

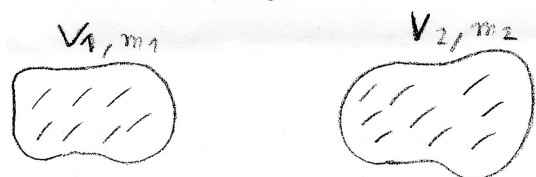
# Gravitationsbeschleunigung bei Rotationsellipsoid, Kugel und allgemeinen Rotationskörper

Harald Schröder

2009

**Abstract:** Die Gravitationsbeschleunigungen auf Planeten, die die Form eines Rotationsellipsoids, einer Kugel und eines allgemeinen Rotationskörpers haben, werden berechnet.

**Key words:** Gravitationsbeschleunigung - Fallbeschleunigung - Schwerefeld - Kugel - Rotationsellipsoid - Rotationskörper - Planet



$m_1, m_2$  sind zwei Massen mit den Volumina  $V_1, V_2$ .

$m_1$  erzeugt eine Gravitationsbeschleunigung  $\vec{g}_1$ , ebenso wird durch  $m_2$  eine Gravitationsbeschleunigung  $\vec{g}_2$  hervorgerufen. Wenn  $G$  die Gravitationskonstante und  $\varphi_1, \varphi_2$  die Dichten von  $m_1$  und  $m_2$  sind, dann können die Beschleunigungen ausgedrückt werden durch:

$$\vec{g}_1(\vec{r}, t) = \int_{V_1(t)} \frac{G\varphi_1(\vec{x}, t)}{|\vec{x} - \vec{r}|^2} \cdot \frac{\vec{x} - \vec{r}}{|\vec{x} - \vec{r}|} d\vec{x} \quad (1)$$

$$\vec{g}_2(\vec{r}, t) = \int_{V_2(t)} \frac{G\varphi_2(\vec{x}, t)}{|\vec{x} - \vec{r}|^2} \cdot \frac{\vec{x} - \vec{r}}{|\vec{x} - \vec{r}|} d\vec{x} \quad (2)$$

$t$  ist dabei die Zeit. Wir haben damit auch den Fall zeitlich veränderlicher Felder eingeschlossen. Nun kommen wir zur Kraft:

$\vec{K}_{1,2}$  = Kraft, mit der  $m_2$  von  $m_1$  angezogen wird.

$\vec{K}_{2,1}$  = Kraft, mit der  $m_1$  von  $m_2$  angezogen wird.

Diese Kräfte können dargestellt werden mit:

$$\vec{K}_{1,2}(t) = \int_{V_2(t)} \vec{g}_1(\vec{x}, t) \cdot \varphi_2(\vec{x}, t) d\vec{x} \quad (3)$$

$$\vec{K}_{2,1}(t) = \int_{V_1(t)} \vec{g}_2(\vec{x}, t) \cdot \varphi_1(\vec{x}, t) d\vec{x} \quad (4)$$

Außerdem muß nach dem 3. Newton-Axiom sein:

$$\vec{K}_{1,2}(t) = -\vec{K}_{2,1}(t) \quad (5)$$

Wir müssen bei den drei letzten Gleichungen allerdings voraussetzen, dass  $m_1$  und  $m_2$  ruhen. Wenn sich diese Massen bewegen, gilt ganz allgemein mit  $\vec{v}$  als Geschwindigkeit:

$$\vec{K} = \frac{d}{dt}(m(t) \cdot \vec{v}(t)) = m(t) \cdot \dot{\vec{v}} + \dot{m} \cdot \vec{v}$$

Die Berechnung wird dann etwas komplizierter.

