach Voigt [9] Kapitel V.1.1 S.177 kann der Raumwinkel näherungsweise durch

$$\Omega_{s,p} = \frac{\pi R_p^2}{|\vec{r}_s - \vec{r}_p|^2} \qquad R_p \ll |\vec{r}_s - \vec{r}_p|$$

dargestellt werden.

$$\Phi_{s,p} = I \cdot \Omega_{s,p}$$

ist nach Kuchling [6] Kapitel 27.2.4. S.387 der dazugehörige Lichtstrom.

Der Lichtstrom Φ_α mit Berücksichtigung der Phase kann nach Montenbruck [7] Kapitel VI.3.2 S.112 folgenderweise dargestellt werden:

$$\Phi_\alpha = \frac{1 + \cos(\pi - \alpha)}{2} \cdot \Phi_{s,p} = \frac{1 - \cos\alpha}{2} \cdot \Phi_{s,p} \qquad \alpha \text{ in Bogenmaß}$$

Wir benötigen noch:

a = spezifische Lichtintensität (Reflektionsfaktor) der Kugel P

Für die Beleuchtungsstärke E, die der Beobachter auf der Kugel B aufnimmt, erhalten wir nach Kuchling [6] Kapitel 27.2.7. S.389:

$$E = \frac{\Phi_\alpha \cdot a}{|\vec{r}_p - \vec{r}_B|^2}$$

Der Lichtstrom, den der Beobachter aufnimmt, ist nach Kuchling [6] (O 27.21) S.389:

$$\Phi_B = \pi \cdot R_a^2 \cdot E$$

Φ_B kann ebenso wie E als Maß für die Helligkeit angesehen werden. Wenn wir nun die Einsetzungen vornehmen, erhalten wir für die Beleuchtungsstärke:

$$E = \frac{(1 - \cos\alpha) \cdot \Phi_{s,p} \cdot a}{2 \cdot |\vec{r}_p - \vec{r}_B|^2} = \frac{\pi \cdot R_p^2 \cdot I \cdot a \cdot (1 - \cos\alpha)}{2 \cdot |\vec{r}_s - \vec{r}_p|^2 \cdot |\vec{r}_p - \vec{r}_B|^2} \tag{2}$$

Das sind die Formeln für die Helligkeit unter der Voraussetzung, daß der Zwischenraum Vakuum ist. Es findet also keine Absorption statt. Wir werden nun die Absorption mit berücksichtigen. Der ganze Raum soll jetzt mit einem Medium versehen sein. m ist der Absorptionskoeffizient. Die folgenden Formeln ändern sich dann:

$$\Phi_{s,p} = \Omega_{s,p} \cdot I \cdot e(\vec{r}_s, \vec{r}_p, t)$$

und

$$E = \frac{\Phi_\alpha \cdot a}{|\vec{r}_p - \vec{r}_B|^2} \cdot e(\vec{r}_p, \vec{r}_B, t)$$

$e(\ldots)$ sind Schwächungsfaktoren. Im Fall gleichmäßiger Absorption, d.h. m zeitlich und räumlich konstant, erhalten wir:

$$e(\vec{r}_s, \vec{r}_p, t) = e^{-m \cdot |\vec{r}_s - \vec{r}_p|}$$

$$e(\vec{r}_p, \vec{r}_B, t) = e^{-m \cdot |\vec{r}_p - \vec{r}_B|}$$

Bei ungleichmäßiger Absorption ist dagegen:

$$e(\vec{x}, \vec{y}, t) = e^{-F(\vec{x}, \vec{y}, t)}$$

mit

$$F(\vec{x}, \vec{y}, t) := \int_0^1 m(\vec{s}(\vec{x}, \vec{y}, \tau), t) \cdot |\vec{x} - \vec{y}| \, d\tau$$

wobei

$$\vec{s}(\vec{x}, \vec{y}, \tau) = \tau \vec{y} + (1 - \tau) \cdot \vec{x} \qquad \tau \in [0, 1]$$

und

$$\vec{s}(\tau = 0) = \vec{x} \qquad \vec{s}(\tau = 1) = \vec{y}$$

$m(\vec{x}, t)$ ist dabei eine Absorptionsfunktion, die von $\vec{x} \in R^3$ und t abhängt. Die Formel für die ungleichmäßige Absorption gilt nur bei extrem dünnem Medium wie z.B. im Weltraum. Auch dann gilt diese Formel nur näherungsweise. Im nichthomogenen Medium werden die Lichtstrahlen gebrochen. Diese Richtungsänderung ist schwer zu berücksichtigen. Bei sehr dünnen Medien, wie bei der extrem verdünnten Materiedichte im Weltraum, tritt keine nennenswerte Richtungsänderung auf.
Bei der Formel für ungleichmäßige Absorption handelt es sich um ein Kurvenintegral 1.Art vgl. Bronstein [3] Kapitel 3.1.8.2 S.319.

