Deutscher Volkshochschul-Verband

DVV-Rahmencurricula kompakt

Prozentrechnen

Unterrichtskonzepte

Heft 4

Vorwort

Laut PIAAC-Studie konnten im Jahr 2012 4,5 Prozent der Erwachsenen in Deutschland (das entspricht ca. 3,1 Millionen Personen) bestenfalls sehr einfache Aufgaben lösen, bei denen nur basale Verfahren wie Zählen, Sortieren und Rechnen mit ganzen Zahlen angewandt werden mussten.[1] Weitere 13,9 Prozent der Erwachsenen (ca. 9,57 Millionen Personen) können lediglich einfache Aufgaben mit elementaren mathematischen Verfahren lösen.[2] Am Arbeitsplatz, bei der Kontrolle des privaten Budgets und sogar beim Einkaufen ist aber oft mehr mathematischer Durchblick gefordert.

Viele Erwachsene können gar nicht oder nur sehr schlecht rechnen, weil sie nie verstanden haben, wie das Rechnen funktioniert. Rechenunterricht in der Grundbildung muss dieses Verständnis Schritt für Schritt aufbauen. Das erfordert Methoden, die aus fundierten Erkenntnissen darüber abgeleitet sind, wie Menschen rechnen lernen.

Das DVV-Rahmencurriculum Rechnen[3] geht von aktuellen Erkenntnissen der Mathematikdidaktik über das Rechnenlernen aus. Es liefert eine systematische Grundlage für elementare Rechenkurse in Weiterbildungseinrichtungen. Lehrkräfte, die das Rahmencurriculum nutzen, erfahren, warum manche Erwachsene an einfachen Rechenoperationen scheitern und wie solche Schwierigkeiten im elementaren Rechnen überwunden werden können.

Das DVV-Rahmencurriculum Rechnen umfasst drei Stufen. Beginnend mit dem Übergang vom Zählen zum Rechnen über das Verständnis des Stellenwertsystems bis zur Prozentrechnung werden Lernziele definiert. Zu allen drei Stufen stehen Unterrichtskonzepte zur Verfügung, an denen Lehrkräfte sich orientieren können. Alle Materialien sind unter www.grundbildung.de verfügbar.

Im vorliegenden Heft finden Sie ein Unterrichtskonzept zur Einführung der Prozentrechnung bei Erwachsenen, denen das Rechnen schwerfällt (Praxismaterial zum DVV-Rahmencurriculum Rechnen, Kap. 17). Der erste Teil des Unterrichtskonzepts zeigt, wie das Prinzip der Prozentrechnung vermittelt werden kann, der zweite Teil ist anwendungsbezogen.

[1] Beispielaufgabe für dieses Niveau: „[…] [Es] werden vier Preisschilder eines Supermarkts gezeigt. Diese zeichnen das Produkt, den Kilopreis, das Nettogewicht, das Verpackungsdatum und den Gesamtpreis aus. Die Person soll den Artikel bestimmen, der zuerst verpackt wurde, indem sie die Datumsangaben auf den Preisschildern vergleichen.“ Rammstedt, B. (Hrsg.). (2013), Grundlegende Kompetenzen Erwachsener im internationalen Vergleich: Ergebnisse von PIAAC 2012. Münster: Waxmann. http://nbn-resolving.de/urn:nbn:de:0168-ssoar-360687, S. 53

[2] Beispielaufgabe für dieses Niveau: „[…] [E]in Foto von einer Packung mit Teelichtern [wird] gezeigt. Die Verpackung bezeichnet das Produkt (Teelichter), die Anzahl der in der Packung enthaltenen Teelichter und das Gewicht. Obwohl die Verpackung die oberste Schicht teilweise verdeckt, ist zu erkennen, dass die Teelichter in fünf Reihen mit jeweils sieben Teelichtern angeordnet sind. Die Aufgabenstellung gibt an, dass sich in dieser Packung 105 Teelichter befinden. Die Person soll berechnen, in wie vielen Schichten die Teelichter in der Packung verpackt sind.“ Ebd.

[3] Federführender Autor: Prof. Dr. Wolfram Meyerhöfer.

Impressum

Herausgeber:
Projekt „Praxistransfer der DVV-Rahmencurricula Lesen, Schreiben und Rechnen“
Deutscher Volkshochschul-Verband e. V.
Obere Wilhelmstr. 32
53225 Bonn

info@dvv-vhs.de
www.volkshochschule.de

Verantwortlich:
Ulrich Aengenvoort, Verbandsdirektor

Autor*innen:
Dagmar Grütte
Cornelia Weilke
unter Mitarbeit von Wolfram Meyerhöfer

Redaktion:
Dr. Angela Rustemeyer
Annegret Ernst
Gisela Lorenz
Stefan Markov

Druck:
SZ-Druck & Verlagsservice

Layout / Satz:
Gestaltung und Satz: zweiband.media GmbH
Aufbereitung Themenheft: designförster, Peggy Förster

1. Auflage 2019

Bibliographische Information der Deutschen Nationalbibliothek
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.de abrufbar.

ISBN 978-3-942755-88-7

Inhalt

17 TEILE, BRÜCHE UND PROZENTSÄTZE 4
(Dagmar Grütte und Cornelia Weilke unter Mitarbeit von Wolfram Meyerhöfer)

I Was soll in diesem Themenbereich verstanden bzw. routinisiert werden? 4
II Welche Verständnisschwierigkeiten treten typischerweise auf? 5
III An welche Themenbereiche knüpft dieses Unterrichtskonzept direkt an? 6
IV Wo finden sich didaktische Erläuterungen? 6
V Welche Materialien werden benötigt? 6

17.1 Teile 7
(Dagmar Grütte unter Mitarbeit von Wolfram Meyerhöfer)

17.1.1 Vortrag – Teile von Zahlen 7
17.1.2 Kursgespräch und Aufgabenblätter – Teile von 30 und von 100 11
17.1.3 Vortrag – Ausblick 16

17.4 Prozentsätze 17
(Dagmar Grütte unter Mitarbeit von Wolfram Meyerhöfer)

17.4.1 Vortrag und Aufgabenblatt – Vom Hundertstel zu Prozentsätzen 17
17.4.2 Spiel – Prozentsätze-Mau-Mau 22
17.4.3 Vortrag und Aufgabenblatt – Grundwert, Prozentwert und Prozentsatz 23

17.5 Prozente im Alltag 34
(Cornelia Weilke unter Mitarbeit von Wolfram Meyerhöfer)

17.5.1 Kursgespräch – Von der Theorie zur Praxis 35
17.5.2 Mathekonferenz und Kursgespräch – Prozentwert bestimmen 36
17.5.3 Vortrag – Verallgemeinerung und Transfer 47
17.5.4 Mathekonferenz und Kursgespräch – Prozentsatz bestimmen 50
17.5.5 Vortrag – Die Summe aller Teile ist das Ganze 55
17.5.6 Mathekonferenz und Kursgespräch – Grundwert für bequeme Prozentsätze 57
17.5.7 Vortrag und Kursgespräch – Formel zur Bestimmung des Grundwertes 62
17.5.8 Mathekonferenz – Grundwert für nicht bequeme Prozentsätze bestimmen 64
17.5.9 Vortrag – Vermehrte und verminderte Grundwerte 66
17.5.10 Mathekonferenz – Den vermehrten Grundwert bestimmen 67
17.5.11 Mathekonferenz – Den verminderten Grundwert bestimmen 70
17.5.12 Mathekonferenz – Prozentsatz bei vermehrtem Grundwert bestimmen 73

17 TEILE, BRÜCHE UND PROZENTSÄTZE

(Dagmar Grütte und Cornelia Weilke unter Mitarbeit von Wolfram Meyerhöfer)

I Was soll in diesem Themenbereich verstanden bzw. routinisiert werden?

Für dieses Kapitel passt der Untertitel *Auf zur Prozentrechnung*. Es gibt einige Meilensteine, die die Teilnehmer*innen meistern sollten, um mit Prozenten rechnerisch sicher und verständig umgehen zu können. Dazu gehört vor allem, sich zu erschließen, worum es bei Prozentrechnungen geht. Als Meilensteine auf dem Weg zu einem solchen Verständnis können die Themen Teile, Brüche, Dezimalbrüche, Prozentsätze und deren Zusammenhänge angesehen werden.

Diese Themen bilden Schwerpunkte der ersten Unterkapitel. Allen drei Themen gemeinsam ist, dass Teile von einem Ganzen ermittelt werden oder umgekehrt von den Teilen auf das Ganze geschlossen wird. Der spezifische Charakter der Bruchzahlen sowie das Bruchrechnen werden in diesem Kapitel nicht eingeführt. Hier werden Bruchzahlen nur insoweit in den Blick genommen, wie es zur Erarbeitung eines Verständnisses der Prozentrechnung angemessen erscheint.

Teile einer Menge, einer Zahl oder einer Größe (Maßeinheit) können durch Summen oder durch Quotienten, Bruchzahlen oder Prozentsätze ausgedrückt bzw. dargestellt werden. Diese Größen sind ineinander umwandelbar. Den Teilnehmer*innen soll klar werden, dass diese nur jeweils anders ausgedrückt werden.

Beispiel für „die Hälfte von 30“:

- als Division durch 2: $30 : 2 = 15$
- als gleich große Zerlegung: $30 = 15 + 15$ oder $30 - 15 = 15$
- als Bruch: $\frac{1}{2} \cdot 30 = \frac{30}{2} = \frac{15}{1} = 15$ oder $0{,}5 \cdot 30 = 15$
- oder in Prozent: 50 % von 30 sind 15

In der Prozentrechnung werden rechnerische Bezüge von Teilen zu einem Ganzen oder umgekehrt von einem Ganzen zu seinen Teilen hergestellt. Dabei wird in Prozent ausgedrückt, in welchem Verhältnis ein Teil zum Ganzen, das 100 Prozent entspricht, steht. Das ist der sogenannte Prozentsatz. Das Ganze und die Teile werden auf 100 bezogen. Daher stammt auch die italienische bzw. lateinische Bedeutung des Wortes Prozent: von Hundert oder Hundertstel.