Wichtige Spezialfälle sind, wenn beide Massen ruhen und  $\vec{g}_1$  im Bereich  $V_2$  bzw.  $\vec{g}_2$  im Bereich  $V_1$  örtlich konstant sind. Dann erhalten wir:

$$\vec{K}_{1,2} \approx m_2(t) \cdot \vec{g}_1(\vec{x}, t) \quad (6)$$

$$\vec{K}_{2,1} \approx m_1(t) \cdot \vec{g}_2(\vec{x}, t) \quad (7)$$

In unseren Fall wird die Masse konstant bleiben, so dass der Term  $\dot{m} \cdot \vec{v}$  nicht mit berücksichtigt werden muß.

In die Gleichungen für die Gravitationsbeschleunigungen kann statt  $\frac{G}{|\vec{x}-\vec{r}|^2}$  auch eine andere geeignete Funktion  $k(\vec{x}-\vec{r})$  eingesetzt werden. Damit kann die Gravitationsbeschleunigung modifiziert werden. In der Himmelsmechanik kann z.B. davon Gebrauch gemacht werden, wenn die Massen als Massenpunkte betrachtet werden.

Berücksichtigt man schließlich noch, dass bei Änderungen von Gravitationsfeldern und bei nicht kugelförmigen Körpern Gravitationswellen ausgestrahlt werden, die sich mit der Lichtgeschwindigkeit  $c$  bewegen, so muss anstatt von  $t$

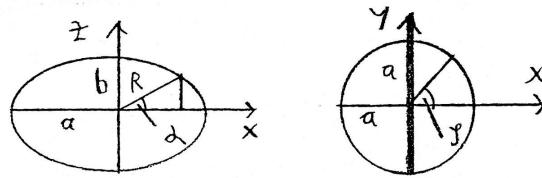
$$t' = t - \frac{|\vec{x} - \vec{r}|}{c}$$

eingesetzt werden. Also bekommen wir  $\varphi_1(\vec{x}, t')$  und  $\varphi_2(\vec{x}, t')$  anstatt von  $\varphi_1(\vec{x}, t)$  und  $\varphi_2(\vec{x}, t)$ . Die Dichten  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$  bleiben natürlich Funktionen von  $\vec{x}$  und  $t$ .

Es werden nun verschiedene Spezialfälle von Rotationskörpern behandelt.

## 1 Rotationsellipsoid

Wir nehmen dafür an, dass der Mittelpunkt des Rotationsellipsoiden im Koordinatenursprung liegt:



$\alpha$  = Breitengrad

$\varphi$  = Längengrad

$a, b$  = große bzw. kleine Halbachse  $a \geq b$

$a, b$  können Funktionen der Zeit  $t$  sein. Wir müssen nun  $R$  als Funktion von  $a, b$  und vom Breitengrad  $\alpha$  ermitteln. Wir ziehen folgende Gleichung heran:

$$x \cdot \tan \alpha = z \quad (8)$$

und die Mittelpunkts Gleichung:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1 \quad (9)$$

Für  $R$  haben wir die Gleichung  $R^2 = x^2 + z^2$ . Eine Gleichsetzung der ersten beiden Gleichungen liefert:

$$b \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} = x \cdot \tan \alpha$$

oder:

$$\left(\frac{b}{a}\right)^2 \cdot (a^2 - x^2) = x^2 \cdot \tan^2 \alpha$$

Wir lösen nun nach  $x^2$  auf:

$$x^2 = \frac{b^2}{\tan^2 \alpha + \frac{b^2}{a^2}} = \frac{b^2 a^2}{a^2 \tan^2 \alpha + b^2}$$

Mit  $R^2 = x^2 + z^2$  und  $z = x \cdot \tan \alpha$  erhalten wir:

$$R^2 = x^2 \cdot (1 + \tan^2 \alpha) = \frac{a^2 b^2}{a^2 \tan^2 \alpha + b^2} \cdot (1 + \tan^2 \alpha)$$

Es gilt:

$$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

Damit kommen wir zu:

$$R^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 \tan^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha + b^2 \cdot \cos^2 \alpha}$$

Die Beziehung  $\tan \alpha \cdot \cos \alpha = \sin \alpha$  führt schließlich zu:

$$R = \frac{ab}{\sqrt{a^2 \sin^2 \alpha + b^2 \cos^2 \alpha}}$$

Mit  $r = R \cdot \cos \alpha$  erhalten wir:

$$r = \frac{\cos \alpha \cdot ab}{\sqrt{a^2 \sin^2 \alpha + b^2 \cos^2 \alpha}}$$

Für  $\vec{X}$  haben wir nun die Darstellung:

$$\vec{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ \tan \alpha \end{pmatrix}$$

Für  $r$  ist dabei die vorige Gleichung einzusetzen.