Wenn wir die Einsetzungen genauso wie im Fall des Vakuums vornehmen, bekommen wir:

$$E = \frac{\pi R_p^2 Ia \cdot (1 - \cos\alpha) \cdot e(\vec{r}_s, \vec{r}_p, t) \cdot e(\vec{r}_p, \vec{r}_B, t)}{2 \cdot |\vec{r}_s - \vec{r}_p|^2 \cdot |\vec{r}_p - \vec{r}_B|^2}$$

oder

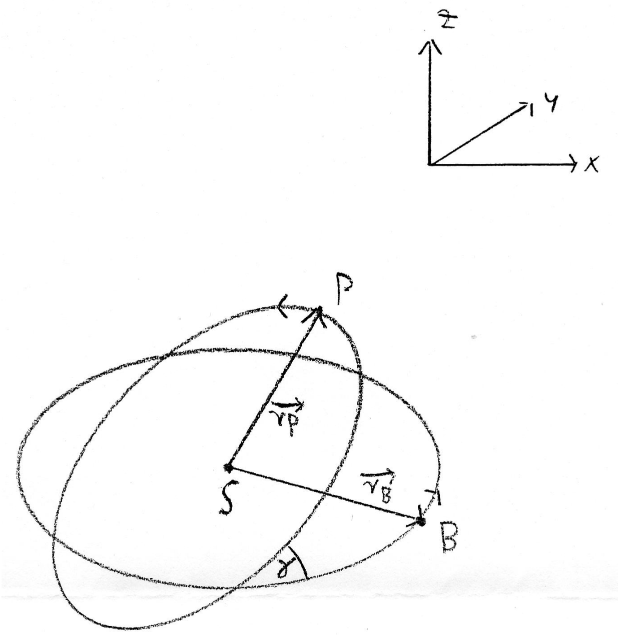
$$\Phi_B = \frac{\pi^2 R_p^2 R_a^2 \cdot Ia \cdot (1 - \cos\alpha) \cdot e(\vec{r}_s, \vec{r}_p, t) \cdot e(\vec{r}_p, \vec{r}_B, t)}{2 \cdot |\vec{r}_s - \vec{r}_p|^2 \cdot |\vec{r}_p - \vec{r}_B|^2}$$

Im Absorptionsfall gelten die Formeln nur bei Licht im **sichtbaren** Wellenlängenbereich. Schon in den Nachbarbereichen Ultraviolett und Infrarot treten zusätzlich Emission und Streuung in größerem Maße auf.

Ebene Polarkoordinaten können für $\vec{r}_s, \vec{r}_p, \vec{r}_B$ für die Bewegung in Kreisbahnen in einer Ebene verwendet werden. Das wird bei Schröer [8] gemacht. Für geneigte Kreisbahnen können Kugelkoordinaten eingesetzt werden.

2 Die scheinbare Helligkeit von Planeten auf geneigten Kreisbahnen

Wir schauen uns nun ein Beispiel mit geneigten Kreisbahnen an. Dieses Beispiel ist ähnlich zu Sonne, Erde und Venus. Die Sonne symbolisiert den Fixstern S, während die Erde durch den Beobachterplaneten B und die Venus durch den bestrahlten Planeten P dargestellt wird. Auf Absorption wird zunächst verzichtet.



Gegeben sind die Bahnradien r_p und r_B, die Startwinkel δ_p und δ_B und die Massen m_p und m_B der Planeten P (Venus) und B (Erde). Der Fixstern S (Sonne) befindet sich im Koordinatenursprung ($\vec{r_s} = \vec{0}$). m_s soll die Masse des Fixsterns (Sonne) sein. Dann kann die Winkelgeschwindigkeit der beiden Planeten bestimmt werden. Sie folgt aus der Gleichheit von Gravitationskraft und Zentripetalkraft bei der Kreisbewegung:

$$\frac{G \cdot m_s m_p}{r_p^2} = m_p \cdot r_p w_p^2 \qquad \text{daraus folgt:} \qquad w_p = \sqrt{\frac{G \cdot m_s}{r_p^3}}$$

$$\frac{G \cdot m_s m_B}{r_B^2} = m_B \cdot r_B w_B^2 \qquad \text{daraus folgt:} \qquad w_B = \sqrt{\frac{G \cdot m_s}{r_B^3}}$$

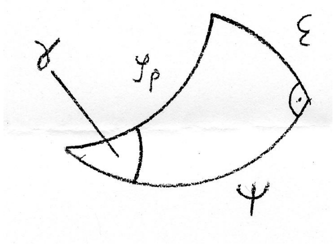
Dabei ist G die Gravitationskonstante. Die Kreisbahn des bestrahlten Planeten P soll geneigt sein gegenüber der Kreisbahn des Beobachterplaneten B. Dieser Neigungswinkel wird mit γ bezeichnet und soll konstant sein. Dieses Modell wird dann der Bewegung von Erde und Venus entsprechen.