Prozentangaben begegnen den Teilnehmer*innen häufig in ihrem Alltag. Prozente werden in Diagrammen oder Zeitungsartikeln verwendet. Wenn beispielsweise die Bevölkerung einer Stadt wächst oder auch abnimmt, wenn Kosten steigen oder sinken, wird das in Prozenten angegeben. Bankgeschäfte werden über Zinsen abgewickelt, deren Geldwerte über Prozente ermittelt werden.

Wenn es den Teilnehmer*innen gelingt, Bezüge zwischen Teilen, Brüchen und Prozentsätzen herzustellen, erweitert sich ihr Zahlverständnis immens. Der Zahlbereich der natürlichen Zahlen wird um den Zahlbereich der gebrochenen Zahlen erweitert. Es erschließen sich Kommazahlen und einfache Rechenwege.

Beispiel für „25 % von 2.000 Euro“:

- 2.000 Euro mit 0,25 bzw. 25/100 multiplizieren
- 2.000 Euro durch vier teilen

Beispiel für „Zehn Prozent von 3.456“:

- durch zehn teilen

Um Prozente zu berechnen, haben sich zwei Grundverfahren etabliert:
1. Die Anwendung von Zuordnungen und des damit verbundenen sogenannten Dreisatzes.
2. Über den Zusammenhang *Grundwert · Prozentsatz = Prozentwert.*
   (Der Wert des Prozentsatzes wird als Hundertstel angegeben oder mit dem Prozentzeichen versehen.)

Beide Verfahren werden erläutert sowie deren Vor- und Nachteile abgewogen. Mithilfe vielfältiger Beispielaufgaben aus dem Alltag lernen die Teilnehmer*innen, Routine zu entwickeln, um Prozentrechnungen durchzuführen.

II Welche Verständnisschwierigkeiten treten typischerweise auf?

- Sich die Zusammenhänge zwischen den oben genannten Meilensteinen – Teile, Brüche und Prozentsätze – zu erschließen, stellt eine große Herausforderung an das Abstraktionsvermögen der Teilnehmer*innen dar.
- Prozentrechnungen können über Formeln durchgeführt werden. Die Fehlerquote steigt dabei aber, sobald die Aufgabenstellung von den gewohnten Routinen abweicht. Um Formeln richtig anwenden zu können, muss identifiziert werden, welche Zahlen zu welchen Symbolen/Formelbestandteilen gehören, und es muss der Sachverhalt mit seinen rechnerischen Zusammenhängen analysiert werden. Aus einer Sachsituation zu ermitteln, was das Ganze und was die Teile sind, scheint im Vergleich zum Arbeiten mit Formeln der erfolgversprechendere Weg zu sein.
- Die Rechenoperationen Multiplikation und Division sind wesentliche Grundlagen für das Verständnis rechnerischer Zusammenhänge der Prozentrechnung.
- Eine weitere Herausforderung besteht darin, zu erkennen, für welche Werte welche Zahlen in Dezimalzahlen (Zahlen in der Kommaschreibweise) stehen. Es ist zum Beispiel irritierend, dass die erste Zahl nach dem Komma für Zehntel steht, die Zweite für Hundertstel, dass dabei aber die Zehntel einen größeren Wert als die Hundertstel haben. Eigentlich ist zehn doch viel weniger als hundert. Warum verhält sich das bei Bruchzahlen genau entgegengesetzt? Zehntel sind größer als Hundertstel.
- Ein weit verbreitetes Missverständnis ist es auch, das Komma als eine Art Trennzeichen zwischen zwei natürlichen Zahlen anzusehen. Man glaubt dann, dass 0,7 kleiner sei als 0,18, weil ja 7 < 18 ist.
- Oftmals trifft man auch auf die Vorstellung, dass das Komma ein Symmetriezeichen ist. Hier besteht der Glaube, dass rechts vom Komma „Eintel“ stehen, rechts davon Zehntel und rechts davon Hundertstel. Mit 35 % = 35 Hundertstel entsteht der Fehlschluss, dass 35 % = 0,035 ist. Wenn mit dieser Fehlannahme weitergerechnet wird, entstehen Resultate, die um den Faktor Zehn falsch sind.

Um Aufgaben der Prozentrechnung zu lösen bzw. die ermittelten Werte zu interpretieren, sehen Teilnehmer*innen häufig eine hohe Barriere vor sich. Neben dem rechnerischen Erarbeiten der Zusammenhänge gilt es, diesen Lern- und Verstehensprozess psychologisch einfühlsam und motivierend zu begleiten. Im Selbstkonzept einiger Teilnehmer*innen ist manifestiert, dass sie die Prozentrechnung niemals verstehen werden.

III An welche Themenbereiche knüpft dieses Unterrichtskonzept direkt an?

- Meyerhöfer, Wolfram; Guther, Alina; Grütte, Dagmar; Weilke, Cornelia (2017): DVV-Rahmencurriculum Rechnen: Praxismaterial. Erarbeitet im Auftrag des Deutschen Volkshochschul-Verbandes e. V. Bonn.
  > Kapitel 2 – Kardinaler Zahlbegriff
  > Kapitel 5 – Zahlzerlegungen
  > Kapitel 9 – Zahlbereich der natürlichen Zahlen und Stellenwertsysteme
  > Kapitel 13 – Rechenoperation Multiplikation und Division

IV Wo finden sich didaktische Erläuterungen?

- Meyerhöfer, Wolfram; Hartmann, Christian; Jahnke, Thomas; Wollring, Bernd (2017): DVV-Rahmencurriculum Rechnen. Erarbeitet im Auftrag des Deutschen Volkshochschul-Verbandes e. V. Bonn.
  > Stufe 2 – Division, S. 110 ff.
  > Stufe 3 – Ziele und Prinzipien, S. 125 ff.
  > Stufe 3 – Mathematik fürs Leben, S. 135 ff.

www.grundbildung.de/unterricht

V Welche Materialien werden benötigt?

Laptop mit PowerPoint und Beamer

Zahlbereich					Rechenoperationen					Grundlagen				
bis 30	bis 100	bis 1.000	größer 1.000	Brüche	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Prozent-rechnen	Zahlen	Mengen	Ganzes / Teile	Dezimal-system	**Alltag**

Schlagwörter: Addition · Das Ganze · Die Teile · Division · Kursgespräch · Mengen · Multiplikation · Subtraktion · Vortrag · Zahlzerlegung · Zahlen bis 100

17.1 Teile (Dagmar Grütte unter Mitarbeit von Wolfram Meyerhöfer)

Exploration

Eine Menge kann geteilt werden und entsprechend kann auch eine Zahl geteilt werden. Das, was mit *Teilen* gemeint ist, muss jedoch präzisiert werden. Die Teile, in die ein Ganzes geteilt wird, können unterschiedlich groß sein.

Beispiel für Zahlzerlegungen:

Die 27 kann in 7 und 20 zerlegt werden. Die 7 und die 20 sind Teile des Ganzen, der 27.
Die Teile können jedoch auch gleich groß sein. Zum Beispiel, wenn die 27 in drei gleich große Teile geteilt (zerlegt) wird. Die 27 kann in drei Neuner geteilt werden.

Wenn Zahlen in gleich große Zahlen geteilt werden, dann wird vom Dividieren oder der Division gesprochen.

Beispiel:

Die 30 kann in fünf gleich große Teile zerlegt werden, in fünf Sechser. 30 dividiert durch fünf ist sechs: 30 : 5 = 6. Dabei wurde die 30 gefünftelt – in fünf Teile geteilt. Und eines dieser Fünftel ist sechs.
Zwei dieser Fünftel sind zwölf … Anders ausgedrückt, der fünfte Teil von 30 ist sechs.

Zahlen können auch in gleich große Zahlen mit einem Rest dividiert werden:
So ist 31 geteilt durch fünf ebenfalls 6, jedoch bleibt der Rest 1.

17.1.1 Vortrag – Teile von Zahlen

Exploration

Die Kursleitung stellt Bezüge zum Begriff *Teile* her: Natürliche Zahlen können zerlegt werden – ein Gesamtes oder ein Ganzes wird in Teile zerlegt. Zum einen können die Teile addiert werden und ergeben das Ganze. Umgekehrt kann von dem Ganzen ein Teil subtrahiert werden, dann bleibt das andere Teil übrig.
Hier wird Vorwissen zur *Rechenoperation Division* mit deren Zusammenhängen zu den anderen Rechenoperationen vorausgesetzt. *Dividieren* heißt, das Ganze in *gleich große Teile* zu zerlegen. Werden diese gleich großen Teile wiederum zum Ganzen zusammengefasst, wird multipliziert oder addiert.
Diese Wiederholungen sollen zu der Fragestellung führen, ob alle natürlichen Zahlen in gleich große Teile geteilt werden können. Das ist nicht für alle natürlichen Zahlen möglich. Bei einigen dieser Teilungsoperationen bleibt ein Rest. Das leitet zum Zahlbereich der gebrochenen Zahlen über. Hier können alle Zahlen in gleich große Teile zerlegt werden.

Durchführung und didaktische Hinweise

Die Kursleitung beginnt den Unterricht mit einem einführenden Vortrag:

Heute möchte ich mit Ihnen über Zahlen und ihre Teile diskutieren. Zahlen können in Teile zerlegt werden. Oder anders formuliert, in Zahlen sind andere Zahlen (Teile) enthalten.
Am Beispiel der 27 möchte ich Ihnen zunächst zwei Versionen darstellen, nämlich eine beliebige Zahlzerlegung und eine Zahlzerlegung in gleich große Teile.
Zunächst betrachten wir eine beliebige Zahlzerlegung:

27

20 **7**

Es gilt: 20 + 7 = 27 oder 7 + 20 = 27
27 – 7 = 20 oder 27 – 20 = 7
27 – 20 – 7 = 0

In der 27 sind beispielsweise 20 und 7 enthalten. Beide Teile können wieder zu dem Ganzen/Gesamten zusammengefügt werden. Das wird durch die Rechenoperation der Addition dargestellt: 20 + 7 = 27 oder 7 + 20 = 27. Beide Summanden sind vertauschbar. Es gilt weiterhin, wenn von dem Ganzen ein Teil weggenommen wird, bleibt der andere Teil übrig: 27 – 7 = 20 oder 27 – 20 = 7. Werden von der 27 beide Teile subtrahiert, führt das zur Null. Diese rechnerischen Zusammenhänge gelten universell. Das heißt, alle natürlichen Zahlen können zerlegt werden.