Wir wollen nun  $b$  in eine etwas andere Form schreiben, dabei verwenden wir die lineare Exzentrizität  $e$  und die numerische Exzentrizität  $\varepsilon$ :

$$e^2 := a^2 - b^2 \quad \varepsilon^2 := \frac{e^2}{a^2}$$

Nun formen wir weiter um:

$$b^2 = a^2 - e^2 = a^2 - a^2 \varepsilon^2 = a^2 \cdot (1 - \varepsilon^2)$$

Daraus folgt:

$$b = a \cdot \sqrt{1 - \varepsilon^2} \quad \varepsilon \leq 1$$

Wenn wir  $b$  in der Form  $b = a \cdot k$  schreiben, dann ist  $k = \sqrt{1 - \varepsilon^2}$ . Wir können dann ein  $\bar{a} \in [0, a]$  und ein  $\bar{b} = \bar{a} \cdot k \in [0, b]$  einführen.

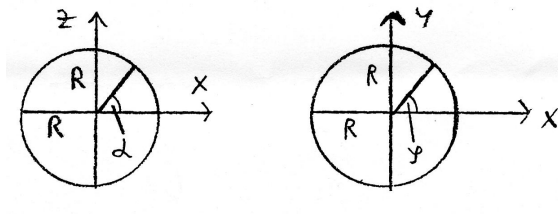
$(\bar{a}, \alpha, \varphi)$  ist ein geeignetes natürliches Koordinatensystem für Rotationsellipsoide. Nun folgt mit  $\bar{a}$  und  $\bar{b} = \bar{a} \cdot k$ :

$$\begin{aligned} \vec{X} &= \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{\cos \alpha \cdot \bar{a} \cdot \bar{a} \cdot k}{\sqrt{\bar{a}^2 \sin^2 \alpha + \bar{a}^2 k^2 \cos^2 \alpha}} \cdot \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ \tan \alpha \end{pmatrix} \\ &= \frac{\cos \alpha \cdot \bar{a} \cdot k}{\sqrt{\sin^2 \alpha + k^2 \cos^2 \alpha}} \cdot \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ \tan \alpha \end{pmatrix} =: \vec{\phi}_1(\bar{a}, \alpha, \varphi) \end{aligned}$$

$\vec{\phi}_1$  stellt die Beziehung  $(\bar{a}, \alpha, \varphi) \longrightarrow (x, y, z)$  dar. Wir definieren noch  $\vec{y}_1 := (\bar{a}, \alpha, \varphi)$ .

## 2 Kugel

Der Mittelpunkt der Kugel soll im Koordinatenursprung sein.



Wir können Kugelkoordinaten einführen:

$$\begin{aligned}\alpha &= \text{Breitengrad} & -\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2} \\ \varphi &= \text{Längengrad} & -\pi \leq \varphi \leq \pi\end{aligned}$$

Der Kugelradius soll  $R(t)$  sein.  $t$  ist wieder die Zeit. Nun nehmen wir ein  $r \in [0, R]$ :

$$\vec{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} \cos \alpha \cos \varphi \\ \cos \alpha \sin \varphi \\ \sin \alpha \end{pmatrix} =: \vec{\phi}_2(r, \alpha, \varphi)$$

Zum vorletzten Vektor vgl. z.B. Bartsch [1] Kapitel 7.2.1 S.265.  $\vec{\phi}_2$  stellt die Beziehung zwischen  $(r, \alpha, \varphi)$  und  $(x, y, z)$  dar.