Der Planet B mit Beobachter kreist in einer Ebene mit dem Bahnvektor:

$$\vec{r}_B(t) = r_B \cdot \begin{pmatrix} \cos(\delta_B + w_B \cdot t) \\ \sin(\delta_B + w_B \cdot t) \\ 0 \end{pmatrix} = r_B \cdot \begin{pmatrix} \cos\varphi_B \\ \sin\varphi_B \\ 0 \end{pmatrix}$$

Weiterhin gilt $\varphi_p = \delta_p + w_p \cdot t$.

Wir betrachten das folgende rechtwinklige Kugeldreieck:

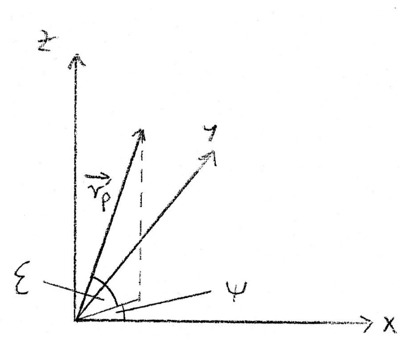


Dann gelten die folgenden Gleichungen:

$$\sin\varepsilon = \sin\gamma \cdot \sin\varphi_p \tag{3}$$

$$\tan\psi = \cos\gamma \cdot \tan\varphi_p \tag{4}$$

Die Herleitung beider Gleichungen erfolgt im Anhang. Wir führen jetzt Kugelkoordinaten ein, nach der folgenden Zeichnung:



Der Vektor $\vec{r}_p$ ist nach Bartsch [2], Kapitel 7.2.1, S.264,265 gegeben durch:

$$\vec{r}_p(t) = r_p \cdot \begin{pmatrix} \cos\varepsilon \cdot \cos\psi \\ \cos\varepsilon \cdot \sin\psi \\ \sin\varepsilon \end{pmatrix}$$

Man beachte, dass der Betrag r_p von $\vec{r}_p$ gegeben ist.

Vom erstem Kapitel kennen wir die Formeln:

$$\cos\alpha = \frac{(\vec{r}_p - \vec{r}_B) \cdot (\vec{r}_s - \vec{r}_p)}{|\vec{r}_p - \vec{r}_B| \cdot |\vec{r}_s - \vec{r}_p|}$$

$$E = \frac{\pi \cdot R_p^2 \cdot I \cdot a \cdot (1 - \cos\alpha)}{2 \cdot |\vec{r}_s - \vec{r}_p|^2 \cdot |\vec{r}_p - \vec{r}_B|^2}$$

$$\Phi_B = \pi \cdot R_a^2 \cdot E$$

Es ist hier $\vec{r}_s = \vec{0}$.

$$\cos\alpha = \frac{(\vec{r}_B - \vec{r}_p) \cdot \vec{r}_p}{|\vec{r}_B - \vec{r}_p| \cdot r_p}$$

$$E = \frac{\pi \cdot R_p^2 \cdot I \cdot a \cdot (1 - \cos\alpha)}{2 \cdot r_p^2 \cdot |\vec{r}_B - \vec{r}_p|^2}$$

Nun müssen Zähler und Nenner von $\cos\alpha$ bestimmt werden.

Wir berechnen den Zähler von $\cos\alpha$:

$$(\vec{r}_B - \vec{r}_p) \cdot \vec{r}_p = \vec{r}_B \cdot \vec{r}_p - \vec{r}_p^{\,2}$$

Wegen der Skalarprodukteigenschaft $\vec{r}_p^{\,2} = |\vec{r}_p|^2$:

$$= r_B r_p \cdot \begin{pmatrix} \cos\varphi_B \\ \sin\varphi_B \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\varepsilon\cos\psi \\ \cos\varepsilon\sin\psi \\ \sin\varepsilon \end{pmatrix} - r_p^2$$

$$= r_B r_p \cdot \begin{pmatrix} \cos\varphi_B \\ \sin\varphi_B \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\varepsilon\cos\psi \\ \cos\varepsilon\sin\psi \end{pmatrix} - r_p^2$$

$$= r_p \cdot \left[r_B \cdot \begin{pmatrix} \cos\varphi_B \\ \sin\varphi_B \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\varepsilon\cos\psi \\ \cos\varepsilon\sin\psi \end{pmatrix} - r_p \right]$$

Nun bilden wir den Nenner von $\cos\alpha$:

$$|\vec{r}_B - \vec{r}_p| \cdot r_p = \sqrt{\vec{r}_B^{\,2} - 2 \cdot \vec{r}_B \cdot \vec{r}_p + \vec{r}_p^{\,2}} \cdot r_p$$

Wir nutzen die Skalarprodukteigenschaft $\vec{r}^{\,2} = |\vec{r}|^2$ für $\vec{r} \in R^3$:

$$= r_p \cdot \left[r_B^2 + r_p^2 - 2 r_B r_p \cdot \begin{pmatrix} \cos\varphi_B \\ \sin\varphi_B \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\varepsilon\cos\psi \\ \cos\varepsilon\sin\psi \\ \sin\varepsilon \end{pmatrix} \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= r_p \cdot \left[r_B^2 + r_p^2 - 2 r_B r_p \cdot \begin{pmatrix} \cos\varphi_B \\ \sin\varphi_B \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\varepsilon\cos\psi \\ \cos\varepsilon\sin\psi \end{pmatrix} \right]^{\frac{1}{2}}$$