Ganzes G — Das Ganze

Teil A **Teil B** — Die Teile

Es gilt: A + B = G oder B + A = G
G – A = B oder G – B = A
G – A – B = 0

Wenn wir das Ganze mit G bezeichnen, kann das zum Beispiel in die Teile A und B zerlegt werden – wie in dem oberen Beispiel die 27 als Ganzes in die Teile 20 und 7.
Dabei gilt der allgemeine Zusammenhang, dass die Teile A und B wieder zu dem Ganzen zusammengefügt werden können, und wir können dafür notieren: A + B = G oder B + A = G. Von dem Ganzen kann auch jeweils ein Teil entfernt werden und der andere Teil bleibt übrig. Dafür kann allgemein G – A = B bzw. G – B = A notiert werden. Werden vom Ganzen beide Teile abgezogen ergibt das null.
Betrachten wir nun die Zerlegung von Zahlen in ***gleich große*** *Teile.*
Wird eine Zahl in ***gleich große*** *Teile zerlegt/geteilt, dann wird davon gesprochen, dass die Zahl dividiert wird. Zum Beispiel kann die 27 in drei gleich große Teile geteilt werden.*

27

9 9 9

Es gilt: 27 : 3 = 9 und 3 · 9 = 27
oder 9 + 9 + 9 = 27
oder 27 – 9 – 9 – 9 = 0
9 ist ein Drittel von 27 – der dritte Teil

Es gilt: 27 : 3 = 9. Wenn etwas in drei Teile geteilt wird, wird „gedreiteilt“. Das hat sich sprachlich zu ***gedrittelt*** *eingeschliffen. Das Wort Drittel bedeutet, dass der dritte Teil gemeint ist. Ein Drittel von 27 ist also neun.*
In der 27 ist die 9 dreimal enthalten: 3 · 9 = 27. Die einzelnen Teile 9 können auch zur 27 zusammengefügt werden: 9 + 9 + 9 = 27. Entsprechend können Teile vom Gesamten/Ganzen abgezogen werden: 27 – 9 – 9 – 9 = 0.
Ich möchte Ihnen anhand der Mengendarstellungen die beiden oben erläuterten Versionen der Teile der 27 zeigen. Zunächst die Aufteilung in 20 und 7:

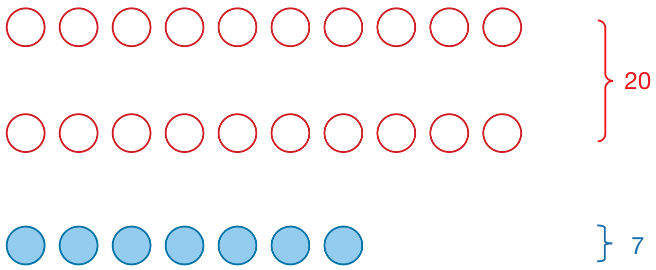


Abbildung 17.1-1: Mengendarstellung der Zahlzerlegung der 27 in 20 und 7

Von insgesamt 27 Kreisen sind in der Abbildung 20 ungefüllte und 7 gefüllte Kreise zu sehen. In dem Ganzen von 27 Kreisen sind also die Teile 20 ungefüllte Kreise und 7 gefüllte Kreise enthalten.

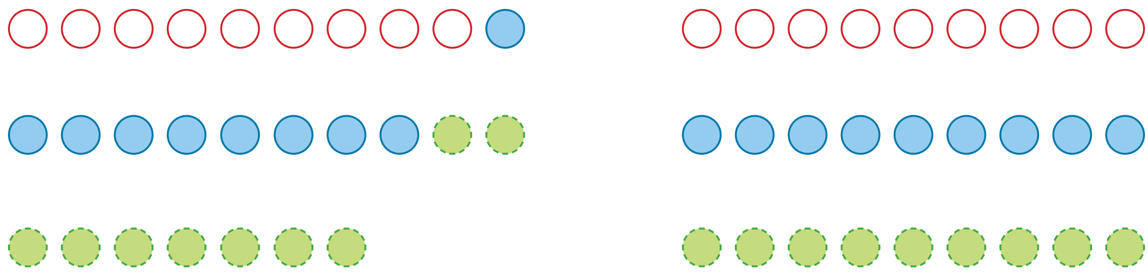


Abbildung 17.1-2: Mengendarstellung 27 in drei gleich große Teile geteilt – unterschiedliche Anordnungen

Nun die Aufteilung in drei gleich große Teile:
Die 27 Kreise sind in der linken und rechten Darstellung unterschiedlich angeordnet. Links sind sie wie in der vorangegangenen Abbildung in Zehnerreihen angeordnet. Diese Abbildung ist angelehnt an die Zehnerstruktur (dekadische Struktur) unseres Zahlsystems. Allerdings können Sie hier nicht gut erkennen, dass es sich hierbei um drei gleich große Teile handelt. In der rechten Abbildung wurden lediglich die Kreise so verschoben, dass deutlich wird, dass die 27 in drei gleich große Teile geteilt wurde: ein gefülltes, ein ungefülltes, ein gestricheltes Drittel mit jeweils neun Kreisen.

17.1.2 Kursgespräch und Aufgabenblätter – Teile von 30 und von 100

Exploration

Die Teilnehmer*innen überprüfen ihren Wissensstand bezogen auf die Inhalte des vorangegangenen Vortrages. Wenn beispielsweise die 100 in zwei *gleich große* Teile zerlegt wird, ist das gleichbedeutend mit der Division durch zwei. Die beiden gleich großen Teile sind jeweils 50. Die Hundert wird halbiert (eigentlich gezweiteilt). Eine Hälfte der 100 ist 50. Es geht darum, mit diesen Zahlzerlegungen in gleich große Teile, einschließlich der zugehörigen Formulierungen, den Bezug zu Brüchen vorzubereiten und außerdem die wichtige Zahl 100 – das Fundament der Prozentrechnung – sicher zerlegen zu können.

Durchführung und didaktische Hinweise

AUFGABENBLÄTTER 17.1a und 17.1b

Die Kursleitung bittet die Teilnehmer*innen, zunächst gemeinsam im Unterricht die **Aufgabenblätter 17.1a** *Teile von 30 und* **17.1b** *Teile von 100* zu bearbeiten. Ob beide Aufgabenblätter bearbeitet werden können, hängt von der zur Verfügung stehenden Zeit ab. Lösungen des Aufgabenblattes 17.1b können direkt auf die Prozentrechnung übertragen werden. Deswegen ist diesem die Priorität zu geben.

Je nach vorhandener Zeit und in Abhängigkeit vom Lerntempo der Teilnehmer*innen werden die angegebenen Möglichkeiten, Teile der 30 und der 100 zu ermitteln, im Kurs besprochen oder von den Teilnehmer*innen selbstständig als Hausaufgabe bearbeitet.
Erfahrungsgemäß ist der Lernstand der Teilnehmer*innen sehr unterschiedlich. Die Aufgaben sind als Wiederholung gedacht und können im Schwierigkeitsgrad variiert werden.
Zahlzerlegungen der 30 oder 100 in nicht gleich große Teile sollten die Teilnehmer*innen beherrschen. Hierbei könnte der Fokus auf Zerlegungen wie 17 und 13 bei 30 oder 71 und 29 bei 100 gerichtet werden, um sich dabei erneut die rechnerischen Zusammenhänge und Zahlbeziehungen zu verdeutlichen. Mit wenig herausfordernden Zerlegungen wie die der 30 in 10 und 20 bzw. die der 100 in 40 und 60 sollten die Teilnehmer*innen sich nicht zufrieden geben.
Sich damit zu beschäftigen, welche Möglichkeiten es gibt, die 30 oder 100 in gleich große Teile zu zerlegen, erfordert ein gutes Verständnis der Rechenoperation der Division.
Zahlbeziehungswissen ist eine weitere Voraussetzung, um Prozentrechnungen zu verstehen.
Der Schwerpunkt der gemeinsamen Bearbeitung im Unterricht sollte besonders auf die Ermittlung der Teile von 100 gelegt werden, um später direkte Bezüge zur Prozentrechnung herstellen zu können.

Wenn die Aufgabenblätter gemeinsam im Unterricht bearbeitet werden, könnte die Kursleitung folgende einleitende Gedanken formulieren:

> *Gemeinsam möchte ich mit Ihnen das eben Gesagte auf die Zahlen 30 und 100 übertragen. Es geht darum, Teile der 30 (siehe* **Aufgabenblatt 17.1a***) oder der 100 (siehe* **Aufgabenblatt 17.1b***) zu ermitteln – zunächst Teile, die nicht gleich groß sind, und danach Teile, die gleich groß sind. Dabei überlegen wir uns, welche Formulierungen wir für den jeweiligen Prozess des Teilens finden können.*
> *Bitte notieren Sie die Lösungen, einschließlich der Rechnungen und Formulierungen, auf den zugehörigen Aufgabenblättern.*
> *Es gibt viele Möglichkeiten, die 30 (oder 100) in* ***nicht*** *gleich große Teile zu zerlegen. Auf den Aufgabenblättern 17.1a bzw. b wurde die 30 in 20 und 10 bzw. die 100 in 60 und 40 zerlegt. Die passenden Additions- und Subtraktionsaufgaben sind angegeben. Dabei gilt allgemein, dass beide Teile zum Gesamten zusammengefügt werden können (Addition) bzw. vom Gesamten ein Teil entnommen werden kann und der andere Teil übrig bleibt (Subtraktion).*

30

20 **10**

Rechenoperationen: 20 + 10 = 30 oder 10 + 20 = 30
30 – 10 = 20 oder 30 – 20 = 10

100

60 **40**

Rechenoperationen: 60 + 40 = 100 oder 40 + 60 = 100
100 – 40 = 60 oder 100 – 60 = 40

Die 30 kann aber auch beispielsweise in die 17 und 13 bzw. die 100 in die 71 und 29 zerlegt werden. Es gelten folgende rechnerischen Zusammenhänge:

30

17 **13**

Rechenoperationen: 17 + 13 = 30 oder 13 + 17 = 30
30 – 13 = 17 oder 30 – 17 = 13

100

71 **29**

Rechenoperationen: 71 + 29 = 100 oder 29 + 71 = 100
100 – 29 = 71 oder 100 – 71 = 29

Auf den Aufgabenblättern ist Platz, um jeweils zwei weitere Beispiele einzufügen, wie die 30 bzw. die 100 in nicht **gleich** große Teile zerlegt werden können. Fragen der Kursleitung könnten sein:

In welche weiteren nicht gleich großen Teile kann die 30 (oder 100) zerlegt werden? Wie lautet der rechnerische Zusammenhang zwischen dem Ganzen und den Teilen? Formulieren Sie Additions- und Subtraktionsaufgaben.