Nun können wir beim Rotationsellipsoiden und bei der Kugel die Gravitationsbeschleunigung  $\vec{g}$  bestimmen.  $\vec{P}$  gehört zur Oberfläche. Wir verwenden dabei die allgemeine Transformationsformel (vgl. z.B. Forster [2] §13 Satz 2 S.120) aus der mehrdimensionalen Integralrechnung:

$$\begin{aligned}\vec{g}_i(\vec{P}) &= \int_{V_i} \frac{G \varphi_i(\vec{X}, t)}{|\vec{X} - \vec{P}|^2} \cdot \frac{\vec{X} - \vec{P}}{|\vec{X} - \vec{P}|} d\vec{X} \\ &= \int_{U_i} \frac{G \cdot (\vec{\phi}_i(\vec{y}_i) - \vec{P})}{|\vec{\phi}_i(\vec{y}_i) - \vec{P}|^3} \cdot \varphi_i(\vec{\phi}_i(\vec{y}_i), t) \cdot |\det D\vec{\phi}_i(\vec{y}_i)| d\vec{y}_i\end{aligned}$$

Dabei ist  $D\vec{\phi}_i$  die Jakobi-Matrix von  $\vec{\phi}_i$  und  $V_i = \vec{\phi}_i(U_i)$ .  $i = 1$  ist für den Rotationsellipsoiden und  $i = 2$  für die Kugel. Außerdem sind  $\vec{y}_1 = (\bar{a}, \alpha, \varphi)$  und  $\vec{y}_2 = (r, \alpha, \varphi)$  definiert. Bezeichnen wir die Funktion unter den letzten Integralzeichen mit  $\vec{h}_i(\vec{y}_i, t)$ , so erhalten wir mit  $(\bar{a}, \alpha, \varphi) \in U_1 = [0, a] \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \times [0, 2\pi]$  für den Rotationsellipsoiden an der Oberfläche:

$$\vec{g}_1(\vec{P}) = \int_0^a \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \vec{h}_1(\bar{a}, \alpha, \varphi, t) d\varphi d\alpha d\bar{a} \quad \text{mit} \quad \vec{P} := \vec{\phi}_1(a, \alpha, \varphi)$$

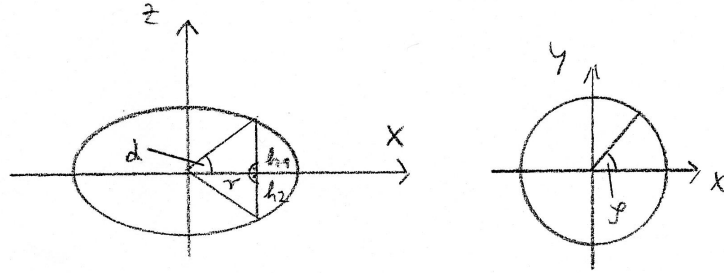
Für die Kugel ergibt sich mit  $(r, \alpha, \varphi) \in U_2 = [0, R] \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \times [-\pi, \pi]$  an der Oberfläche:

$$\vec{g}_2(\vec{P}) = \int_0^R \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{-\pi}^{\pi} \vec{h}_2(r, \alpha, \varphi, t) d\varphi d\alpha dr \quad \text{mit} \quad \vec{P} := \vec{\phi}_2(R, \alpha, \varphi)$$

Wir haben in beiden Fällen 3-dimensionale Integrale. Natürlich kann man mit dem Integral für den Rotationsellipsoiden auch den Fall der Kugel behandeln. Allerdings wird das zweite Integral etwas einfacher bei der konkreten Berechnung sein.