Wir bekommen schließlich:

$$\cos\alpha = \frac{\left(r_B \cdot \begin{pmatrix} \cos\varphi_B \\ \sin\varphi_B \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\varepsilon\cos\psi \\ \cos\varepsilon\sin\psi \end{pmatrix} - r_p \right) \cdot r_p}{r_p \cdot \left[r_B^2 + r_p^2 - 2 r_B r_p \cdot \begin{pmatrix} \cos\varphi_B \\ \sin\varphi_B \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\varepsilon\cos\psi \\ \cos\varepsilon\sin\psi \end{pmatrix} \right]^{\frac{1}{2}}}$$

Im Nenner der Beleuchtungstärke E ist das Quadrat des Nenners von $\cos\alpha$. Wir erhalten:

$$E = \frac{\pi \cdot R_p^2 \cdot I \cdot a \cdot (1 - \cos\alpha)}{2 r_p^2 \cdot \left[r_B^2 + r_p^2 - 2 r_B r_p \cdot \begin{pmatrix} \cos\varphi_B \\ \sin\varphi_B \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\varepsilon\cos\psi \\ \cos\varepsilon\sin\psi \end{pmatrix} \right]}$$

Für den Lichtstrom:

$$\Phi_B = \pi \cdot R_a^2 \cdot E$$

Es bietet sich die Gelegenheit auch den Absorptionsfall zu behandeln, wobei der Absorptionkoeffizient m räumlich aber nicht zeitlich veränderlich ist. Das Medium muß extrem dünn sein (z.B. interplanetarer Raum). Bei dichteren Medien kommt es bei veränderlichen m zu größeren Richtungsänderungen der Strahlung. Im Fall mit Absorption lautet die Beleuchtungsstärke, vgl. Kapitel 1:

$$E = \frac{\pi \cdot R_p^2 \cdot I \cdot a \cdot (1 - \cos\alpha) \cdot e(\vec{r}_p, \vec{r}_B) \cdot e(\vec{r}_s, \vec{r}_p)}{2 \cdot r_p^2 \cdot \left[r_B^2 + r_p^2 - 2 r_B r_p \cdot \begin{pmatrix} \cos\varphi_B \\ \sin\varphi_B \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\varepsilon\cos\psi \\ \cos\varepsilon\sin\psi \end{pmatrix} \right]}$$

Dabei ist:

$$e(\vec{r}_p, \vec{r}_B) = e^{-F(\vec{r}_p, \vec{r}_B)}$$

mit:

$$F(\vec{r}_p, \vec{r}_B) = \int_0^1 m(\vec{s}(\vec{r}_p, \vec{r}_B, \tau)) \cdot |\vec{r}_B - \vec{r}_p| \, d\tau$$

wobei:

$$\vec{s}(\vec{r}_p, \vec{r}_B, \tau) = \tau \cdot \vec{r}_B + (1 - \tau) \cdot \vec{r}_p \qquad \tau \in [0, 1]$$

Nun berücksichtigen wir $\vec{r}_s = \vec{0}$:

$$e(\vec{r}_s, \vec{r}_p) = e(\vec{0}, \vec{r}_p) = e^{-F(\vec{0}, \vec{r}_p)}$$

mit:

$$F(\vec{0}, \vec{r}_p) = \int_0^1 m(\vec{s}(\vec{0}, \vec{r}_p, \tau)) \cdot r_p \, d\tau$$

wobei:

$$\vec{s}(\vec{0}, \vec{r}_p, \tau) = \tau \cdot \vec{r}_p \qquad \tau \in [0, 1]$$

Wenn der Absorptionskoeffizient m konstant ist, folgt für die Beleuchtungsstärke:

$$E = \frac{\pi \cdot R_p^2 \cdot I \cdot a \cdot (1 - \cos\alpha) \cdot e^{-m \cdot |\vec{r}_B - \vec{r}_p|} \cdot e^{-m \cdot r_p}}{2 r_p^2 \cdot \left[r_B^2 + r_p^2 - 2 r_p r_B \cdot \begin{pmatrix} \cos\varphi_B \\ \sin\varphi_B \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\varepsilon\cos\psi \\ \cos\varepsilon\sin\psi \end{pmatrix} \right]}$$

mit:

$$|\vec{r}_B - \vec{r}_p| = \left[r_B^2 + r_p^2 - 2 r_B r_p \cdot \begin{pmatrix} \cos\varphi_B \\ \sin\varphi_B \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\varepsilon\cos\psi \\ \cos\varepsilon\sin\psi \end{pmatrix} \right]^{\frac{1}{2}}$$

Ist M die scheinbare Helligkeit in Größenklassen und E die Beleuchtgsstärke und Φ_B der Lichtstrom, so gilt für die Umrechnung nach Voigt [9] Kapitel IV.1.1, S.139 oder Wendker [10] Kapitel 4.1.2 S.78, Gleichung (4-1):

$$M_1 - M_2 = -2.5 \cdot \lg\left(\frac{\Phi_{B1}}{\Phi_{B2}}\right) = -2.5 \cdot \lg\left(\frac{E_1}{E_2}\right)$$

Bei Montenbruck [7] Kapitel VI.5, S.119 werden spezielle Formeln für die scheinbare Helligkeit von Merkur, Venus, Mars, Jupiter, Saturn, Uranus, Neptun und Pluto angegeben. Eine Schwierigkeit bei Saturn besteht durch das Ringsystem, das aber auch mit berücksichtigt wird.