AUFGABENBLÄTTER 17.1a und 17.1b

Im zweiten Teil der **Aufgabenblätter 17.1a** und **17.1b** geht es darum, die 30 bzw. die 100 in **gleich** große Teile zu zerlegen.

*Um die 30 bzw. die 100 in **gleich** große Teile zu teilen, sind auf den Aufgabenblättern folgende Beispiele angegeben:*

30

6 6 6 6 6

Rechenoperationen: 30 : 5 = 6 oder 5 · 6 = 30
6 + 6 + 6 + 6 + 6 = 30

Formulierungen: fünf Teile, jedes Teil ist sechs,
gefünftelt, der fünfte Teil ist sechs

100

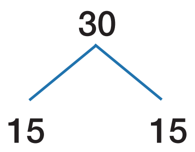
50 50

Rechenoperationen: 100 : 2 = 50 oder 2 · 50 = 100
50 + 50 = 100

Formulierungen: zwei Teile, jedes Teil ist 50
halbiert, gezweiteilt, der halbe Teil/die Hälfte ist 50
der zweite Teil ist 50

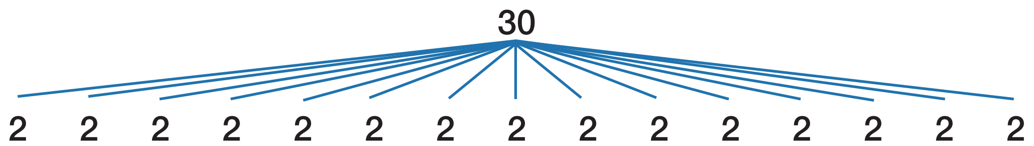
Gemeinsam werden weitere Möglichkeiten gesucht und besprochen, in welche gleich großen Teile die 30 oder 100 außerdem zerlegt werden können.

Wenn Sie die 30 (oder 100) in gleich große Teile teilen, welche Divisionsaufgaben passen dazu?
Welche Teile haben Sie ermittelt?
Wie viele Teile sind das? Wie lautet die entsprechende Multiplikations- bzw. Additionsaufgabe?
Sie haben also die 30 (oder 100) gezehntelt. Kann die 30 geviertelt werden? Kann die 100 gedrittelt werden?
Wie groß ist der zehnte Teil?

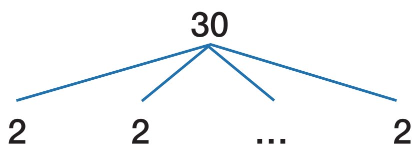


Rechenoperationen: 30 : 2 = 15 2 · 15 = 30
15 + 15 = 30 30 – 15 = 15

Formulierungen: zwei Teile, jedes Teil ist 15
halbiert, gezweiteilt
der halbe Teil ist 15, der zweite Teil ist 15, die Hälfte ist 15



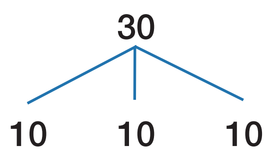
oder verkürzt dargestellt:

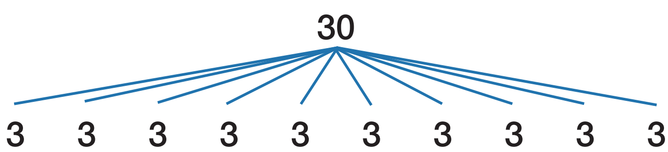


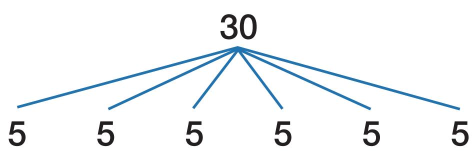
insgesamt 15-mal

Rechenoperationen: 30 : 15 = 2 15 · 2 = 30
2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 30

Formulierungen: 15 Teile, jedes Teil ist 2
gefünfzehntelt
der fünfzehnte Teil ist 2

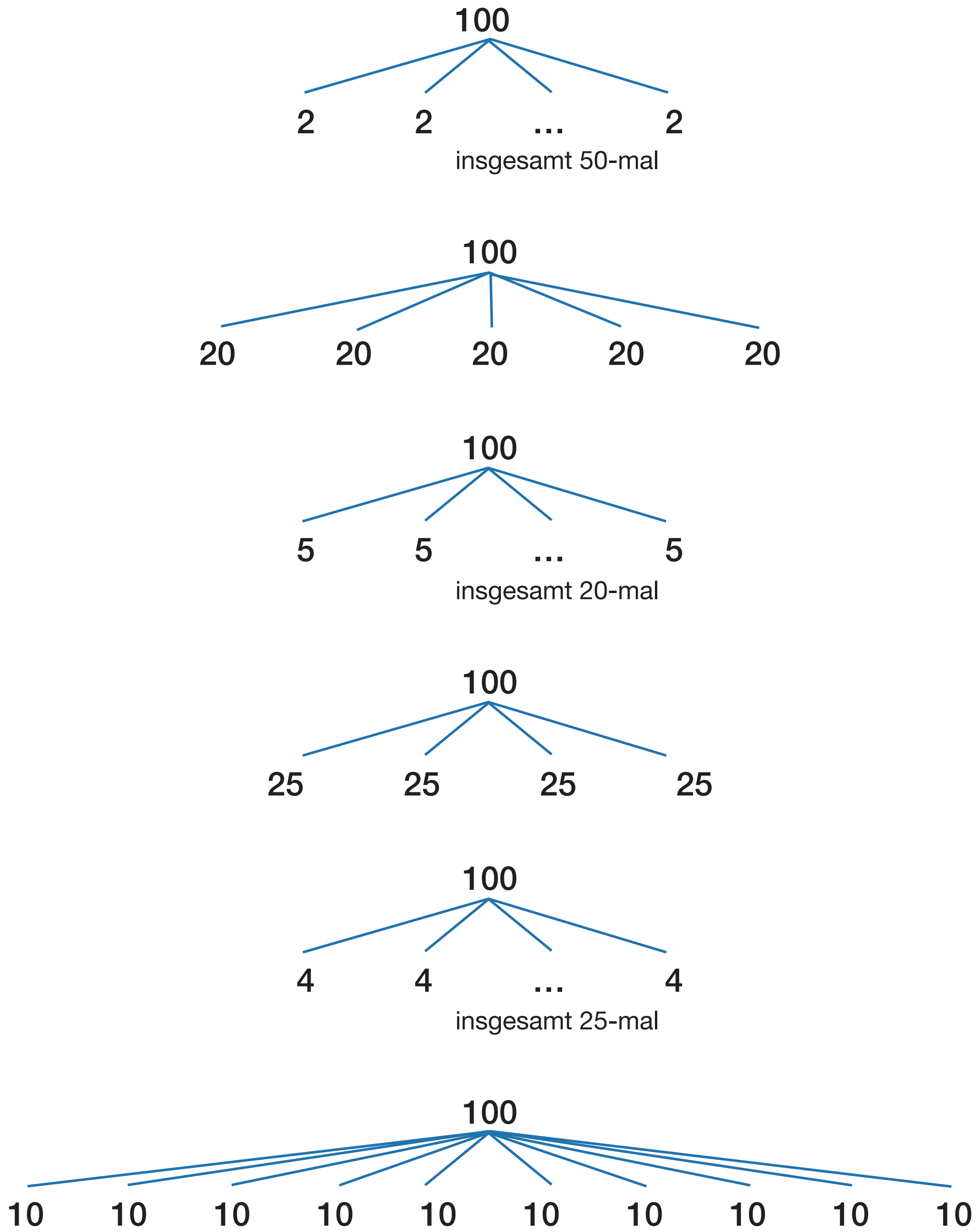






Zahlbereich					Rechenoperationen					Grundlagen				
bis 30	bis 100	bis 1.000	größer 1.000	Brüche	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Prozent-rechnen	Zahlen	Mengen	Ganzes/Teile	Dezimal-system	Alltag

AUFGABENBLÄTTER 17.1a und 17.1b



Rückschau

Die Teilnehmer*innen sollten Folgendes verstanden haben:

- Zahlen können in Teile zerlegt werden.
- Werden sie in gleich große Teile zerlegt, entspricht das der Rechenoperation der Division.
- Wird zum Beispiel eine Zahl in fünf gleich große Teile zerlegt, entspricht das der Rechenoperation, diese Zahl durch fünf zu dividieren oder sie zu fünfteln.
- Umgekehrt können die Teile durch Addition oder Multiplikation zu dieser Zahl zusammengefügt werden.

17.1.3 Vortrag – Ausblick

Durchführung und didaktische Hinweise

Interessant ist jetzt die Frage, ob eigentlich alle natürlichen Zahlen in gleich große Teile geteilt werden können. Bisher war Ihnen bekannt, dass nicht alle Zahlen geteilt/dividiert werden können. Wie wir besprochen haben, heißt dividieren, die Zahlen in gleich große Teile zu teilen.

Kann die 30 in vier gleich große Teile geteilt werden? Im Bereich der natürlichen Zahlen ist die 30 nicht durch vier teilbar. Die 30 kann nicht in vier gleich große Teile zerlegt werden.