### 3 Das natürliche Koordinatensystem des allgemeinen Rotationskörpers

Wir wollen nun auch für den allgemeinen Rotationskörper naheliegende natürliche Koordinaten einführen:



$\alpha$  = Breitengrad

$\varphi$  = Längengrad

Wir stellen den Vektor  $\vec{X}$  dar mit:

$$\vec{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \\ h_1(r) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \\ r \tan \alpha \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ \tan \alpha \end{pmatrix} =: \vec{\phi}_3(r, \alpha, \varphi)$$

für  $z \geq 0$ ,  $\alpha \geq 0$  und  $r \in [0, r_0]$

$$\vec{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \\ -h_2(r) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \\ r \tan \alpha \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ \tan \alpha \end{pmatrix} =: \vec{\phi}_4(r, \alpha, \varphi)$$

für  $z \leq 0$ ,  $\alpha \leq 0$  und  $r \in [0, r_0]$

Dabei ist  $r_0$  der Äquatorradius des Rotationskörpers.  $(r, \alpha, \varphi)$  sind die gewünschten natürlichen Koordinaten des Rotationskörpers. Die Gravitationsbeschleunigung können wir dann ausdrücken mit der allgemeinen Transformationsformel (vgl. z.B. Forster [2], §13, Satz 2, S.120):

$$\begin{aligned} \vec{g}(\vec{P}) &= \sum_{i=3}^4 \int_{V_i} \frac{G \varphi_i(\vec{X}, t)}{|\vec{X} - \vec{P}|^2} \cdot \frac{\vec{X} - \vec{P}}{|\vec{X} - \vec{P}|} d\vec{X} \\ &= \sum_{i=3}^4 \int_{U_i} \frac{G \cdot (\vec{\phi}_i(\vec{y}_i) - \vec{P})}{|\vec{\phi}_i(\vec{y}_i) - \vec{P}|^3} \cdot \varphi_i(\vec{\phi}_i(\vec{y}_i), t) \cdot |\det D\vec{\phi}_i(\vec{y}_i)| d\vec{y}_i \end{aligned}$$

Dabei ist  $V_i = \vec{\phi}_i(U_i)$ .  $i = 3$  ist für den nördlichen Teil und  $i = 4$  für den südlichen Teil des Rotationskörpers. Außerdem sind  $\vec{y}_3 = (r, \alpha, \varphi)$  und  $\vec{y}_4 = (r, \alpha, \varphi)$  definiert. Bezeichnen wir die Funktion unter dem letzten Integralzeichen

mit  $\vec{h}_i(\vec{y}_i, t)$ , so erhalten wir mit  $(r, \alpha, \varphi) \in U_3 = [0, r_0] \times [0, \frac{\pi}{2}] \times [0, 2\pi]$  bzw.  $U_4 = [0, r_0] \times [-\frac{\pi}{2}, 0] \times [0, 2\pi]$ :

$$\vec{g}(\vec{P}) = \int_0^{r_0} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \vec{h}_3(r, \alpha, \varphi, t) d\varphi d\alpha dr + \int_0^{r_0} \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \int_0^{2\pi} \vec{h}_4(r, \alpha, \varphi, t) d\varphi d\alpha dr$$

Mit  $\vec{P} := \vec{\phi}_3(r_0, \alpha, \varphi)$  falls  $\alpha \geq 0$  und  $\vec{P} := \vec{\phi}_4(r_0, \alpha, \varphi)$  falls  $\alpha \leq 0$ .

Also haben wir hier eine Summe von 3-dimensionalen Integralen.

Solche Fallbeschleunigungen werden bei Schröder [3] Kapitel 5 zur Berechnung der Gesamtbeschleunigung und der visuellen Vertikale verwendet.

## Literatur

- [1] Hans-Jochen Bartsch „Taschenbuch mathematischer Formeln“, Verlag Harri Deutsch, Frankfurt am Main, 7.-9. Auflage 1986
- [2] Otto Forster „Analysis 3“, Vieweg Verlag, Braunschweig, 2. Auflage 1983
- [3] Harald Schröder „Orientierungstheorie - Die visuelle Vertikale“, Wissenschaft & Technik Verlag, Berlin, 2002