Wir wollen nun die maximale und minimale Beleuchtungstärke berechnen. Dazu benötigen wir die Ableitung von E. Zuerst soll der Vakuumfall behandelt werden. Wir führen das Symbol k ein.

$$k := r_B r_p \cdot \begin{pmatrix} \cos\varphi_B \\ \sin\varphi_B \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\varepsilon\cos\psi \\ \cos\varepsilon\sin\psi \end{pmatrix}$$

Das Symbol h ist erklärt durch:

$$h := \cos\alpha$$

Wir bilden die zeitliche Ableitung von k:

$$\dot{k} = r_B r_p \cdot \Bigg[\dot{\varphi}_B \cdot \begin{pmatrix} -\sin\varphi_B \\ \cos\varphi_B \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\varepsilon\cos\psi \\ \cos\varepsilon\sin\psi \end{pmatrix}$$

$$+ \begin{pmatrix} \cos\varphi_B \\ \sin\varphi_B \end{pmatrix} \cdot \frac{d}{dt} \left(\cos\varepsilon \cdot \begin{pmatrix} \cos\psi \\ \sin\psi \end{pmatrix} \right) \Bigg]$$

mit:

$$\frac{d}{dt} \left(\cos\varepsilon \cdot \begin{pmatrix} \cos\psi \\ \sin\psi \end{pmatrix} \right) = -\dot{\varepsilon}\sin\epsilon \cdot \begin{pmatrix} \cos\psi \\ \sin\psi \end{pmatrix} + \dot{\psi}\cos\varepsilon \cdot \begin{pmatrix} -\sin\psi \\ \cos\psi \end{pmatrix}$$

Dabei ist nach den Gleichungen (3) und (4):

$$\varepsilon = \arcsin(\sin\gamma \cdot \sin\varphi_p)$$

$$\psi = \arctan(\cos\gamma \cdot \tan\varphi_p)$$

Mit der Kettenregel erhalten wir:

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\varphi}_p \cdot \sin\gamma \cdot \cos\varphi_p}{\sqrt{1 - \sin^2\gamma\sin^2\varphi_p}} \tag{5}$$

$$\dot{\psi} = \frac{\dot{\varphi}_p \cdot \cos\gamma \cdot (\tan^2\varphi_p + 1)}{1 + \cos^2\gamma\tan^2\varphi_p} \tag{6}$$

Damit ist k vollständig differenziert.

Wir können nun die Beleuchtungsstärke schreiben als:

$$E = \frac{\pi \cdot R_p^2 \cdot I \cdot a \cdot (1 - \cos\alpha)}{2r_p^2 \cdot (r_B^2 + r_p^2 - 2k)}$$

Nun bilden wir die Ableitung von E nach der Quotientenregel:

$$\dot{E} = \frac{\pi R_p^2 Ia}{2r_p^2} \cdot \frac{\sin\alpha \cdot \dot{\alpha} \cdot (r_B^2 + r_p^2 - 2k) + 2 \cdot (1 - \cos\alpha) \cdot \dot{k}}{(r_B^2 + r_p^2 - 2k)^2}$$

Nun differenzieren wir α:

$$\cos\alpha = h$$

Daraus folgt:

$$\alpha = \arccos h$$

Mit der Kettenregel bekommen wir:

$$\dot{\alpha} = \frac{-\dot{h}}{\sqrt{1 - h^2}}$$

mit:

$$h = \frac{k - r_p^2}{r_p \cdot \sqrt{r_p^2 + r_B^2 - 2k}}$$

Quotientenregel:

$$\dot{h} = \frac{1}{r_p \cdot (r_p^2 + r_B^2 - 2k)} \cdot \left(\dot{k} \cdot \sqrt{r_p^2 + r_B^2 - 2k} - (k - r_p^2) \cdot \frac{-\dot{k}}{\sqrt{r_p^2 + r_B^2 - 2k}} \right)$$

Dabei sind:

$$\varphi_B = \delta_B + w_B \cdot t$$

$$\varphi_p = \delta_p + w_p \cdot t$$

Es folgt:

$$\dot{\varphi}_B = w_B \qquad \dot{\varphi}_p = w_p$$

Damit ist die Beleuchtungstärke E vollständig differenziert im Vakuumfall.