Die 28 ist in vier gleich große Teile zerlegbar. In der 28 sind vier Siebener enthalten.
Die 30 wird dementsprechend in vier Siebener zerlegt und zwei bleiben als Rest, die nicht geteilt werden.
Wir schreiben dafür 30 : 4 = 7 Rest 2.

Geben Sie in den Taschenrechner 30 : 4 ein, dann zeigt der Taschenrechner das Ergebnis 7,5 an. 7,5 ist keine natürliche Zahl, sondern eine gebrochene Zahl.

*Wir nähern uns dem **Zahlbereich der gebrochenen Zahlen**, die auch Bruchzahlen genannt werden.*
*Nehmen wir die Wortbedeutung von **gebrochenen Zahlen** auf, sind, allgemein formuliert, Zahlen teilbar/brechbar.*

Zahlbereich					Rechenoperationen					Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1.000	größer 1.000	Brüche	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Prozent-rechnen	Zahlen	Mengen	Ganzes/Teile	Dezimal-system	

Schlagwörter: Brüche · Dezimalsystem · Grundwert · Prozentsatz · Prozentwert · Spiel · Vortrag · Zahlen bis 1.000

17.4 Prozentsätze (Dagmar Grütte unter Mitarbeit von Wolfram Meyerhöfer)

17.4.1 Vortrag und Aufgabenblatt – Vom Hundertstel zu Prozentsätzen

Exploration

Die Aufgaben und Erläuterungen aus den vorherigen Unterrichtssequenzen werden jetzt zusammengeführt und dem Prozentsatz zugeordnet. Die Teilnehmer*innen erarbeiten sich den Zusammenhang zwischen Brüchen, Dezimalzahlen und Prozentsätzen.
Der Prozentbegriff wird eingeführt. Den Teilnehmer*innen wird die direkte Umwandlung von Brüchen oder Dezimalzahlen in Prozentsätze gezeigt.

Durchführung und didaktische Hinweise

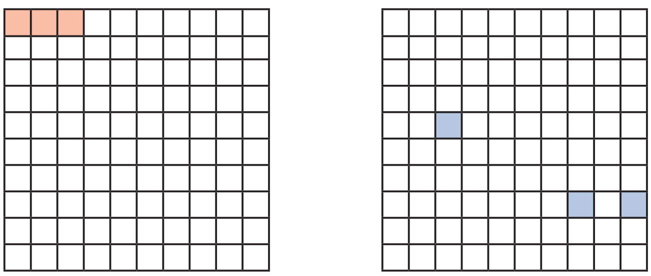
KOPIERVORLAGE 1 (s. S. 26)

Die **Kopiervorlage 1** zeigt eine tabellarische Zusammenfassung der Abbildungen, die die Kursleitung im Vortrag verwendet. Diese Übersicht bietet die Möglichkeit, parallel zum Vortrag alle Beispiele zu betrachten und sich Notizen zu machen oder nach dem Vortrag mit den Teilnehmer*innen als zusammenfassenden Überblick zu besprechen.

Das Ziel dieses Unterrichtskapitels ist es, erste Betrachtungen zu Prozentsätzen anzustellen. Dafür sind Hundertstel wichtige und hilfreiche Einteilungen. In der Prozentrechnung wird alles auf Hundertstel bezogen. Die Idee dabei ist:
Das Ganze wird in 100 Teile zerlegt und es wird ermittelt, um wie viele Hundertstel es sich bei dem zu bestimmenden Teil handelt.
Das entspricht dem sogenannten Prozentsatz. Er benennt, um wie viele Hundertstel es sich bei dem zu bestimmenden Teil handelt. Das Zeichen, das dafür geschrieben wird, ist %. Der Prozentsatz wird in Prozent angegeben. Eigentlich ist es eine verkürzte Form der Hundertstelschreibweise.

$$\frac{1}{100} \mathrel{\hat{=}} 1\,\%$$

Ein Hundertstel des Ganzen entspricht einem Prozent des Ganzen.
Demzufolge entsprechen zum Beispiel drei Hundertstel des Ganzen drei Prozent des Ganzen.
Im Bild sehen Sie eine Visualisierung von drei Prozent oder entsprechend drei Hundertsteln.



$\frac{3}{100}$

0,03

3 %

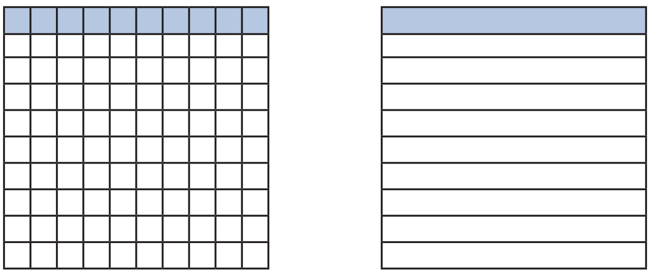
Abbildung 17.4-1: Darstellung von drei Hundertsteln oder drei Prozent: Bruch, Dezimalzahl, Prozentsatz

KOPIERVORLAGE 1 (s. S. 26)

Es ist nicht wichtig, wie diese Hundertstel angeordnet sind. Wichtig ist, dass das Ganze in 100 gleich große Teile geteilt wurde und dass wir nun drei dieser Teile, also drei Hundertstel oder drei Prozent vom Ganzen, betrachten. Beide Abbildungen sind mögliche Darstellungen von drei Hundertsteln oder drei Prozent. Die entsprechende Dezimalzahl ist 0,03. Denn die zweite Stelle nach dem Komma entspricht den Hundertsteln. Für die Anzahl der Hundertstel wird einfach ein anderer Begriff benutzt, nämlich der ***Prozentsatz****. Es handelt sich also um drei Prozent des Ganzen.*

Drei Prozent des Ganzen sind ***farbig*** *markiert. Die Markierung der drei Hundertstel stellt also auch drei Prozent des Ganzen dar. Aus dem Hundertstelbruch oder der Dezimalzahl kann direkt der Prozentsatz bestimmt werden: Drei Hundertstel oder 0,03 entsprechen drei Prozent. Drei Hundertstel von „Etwas" oder 0,03 von „Etwas" entsprechen drei Prozent von „Etwas".*

Wie können wir uns jetzt zehn Prozent vom Ganzen vorstellen?



$\frac{10}{100} = \frac{1}{10}$

0,10

10 %

Abbildung 17.4-2: Darstellung, Brüche, Dezimalzahl, Prozentsatz von $\frac{10}{100}$

Dafür sind zehn Hundertstel zu markieren, denn der Prozentsatz entspricht der Anzahl der Hundertstel. Das Ganze wird in 100 gleich große Teile zerlegt und zehn davon sind 10 Prozent.

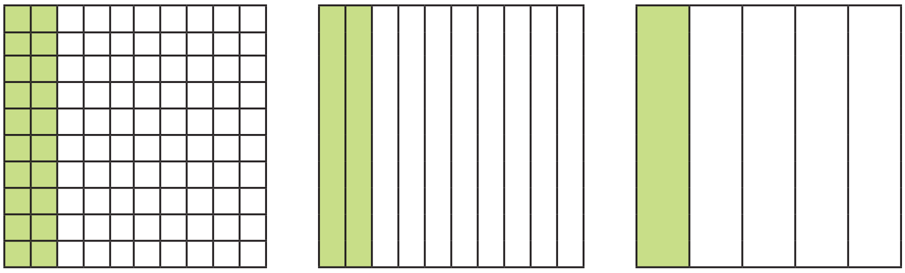
Aus der Stellenwerttabelle wissen wir, dass zehn Hundertstel in ein Zehntel umgewandelt werden können. Dass ein Zehntel und zehn Hundertstel gleich groß sind, können wir auch in den beiden Darstellungen sehen. Links wurde das Ganze in hundert Teile geteilt und rechts das gleiche Ganze in zehn Teile. Zehn Hundertstel können zu einem Zehntel zusammengefasst werden bzw. ein Zehntel kann wiederum in zehn gleich große Teile zerlegt werden. Beide Bruchstücke: $\frac{1}{10}$ und $\frac{10}{100}$ sind gleich groß.

Die zugehörige Dezimalzahl ist 0,1. Es kann dafür auch 0,10 oder 0,100 oder 0,1000 usw. geschrieben werden. Es ist im Zusammenhang mit Prozentsätzen günstig, die Dezimalzahl mit zwei Stellen nach dem Komma aufzuschreiben, weil daraus direkt der Prozentsatz abgelesen werden kann.

Der Zusammenhang für $\frac{20}{100}$ stellt sich folgendermaßen dar.

KOPIERVORLAGE 1 (s. S. 26)

Hier wird zur vertikalen Darstellung gewechselt, um die Fähigkeit der Teilnehmer*innen zur Deutung von graphischen Darstellungen zu flexibilisieren.



$\frac{20}{100} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$

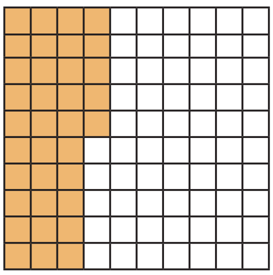
0,20

20 %

Abbildung 17.4-3: Darstellung, Brüche, Dezimalzahl, Prozentsatz von $\frac{20}{100}$

$\frac{20}{100}$ entsprechen 20 Prozent. Schauen wir uns zunächst die Darstellungen an. Das Ganze wurde jeweils in gleich große Bruchstücke geteilt. In 100, in zehn bzw. in fünf, also erhalten wir entsprechend Hundertstel, Zehntel und Fünftel. Umgekehrt können Sie sich vorstellen, dass jedes Fünftel in zwei gleich große Stücke geteilt wird – so erhalten wir zehn Zehntel. Und wenn wir diesen Faden weiterspinnen, teilen wir jetzt jedes Zehntel erneut in zehn gleich große Stücke – so erhalten wir 100 Hundertstel. Aus diesem graphischen Exkurs kann abgeleitet werden, dass $\frac{20}{100}$, $\frac{2}{10}$ und $\frac{1}{5}$ einander gleich sind. Alle drei Brüche entsprechen 20 Prozent.

Schauen wir uns jetzt $\frac{35}{100}$ oder 0,35 an. Es ergibt sich folgendes Bild.