Die notwendige Bedingung für Maxima oder Minima der Beleuchtungsstärke folgt mit $\dot{E} = 0$ aus:

$$\sin\alpha \cdot \dot{\alpha} \cdot (r_B^2 + r_p^2 - 2k) + 2 \cdot (1 - \cos\alpha) \cdot \dot{k} = 0$$

Löst man diese Gleichung nach t auf, so erhält man t-Werte, für die $E(t)$ ein lokales Maximum oder lokales Minimum oder ein Sattelpunkt ergibt. Ob nun ein Extremum wirklich vorliegt, muß mit dem Satz von Rolle oder der zweiten Ableitung von E entschieden werden. Evt. werden dafür auch höhere Ableitungen benötigt vgl. Barner [1] Kapitel 8.4 S.295.

Nun beschäftigen wir uns mit der Ableitung der Beleuchtungsstärke im Absorptionsfall: $(\vec{r}_s = \vec{0})$

$$E = \frac{\pi R_p^2 Ia \cdot (1 - \cos\alpha) \cdot e(\vec{r}_p, \vec{r}_B) \cdot e(\vec{0}, \vec{r}_p)}{2r_p^2 \cdot (r_B^2 + r_p^2 - 2k)}$$

Der Absoprtionskoeffizient m ist räumlich nicht konstant. Wir wenden die Quotientenregel an:

$$\dot{E} = \frac{\pi R_p^2 I a}{2r_p^2 \cdot (r_B^2 + r_p^2 - 2k)^2} \cdot \Big[\frac{d}{dt}\Big((1-\cos\alpha)\cdot e(\vec{r}_p, \vec{r}_B)\cdot e(\vec{0}, \vec{r}_p)\Big)\cdot (r_B^2 + r_p^2 - 2k)$$

$$+2\dot{k}\cdot(1-\cos\alpha)\cdot e(\vec{r}_p, \vec{r}_B)\cdot e(\vec{0}, \vec{r}_p)\Big]$$

mit:

$$\frac{d}{dt}\Big((1-\cos\alpha)\cdot e(\vec{r}_p, \vec{r}_B)\cdot e(\vec{0}, \vec{r}_p)\Big) = \sin\alpha\cdot\dot{\alpha}\cdot e(\vec{r}_p, \vec{r}_B)\cdot e(\vec{0}, \vec{r}_p) + (1-\cos\alpha)\cdot\frac{d}{dt}\left[e(\vec{r}_p, \vec{r}_B)\cdot e(\vec{0}, \vec{r}_p)\right]$$

wobei:

$$\frac{d}{dt}\left[e(\vec{r}_p, \vec{r}_B)\cdot e(\vec{0}, \vec{r}_p)\right] = \frac{d}{dt}e(\vec{r}_p, \vec{r}_B)\cdot e(\vec{0}, \vec{r}_p) + e(\vec{r}_p, \vec{r}_B)\cdot\frac{d}{dt}e(\vec{0}, \vec{r}_p)$$

Wir differenzieren:

$$\frac{d}{dt}e(\vec{r}_p, \vec{r}_B) = -e^{-F_1(\vec{r}_p, \vec{r}_B)}\cdot\dot{F}_1$$

Die F-Funktion wird indiziert, weil sie in unterschiedlicher Weise gebraucht wird.

$\dot{F}_1$ wird erklärt durch:

$$\dot{F}_1 = \frac{d}{dt}\left[\int_0^1 m(\vec{s}_1(\vec{r}_p, \vec{r}_B, \tau))\cdot|\vec{r}_B - \vec{r}_p|\,d\tau\right]$$

$\vec{s}$ wird indiziert, weil es in unterschiedlicher Weise verwendet wird.

Wir setzen voraus, dass m stetig im R^3 und der Integrand stetig differenzierbar nach t ist. Dann kann z.B. nach Forster [4], §9, Satz 2, S.84 Ableitung und Integration vertauscht werden, zu schwächeren Voraussetzungen vgl. Forster [5] §11 Satz 2 S.99:

$$\dot{F}_1 = \int_0^1 \frac{d}{dt}\left[m(\vec{s}_1(\vec{r}_p, \vec{r}_B, \tau))\cdot|\vec{r}_B - \vec{r}_p|\right]\,d\tau$$

Der Integrand ist gleich:

$$\frac{d}{dt}m(\vec{s}_1(\vec{r}_p, \vec{r}_B, \tau))\cdot|\vec{r}_B - \vec{r}_p| + m(\vec{s}_1(\vec{r}_p, \vec{r}_B, \tau))\cdot\frac{d}{dt}|\vec{r}_B - \vec{r}_p|$$

mit:

$$\frac{d}{dt}|\vec{r}_B - \vec{r}_p| = \frac{d}{dt}(\vec{r}_B^2 + \vec{r}_p^2 - 2\cdot\vec{r}_B\cdot\vec{r}_p)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{d}{dt}(r_B^2 + r_p^2 - 2k)^{\frac{1}{2}} = \frac{-\dot{k}}{\sqrt{r_B^2 + r_p^2 - 2k}}$$

und:

$$\frac{d}{dt}m(\vec{s}_1(\vec{r}_p, \vec{r}_B, \tau)) = \operatorname{grad} m(\vec{s}_1(\vec{r}_p, \vec{r}_B, \tau))\cdot\dot{\vec{s}}_1 \qquad \operatorname{grad} m = \left(\frac{\partial m}{\partial x}, \frac{\partial m}{\partial y}, \frac{\partial m}{\partial z}\right)$$

mit:

$$\dot{\vec{s}_1} = \tau \dot{\vec{r}_B} + (1-\tau)\dot{\vec{r}_p} \qquad\qquad \tau \in [0,1]$$