$\frac{35}{100}$

0,35

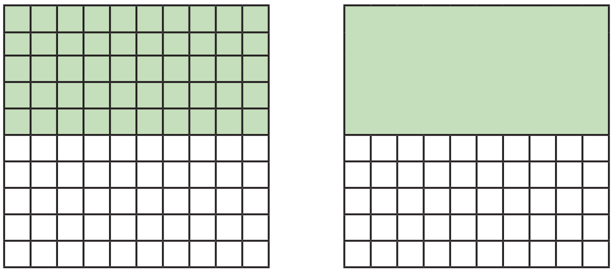
35 %

Abbildung 17.4-4: Darstellung, Bruch, Dezimalzahl, Prozentsatz von $\frac{35}{100}$

35 Hundertstel oder 0,35 entsprechen dem Prozentsatz von 35 Prozent. Der Stellenwert von 35 Hundertsteln wird in drei Zehntel und fünf Hundertstel umgewandelt.

Wichtige Brüche sind $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ und $\frac{1}{3}$.
Ich möchte Ihnen zeigen, welche Prozentsätze diesen Brüchen entsprechen.

KOPIERVORLAGE 1 (s. S. 26)



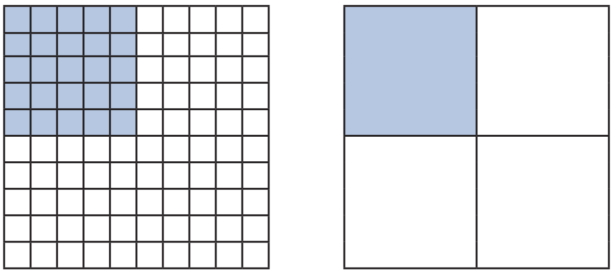
$\frac{50}{100} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$

0,50

50 %

Abbildung 17.4-5: Darstellung, Brüche, Dezimalzahl, Prozentsatz von $\frac{1}{2}$

Aus der Abbildung ist ersichtlich, dass die Hälfte des Ganzen 50 Prozent entspricht, nämlich $\frac{50}{100}$ oder $\frac{5}{10}$ oder $\frac{1}{2}$ oder 0,50.



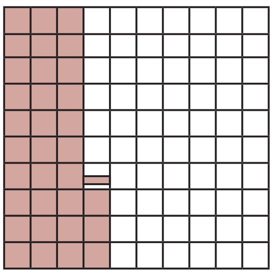
$\frac{25}{100} = \frac{1}{4}$

0,25

25 %

Abbildung 17.4-6: Darstellung, Brüche, Dezimalzahl, Prozentsatz von $\frac{1}{4}$

Ein Viertel der hundert Hundertstel sind 25 Hundertstel und somit beträgt der Prozentsatz für ein Viertel 25 Prozent. Erinnern Sie sich an die Teilung der Einhundert in vier gleich große Teile? Es sind 25.



$\frac{1}{3}$

≈ 0,333

≈ 33,3 %

Abbildung 17.4-7: Darstellung, Bruch, Dezimalzahl, Prozentsatz von $\frac{1}{3}$

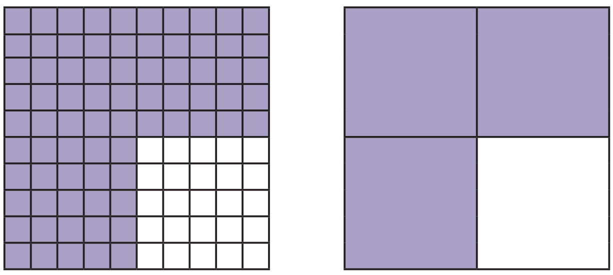
KOPIERVORLAGE 1 (s. S. 26)

Exkurs:

Periodische Dezimalzahlen sind unendlich. Nur wenigen Teilnehmer*innen wird es gelingen, einem Exkurs zu diesem Thema zu folgen. Die Kursleitung entscheidet, ob sich der Kurs über ein Drittel von 100 austauscht. Möglicherweise verzichtet sie auf die **Abbildung 17.4-7** und entsprechende Erläuterungen. $\frac{1}{3}$ ist jedoch eine wichtige Bruchzahl, die in Alltagssituationen oft benutzt wird.

Schwierig gestaltet sich die Visualisierung von einem Drittel der Hundertstel. Hier müssen wir mit der Näherung von 33,3 Prozent arbeiten. Die Ursache liegt in der Teilbarkeit der 100. Hundert Hundertstel können nicht exakt gedrittelt werden, sodass zwar die Bruchzahl $\frac{1}{3}$ exakt den Wert wiedergibt, diese jedoch nur ungefähr als Prozentsatz von 33,3 Prozent angegeben werden kann.

Weitere wichtige Prozentsätze sind zum Beispiel 75 und 90 Prozent.

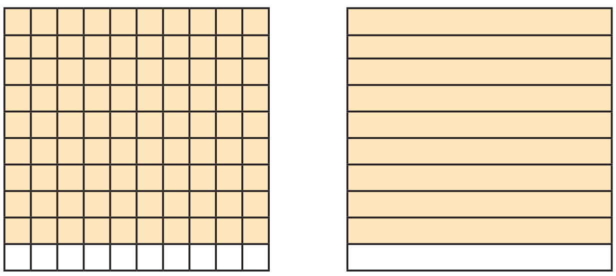


$\frac{75}{100} = \frac{3}{4}$

0,75

75 %

Abbildung 17.4-8: Darstellung, Brüche, Dezimalzahl von 75 Prozent



$\frac{90}{100} = \frac{9}{10}$

0,90

90 %

Abbildung 17.4-9: Darstellung, Brüche, Dezimalzahl von 90 Prozent

17.4.2 Spiel – Prozentsätze-Mau-Mau

KOPIERVORLAGE 2 (s. S. 27–33)

Auf der **Kopiervorlage 2** ist ein Spiel abgebildet. Vorab werden die auf festem Papier ausgedruckten oder laminierten Karten ausgeschnitten.

Um den im Vortrag besprochenen Zusammenhang zwischen Darstellung, Bruch, Dezimalzahl und Prozentsatz zu festigen, ordnen die Teilnehmer*innen Karten mit entsprechenden Abbildungen in einem Mau-Mau-Spiel zu. Das Mau-Mau-Spiel kann mit drei bis fünf Personen gespielt werden. Es werden entsprechende Teams eingeteilt.

*Jede mitspielende Person erhält zu Beginn vier Karten. Die übrigen Karten werden als Stapel verdeckt in die Mitte gelegt. Die erste Karte wird aufgedeckt neben den Stapel gelegt. Die*der Jüngste beginnt. Es gibt drei Möglichkeiten:*

- *Es wird eine Karte derselben Kategorie auf die aufgedeckte Karte gelegt.* ***Beispiel:*** *Darstellung auf Darstellung, Brüche auf Brüche usw.*
- *Es wird eine Karte mit dem gleichen Wert auf die aufgedeckte Karte gelegt.* ***Beispiel:*** *Auf $\frac{50}{100}$ darf die entsprechende Darstellung, 0,50 oder 50 % abgelegt werden.*
- *Es wird ein Joker abgelegt. Ein Joker kann auf jede Karte abgelegt werden und auf einen Joker kann eine beliebige Karte abgelegt werden.*

Kann keine passende Karte gespielt werden, so wird eine Karte vom Stapel genommen. Wenn die Karte passt, kann diese abgelegt werden, ansonsten ist die nächste Person dran.

Die Sonderkarten dürfen nur auf die passenden Kategorien abgelegt werden. Prozentsatz nur auf eine beliebige Prozentsatzkarte, Darstellung nur auf eine beliebige Darstellungskarte usw. Dann muss die nächste Person entweder eine Karte ziehen oder aussetzen.

Gewonnen hat die Person, die als Erste ihre letzte Karte abgelegt hat.

Zahlbereich					Rechenoperationen					Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	**bis 1.000**	größer 1.000	**Brüche**	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	**Prozent-rechnen**	Zahlen	Mengen	Ganzes/Teile	**Dezimal-system**	

17.4.3 Vortrag und Aufgabenblatt – Grundwert, Prozentwert und Prozentsatz

Exploration

Die Teilnehmer*innen machen sich mit den grundlegenden Begriffen der Prozentrechnung vertraut: Grundwert, Prozentwert und Prozentsatz. Zwischen diesen drei Größen besteht ein rechnerischer Zusammenhang:

Grundwert · Prozentsatz = Prozentwert

Diesen drei Größen werden Symbole zugeordnet: Grundwert GW; Prozentsatz p; Prozentwert PW.
Es gilt, diese drei Größen in Sachsituationen zuzuordnen.

Durchführung und didaktische Hinweise

Ich möchte mit Ihnen über drei Begriffe der Prozentrechnung sprechen, die eng miteinander verbunden sind und die Basis des Rechnens mit Prozenten bilden. Es geht um die Begriffe: Grundwert, Prozentwert und Prozentsatz.
Dabei möchte ich ein erstes Beispiel nutzen, um daran die Begriffe und die rechnerischen Zusammenhänge zu erläutern.

Beispiel Prozentrechnung:

25 %	von 200,00 €	sind 50,00 €
Prozentsatz **p**	Grundwert **GW**	Prozentwert **PW**

Das Beispiel lautet: 25 Prozent von 200,00 Euro sind 50,00 Euro.
Die Begriffe Grundwert (dafür wird das Symbol GW verwendet), Prozentwert (Symbol PW) und Prozentsatz (Symbol p) sind den entsprechenden Werten zugeordnet.

Schauen wir uns zuerst den Grundwert GW – hier 200,00 Euro – an. Der Grundwert steht für das Gesamte/das Ganze. In diesem Beispiel sind die 200,00 Euro das Ganze. Der Grundwert GW ist die Bezugsgröße der Prozentrechnung – der zugrunde liegende Wert oder auch die Basis. Der Grundwert entspricht 100 Prozent. Bezogen auf den Grundwert werden die anderen Größen bestimmt.
*In unserem Beispiel wird der Grundwert durch das Wort **von** näher beschrieben. Wir könnten fragen, wo**von** sind 50,00 Euro 25 Prozent? Oder 50,00 Euro sind 25 Prozent **von** welchem Wert/Grundwert oder **von** welchem Wert, der 100 Prozent entspricht?*
*Die Antworten lauten: **Von** 200,00 Euro sind 50,00 Euro 25 Prozent. Das Gesamte oder Ganze oder der Wert, der 100 Prozent entspricht, ist hier 200,00 Euro. Der **Grundwert** in diesem Beispiel ist 200,00 Euro.*
Eine mögliche Betrachtung ohne formalen Rechenweg: 25 Prozent entspricht einem Viertel. Wenn ein Viertel 50,00 Euro sind, dann ist das Ganze 200,00 Euro.

*Betrachten wir den **Prozentwert PW**, stellen wir fest, dass dieser Wert in der gleichen Maßeinheit wie der Grundwert angegeben wird. Der Prozentwert ist ein Teil des Grundwertes. Dieser Prozentwert gehört zu dem Prozentsatz. Ändert sich der Prozentwert, ändert sich auch der Prozentsatz. Es wird die Bezeichnung **Prozentwert** verwendet, weil beide Größen (**Prozentsatz** und **Prozentwert**) eng zusammenhängen. Wir könnten fragen: Wie viel Euro sind 25 Prozent von 200,00 Euro?*

*Zusammengefasst: Grundwert und Prozentwert besitzen die gleiche Maßeinheit und tragen beide das Wort **Wert** in der Bezeichnung. Der Prozentwert ist ein Teil vom Grundwert. Der Grundwert bezieht sich immer auf 100 Prozent und der Prozentwert auf den entsprechenden Prozentsatz.*

*Über den **Prozentsatz p** haben wir bereits gesprochen. Wir wissen inzwischen, dass der Prozentsatz einen Teil vom Ganzen ausdrückt, genauer: wie vielen Hundertsteln vom Ganzen dieser Teil entspricht.*
Wenn der Prozentsatz ein Prozent beträgt, ist der Teil $\frac{1}{100}$ vom Ganzen.
Beträgt der Prozentsatz zehn Prozent, sind es $\frac{10}{100}$ Teile vom Ganzen.
Welchem Prozentsatz oder Teil entsprechen 50,00 Euro bezogen auf 200,00 Euro?
In unserem Beispiel beträgt der Prozentsatz 25 Prozent. Das heißt, $\frac{25}{100}$ oder 25 Prozent von 200,00 Euro sind 50,00 Euro.

Auf dem **Aufgabenblatt 17.4a** sind weitere Beispiele angegeben, um gemeinsam mit den Teilnehmer*innen den Begriffen entsprechende Werte zuzuordnen. Darüber hinaus kann der Prozentwert für ein Prozent ermittelt werden.

Rückschau

Die Teilnehmer*innen sollten Folgendes verstanden haben:
- Zahlen können in Teile zerlegt werden.
- Werden Zahlen in gleich große Teile zerlegt, entspricht das der Rechenoperation der Division. Wird zum Beispiel eine Zahl in fünf gleich große Teile zerlegt, heißt das, diese Zahl durch fünf zu dividieren oder sie zu fünfteln.
- Umgekehrt können die Teile durch Addition oder Multiplikation zu dieser Zahl zusammengefügt werden.
- Es gibt verschiedene Möglichkeiten, Brüche zu veranschaulichen. Wichtig ist, dass das Ganze in gleich große Teile geteilt wird. Aus Bruchzahlen kann abgeleitet werden, in wie viele Teile das Ganze geteilt wurde (Nenner) und wie viele dieser Teile betrachtet werden (Zähler).
- Eine Dezimalzahl enthält ein Komma. Rechts des Kommas werden zunächst Zehntel, dann Hundertstel und Tausendstel usw. notiert. Um die Werte der einzelnen Stellen zu ermitteln, ist eine Stellenwerttabelle hilfreich. Wenn es auf einer Stelle zehn sind, wird auch bei Zehnteln, Hundertsteln, Tausendsteln usw. die Stelle links davor mit einer Eins besetzt.
- Sind es zum Beispiel 12 Hundertstel, wird die Zehntelstelle (links davor) mit eins besetzt und die Hundertstelstelle mit zwei.
- Dementsprechend gilt zum Beispiel: $\frac{3}{10} = \frac{30}{100} = 0{,}30$ oder $\frac{5}{100} = 0{,}05$.
- Die Idee der Prozentsätze ist, dass das Ganze in hundert gleich große Teile zerlegt wird. Ein Prozent entspricht einem Hundertstel vom Ganzen. Zehn Prozent entsprechen zehn Hundertsteln des Ganzen. Prozentsätze werden in Prozent mit dem Zeichen % angegeben.

- Zehntel, Hundertstel, Dezimalzahlen und Prozentsätze können direkt ineinander umgewandelt werden: $\frac{9}{10} = \frac{90}{100} = 0{,}90 = 90\,\%$.
- Neben dem Prozentsatz sind zwei weitere Größen maßgeblich: Der Grundwert GW und der Prozentwert PW. Der Grundwert steht für die Größe, die 100 Prozent – also dem Ganzen oder auch der Gesamtheit – entspricht. Der Prozentwert steht für die Größe, die dem Prozentsatz p entspricht.
- Der rechnerische Zusammenhang lässt sich mit der Formel:

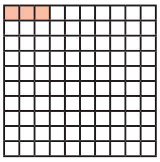
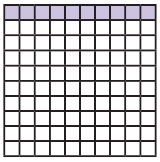
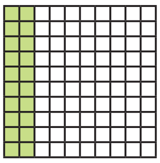
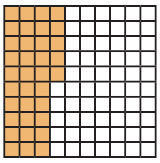
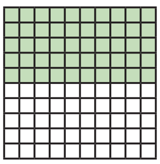
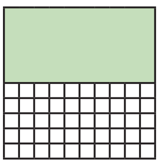
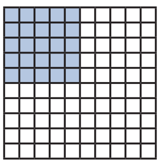
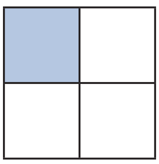
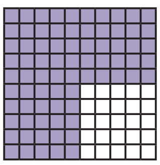
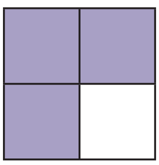
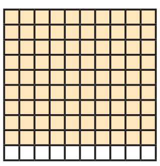
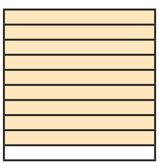
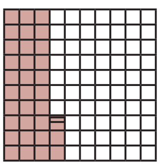
$$GW \cdot p = PW$$

beschreiben. Dabei muss der Prozentsatz p in Hundertsteln angegeben werden.

Ausblick

In den vorangegangenen Betrachtungen wurde der Zahlbereich der gebrochenen Zahlen nur einführend dargestellt. Zunächst wurden nur Themen betrachtet, die für Prozentrechnungen relevant sind. Die Betrachtungen beschränkten sich auf sogenannte einfache echte Brüche, wie Halbe, Viertel, Drittel, Fünftel, Zehntel und Hundertstel.
Die Umwandlung von Brüchen (hier Zehntel, Hundertstel, Tausendstel) wurde anhand von Darstellungen bzw. anhand der Stellenwerttabelle erklärt.
Die rechnerischen Zusammenhänge – Erweitern und Kürzen – wurden bisher nicht erläutert.
Ebenso wurden keine Rechenoperationen und Vergleiche der gebrochenen Zahlen betrachtet.
Diese Inhalte können Gegenstand einer eigenen Unterrichtseinheit sein. Sie könnten aber auch an dieser Stelle oder am Ende des Abschnittes 17.5 ausgeführt werden. Gleiches gilt für weiterführende Betrachtungen zu den Zahlbereichen der natürlichen und gebrochenen Zahlen; zum Beispiel, dass natürliche Zahlen auch gebrochene Zahlen sind, dass aus jedem Bruch durch Division eine Dezimalzahl erzeugt werden kann (Anwenden der schriftlichen Division oder Nutzen des Taschenrechners), dass es unendliche Dezimalzahlen gibt oder wie gebrochene Zahlen/Dezimalzahlen am Zahlenstrahl dargestellt werden können.

KOPIERVORLAGE 1 – Vom Hundertstel zum Prozentsatz

Darstellungen		Brüche	Dezimalzahl	Prozentsatz
		$\frac{3}{100}$	0,03	3 %
		$\frac{10}{100} = \frac{1}{10}$	0,10	10 %
		$\frac{20}{100} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$	0,20	20 %
		$\frac{35}{100}$	0,35	35 %
		$\frac{50}{100} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$	0,50	50 %
		$\frac{25}{100} = \frac{1}{4}$	0,25	25 %
		$\frac{75}{100} = \frac{3}{4}$	0,75	75 %
		$\frac{90}{100} = \frac{9}{10}$	0,90	90 %
		$\frac{1}{3}$	≈ 0,333	≈ 33,3 %

KOPIERVORLAGE 2 – Prozentsätze-Mau-Mau

Spiel für drei bis fünf Personen:

Schneiden Sie die Karten an den Linien aus.


© Patrick Daxenbichler / Fotolia

Jede mitspielende Person erhält zu Beginn vier Karten. Die übrigen Karten werden als Stapel verdeckt in die Mitte gelegt. Die erste Karte wird aufgedeckt neben den Stapel gelegt. Die*der Jüngste beginnt.

Es gibt drei Möglichkeiten:

- Es wird eine Karte derselben Kategorie auf die aufgedeckte Karte gelegt. **Beispiel:** Darstellung auf Darstellung, Brüche auf Brüche usw.
- Es wird eine Karte mit dem gleichen Wert auf die aufgedeckte Karte gelegt. **Beispiel:** Auf $\frac{50}{100}$ darf die entsprechende Darstellung 0,50 oder 50 % abgelegt werden.
- Es wird ein Joker abgelegt. Ein Joker kann auf jede Karte abgelegt werden und auf einen Joker kann eine beliebige Karte abgelegt werden.

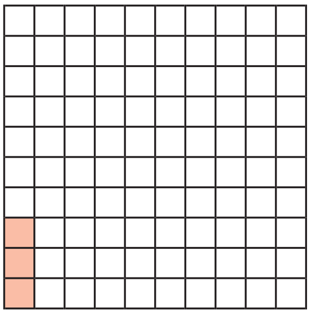
Kann keine passende Karte gespielt werden, so wird eine Karte vom Stapel genommen. Wenn die Karte passt, kann diese abgelegt werden, ansonsten ist die nächste Person dran.