Dabei ist:

$$\dot{\vec{r}_B} = r_B \cdot \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \cos\varphi_B \\ \sin\varphi_B \\ 0 \end{pmatrix} = r_B \cdot \dot{\varphi}_B \cdot \begin{pmatrix} -\sin\varphi_B \\ \cos\varphi_B \\ 0 \end{pmatrix}$$

mit:

$$\dot{\varphi}_B = w_B$$

und:

$$\dot{\vec{r}_p} = r_p \cdot \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \cos\varepsilon\cos\psi \\ \cos\varepsilon\sin\psi \\ \sin\varepsilon \end{pmatrix}$$

$$= r_p \cdot \begin{pmatrix} -\dot{\varepsilon}\sin\varepsilon\cos\psi - \dot{\psi}\cos\varepsilon\sin\psi \\ -\dot{\varepsilon}\sin\varepsilon\sin\psi + \dot{\psi}\cos\varepsilon\cos\psi \\ \dot{\varepsilon}\cos\varepsilon \end{pmatrix}$$

mit den Gleichungen (5) und (6):

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\varphi}_p \cdot \sin\gamma \cdot \cos\varphi_p}{\sqrt{1 - \sin^2\gamma \cdot \sin^2\varphi_p}}$$

$$\dot{\psi} = \frac{\dot{\varphi}_p \cdot \cos\gamma \cdot (\tan^2\varphi_p + 1)}{1 + \cos^2\gamma \cdot \tan^2\varphi_p}$$

und:

$$\dot{\varphi}_p = w_p$$

Wir differenzieren nun den zweiten e-Term:

$$\frac{d}{dt}\, e(\vec{0}, \vec{r}_p) = -e^{-F_2(\vec{0},\vec{r}_p)} \cdot \dot{F}_2$$

Hier zeigt sich nun, dass es sinnvoll ist, die F-Funktion und $\vec{s}$ zu indizieren.

$$\dot{F}_2 = \frac{d}{dt} \left[\int\limits_0^1 m(\vec{s}_2(\vec{0}, \vec{r}_p, \tau)) \cdot |\vec{r}_p| \, d\tau \right]$$

m soll stetig im R^3 sein. Der Integrand sei stetig differenzierbar nach t. Dann gilt nach Forster [4], §9, Satz 2, S.84 (zu schwächeren Voraussetzungen vgl. Forster [5] §11, Satz 2, S.99):

$$\dot{F}_2 = r_p \cdot \int\limits_0^1 \frac{d}{dt}\, m(\vec{s}_2(\vec{0}, \vec{r}_p, \tau)) \, d\tau$$

mit:

$$\frac{d}{dt}\, m(\vec{s}_2(\vec{0}, \vec{r}_p, \tau)) = \operatorname{grad} m(\vec{s}_2(\vec{0}, \vec{r}_p, \tau)) \cdot \dot{\vec{s}_2}$$

wobei:

$$\dot{\vec{s}_2} = \tau \cdot \dot{\vec{r}_p} \qquad\qquad \tau \in [0,1]$$

$\dot{\vec{r}}_p$ wurde schon vorher erklärt.

Damit ist die Beleuchtungstärke E vollständig differenziert.

Notwendige Bedingung für lokale Extrema ist $\dot{E} = 0$. Also folgt:

$$\frac{d}{dt}((1 - \cos\alpha) \cdot e(\vec{r}_p, \vec{r}_B) \cdot e(\vec{0}, \vec{r}_p)) \cdot (r_B^2 + r_p^2 - 2k)$$
$$+2\dot{k} \cdot (1 - \cos\alpha) \cdot e(\vec{r}_p, \vec{r}_B) \cdot e(\vec{0}, \vec{r}_p) = 0$$

Nun betrachten wir noch den Spezialfall, dass der Absorptionskoeffizient m konstant ist. Dann ist $\operatorname{grad} m = \vec{0}$. Wir erhalten:

$$\dot{F}_1 = m \cdot \int_0^1 \frac{d}{dt} |\vec{r}_B - \vec{r}_p| \, d\tau$$

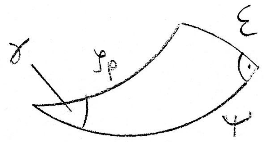
$$\dot{F}_2 = 0$$

3 Anhang

Es geht hier um die Herleitung von $\sin\varepsilon = \sin\gamma \cdot \sin\varphi_p$ und $\tan\psi = \cos\gamma \cdot \tan\varphi_p$ für $0° \leq \varphi_p \leq 360°$.

ε = Breitenwinkel $\quad -90° \leq \varepsilon \leq 90°$
ψ = Längenwinkel

Wir betrachten zuerst den Fall $0° \leq \varphi_p \leq 90°$. Dabei ist $\varepsilon \geq 0°$.

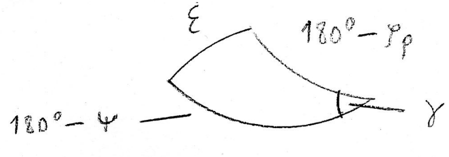


Nach Bronstein [3], Kapitel 2.6.4.3.2, S.209, Gleichung (2.87) und (2.95):

$$\sin\varepsilon = \sin\varphi_p \cdot \sin\gamma$$

$$\cos\gamma = \tan\psi \cdot \cot\varphi_p = \frac{\tan\psi}{\tan\varphi_p} \qquad \Rightarrow \qquad \tan\psi = \cos\gamma \cdot \tan\varphi_p$$

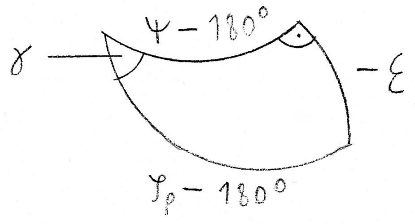
Nun zum Fall $90° \leq \varphi_p \leq 180°$, mit $\varepsilon \geq 0°$:



$\sin\varepsilon = \sin(180° - \varphi_p) \cdot \sin\gamma = \sin\varphi_p \cdot \sin\gamma$

$$\cos\gamma = \frac{\tan(180° - \psi)}{\tan(180° - \varphi_p)} = \frac{-\tan\psi}{-\tan\varphi_p} \qquad \Rightarrow \qquad \tan\psi = \cos\gamma \cdot \tan\varphi_p$$

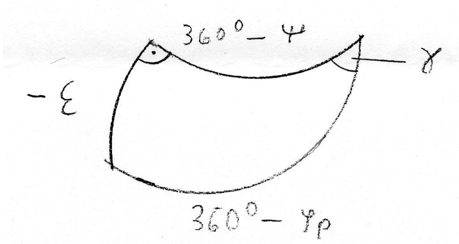
Der Fall $180° \leq \varphi_p \leq 270°$: $\qquad \varepsilon \leq 0°$



$-\sin\varepsilon = \sin(-\varepsilon) = \sin\gamma \cdot \sin(\varphi_p - 180°) = -\sin\gamma \cdot \sin\varphi_p$
$\Rightarrow \qquad \sin\varepsilon = \sin\gamma \cdot \sin\varphi_p$

$$\cos\gamma = \frac{\tan(\psi - 180°)}{\tan(\varphi_p - 180°)} = \frac{\tan\psi}{\tan\varphi_p} \qquad \Rightarrow \qquad \tan\psi = \cos\gamma \cdot \tan\varphi_p$$

Schließlich zum Fall $270° \leq \varphi_p \leq 360°$: $\qquad \varepsilon \leq 0°$



$-\sin\varepsilon = \sin(-\varepsilon) = \sin\gamma \cdot \sin(360° - \varphi_p) = -\sin\gamma \cdot \sin\varphi_p$
$\Rightarrow \qquad \sin\varepsilon = \sin\gamma \cdot \sin\varphi_p$

$$\cos\gamma = \frac{\tan(360° - \psi)}{\tan(360° - \varphi_p)} = \frac{-\tan\psi}{-\tan\varphi_p} \qquad \Rightarrow \qquad \tan\psi = \cos\gamma \cdot \tan\varphi_p$$

Damit ist die Behauptung gezeigt.

Literatur

[1] Martin Barner, Friedrich Flohr „Analysis 1“ 2. Auflage de Gruyter Verlag Berlin 1983

[2] Hans-Jochen Bartsch „Taschenbuch mathematischer Formeln“, 7.-9. Auflage, Verlag Harri Deutsch Thun 1986

[3] I.N. Bronstein, K.A. Semendjajew „Taschenbuch der Mathematik“ Teubner Verlagsgesellschaft Leipzig 1985 22.Auflage

[4] Otto Forster „Analysis 2“, Vieweg Verlag, Braunschweig, 1984, 5.Auflage

[5] Otto Forster „Analysis 3“ 2.Auflage 1983 Vieweg Verlag Braunschweig

[6] Horst Kuchling „Taschenbuch der Physik“ 1979 Verlag Harri Deutsch Frankfurt am Main

[7] Oliver Montenbruck „Grundlagen der Ephemeridenrechnung“ 3.Auflage 1987 Verlag Sterne und Weltraum München

[8] Harald Schröer „Helligkeit und Bewegung“ 2001 Wissenschaft & Technik Verlag Berlin

[9] Hans Heinrich Voigt „Abriß der Astronomie“ 4.Auflage 1988 BI Mannheim

[10] Weigert/Wendker „Astronomie und Astrophysik - ein Grundkurs“ 2.Auflage 1989 VCH Verlagsgesellschaft Weinheim