Die Sonderkarten dürfen nur auf die passenden Kategorien abgelegt werden. Prozentsatz nur auf eine beliebige Prozentsatzkarte, Darstellung nur auf eine beliebige Darstellungskarte usw. Dann muss die nächste Person entweder eine Karte ziehen oder aussetzen.

Gewonnen hat die Person, die als Erste ihre letzte Karte abgelegt hat.

Zahlbereich					Rechenoperationen					Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1.000	größer 1.000	Brüche	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Prozent-rechnen	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal-system	

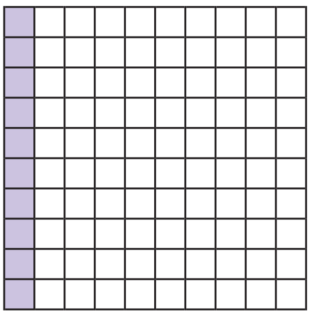
Brüche Aussetzen	Darstellungen Aussetzen	Brüche Eine Karte ziehen	Darstellungen Eine Karte ziehen
Prozentsatz Aussetzen	Dezimalzahl Aussetzen	Prozentsatz Eine Karte ziehen	Dezimalzahl Eine Karte ziehen



0,03

$\frac{3}{100}$

3 %



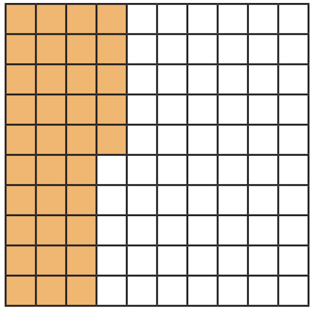
0,10

$\frac{10}{100} = \frac{1}{10}$

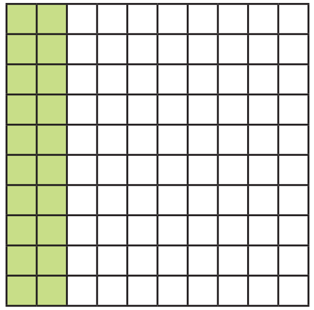
10 %

Zahlbereich					Rechenoperationen					Grundlagen				
bis 30	bis 100	**bis 1.000**	größer 1.000	**Brüche**	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	**Prozent-rechnen**	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	**Dezimal-system**	**Alltag**

$$\frac{35}{100}$$



$$\frac{20}{100} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$$



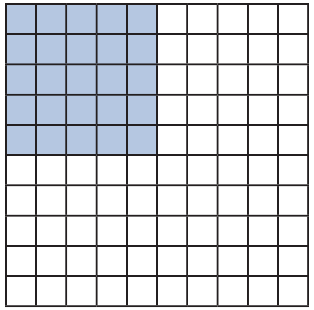
35 %

0,35

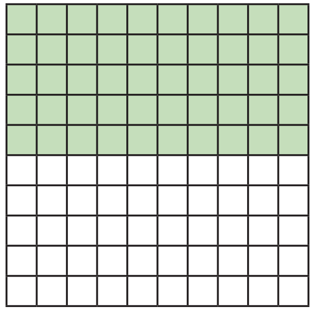
20 %

0,20

$$\frac{25}{100} = \frac{1}{4}$$



$$\frac{50}{100} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

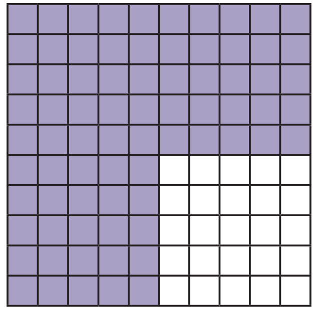


25 %

0,25

50 %

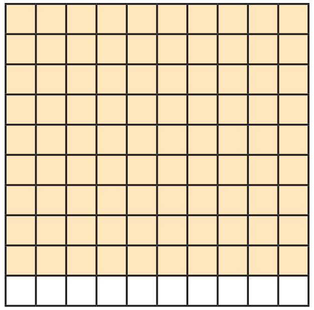
0,50



0,75

$$\frac{75}{100} = \frac{3}{4}$$

75 %



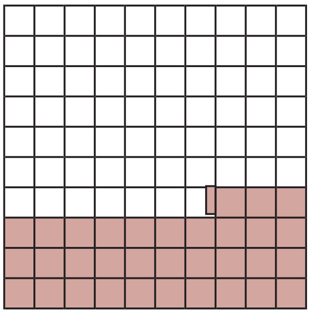
0,90

$$\frac{90}{100} = \frac{9}{10}$$

90 %

Zahlbereich					Rechenoperationen					Grundlagen				
bis 30	bis 100	bis 1.000	größer 1.000	Brüche	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Prozent-rechnen	Zahlen	Mengen	Ganzes/Teile	Dezimal-system	Alltag

KOPIERVORLAGE 2



$\approx 0{,}333$

$\frac{1}{3}$

$\approx 33{,}3\,\%$

Joker

Joker

Joker

Joker

Zahlbereich					Rechenoperationen					Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1.000	größer 1.000	Brüche	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Prozent-rechnen	Zahlen	Mengen	Ganzes/ Teile	Dezimal-system	

Schlagwörter: Brüche · Das Ganze · Dezimalsystem · Die Teile · Dreisatz · Graphische Darstellung von Mengenhandlungen und Sachsituationen · Grundwert · Kursgespräch · Mathekonferenz · Mengen · Prozentrechnung · Prozentsatz · Prozentwert · Vortrag · Zahlen bis 1.000 · Zahlzerlegung · Zweisatz

17.5 Prozente im Alltag

(Cornelia Weilke unter Mitarbeit von Wolfram Meyerhöfer)

Exploration

In diesem Abschnitt werden die Teilnehmer*innen an praktischen Beispielen aus dem Alltag jeweils den Prozentwert, den Prozentsatz und den Grundwert zuordnen und ermitteln. Dabei wird auch auf die Bruchrechnung und die Dezimalschreibweise einer Zahl Bezug genommen, denn diese können bei sogenannten bequemen Prozentsätzen, wie z. B. $50\,\% = \frac{1}{2} = 0{,}5$ oder $20\,\% = \frac{1}{5} = 0{,}2$, sehr hilfreich und eine deutliche Erleichterung sein. Mit „bequem“ ist hier ein Synonym für „leicht“ gemeint. Die sogenannten bequemen Prozentsätze oder Brüche sind den meisten Teilnehmer*innen bekannt. So wissen die meisten Menschen, dass 50 % dasselbe ist wie $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$ oder $\frac{3}{4}$ kennen auch viele. Vielleicht ist einigen auch bekannt, dass 10 % der zehnte Teil vom Ganzen und damit 0,1 sind. Ein bequemer Prozentsatz erleichtert häufig das Rechnen.

Beispiele aus dem Alltag sind:

- Rabatte beim Einkaufen, Kundenkartensysteme
- Nahrungsmittelangaben
- Skonto von (Handwerker-)Rechnungen
- Zinsen für Kredite oder Ratenkäufe
- Lohn-/Gehaltsabrechnungen, Brutto- und Nettobeträge, Krankenkassenbeiträge
- Mieterhöhungen/-minderungen
- Ratenkäufe und entstehende Kreditkosten
- Statistiken lesen und verstehen (Grundwerte ermitteln zu angegebenen Prozentwerten/-sätzen)
- Steigung einer Straße

Allgemein sollte die Vorgehensweise in diesem Abschnitt so sein, dass die Teilnehmer*innen Situationen aus dem Alltag nennen, in denen eine der oben genannten Größen zu bestimmen ist. Dabei sollen die Teilnehmer*innen – wenn möglich – eigene Fragen formulieren. Anderenfalls stellt die Kursleitung Fragen vor und lässt die Teilnehmer*innen Lösungswege im Rahmen einer Mathekonferenz oder eines Kursgespräches finden und diskutieren. Wenn die Teilnehmer*innen zu den von ihnen genannten Beispielen nicht angeben können, welche Größe (Prozentwert, Grundwert oder Prozentsatz) jeweils gesucht wird, ordnet die Kursleitung die Größe zu und begründet dies.
Die Kursleitung befragt die Teilnehmer*innen, anhand welchen Beispieles die jeweils gesuchte Größe bestimmt werden soll, oder wählt ein Beispiel aus. Die nachfolgenden Beschreibungen stellen mögliche Wege zur Bestimmung eines gesuchten Wertes dar, mittels derer die Ausgangsfrage beantwortet werden kann. Die Erläuterungen dazu sind so ausgearbeitet, dass die Kursleitung diese auf ein Beispiel der Teilnehmer*innen übertragen kann.

Zahlbereich					Rechenoperationen					Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1.000	größer 1.000	Brüche	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Prozent-rechnen	Zahlen	Mengen	Ganzes/Teile	Dezimal-system	

17.5.1 Kursgespräch – Von der Theorie zur Praxis

Durchführung und didaktische Hinweise

Am Anfang der Stunde fragt die Kursleitung die Teilnehmer*innen nach Beispielen zu Prozenten aus dem Alltag und lässt zu den Beispielen Fragen formulieren oder formuliert die Fragen für die Teilnehmer*innen. Diese Fragen werden schriftlich fixiert, damit sie im weiteren Verlauf als Aufgabenbeispiele verwendet werden können.

AUFGABENBLATT 17.5 a

Alternativ steht das **Aufgabenblatt 17.5 a**[1] (Bearbeitungsdauer ca. ein bis zwei Stunden, je nach Kenntnisstand) zur Verfügung. Es enthält eine Mischung verschiedener Alltagssituationen mit Prozenten. Auch hierzu sind von den Teilnehmer*innen Fragen zu formulieren und die jeweils gesuchte Größe Prozentwert, Prozentsatz oder Grundwert zuzuordnen. Dabei können Diskussionen entstehen, die ausdrücklich erwünscht sind.

Schließlich werden die Fragen und Beispiele nach den gesuchten Werten sortiert. Das Ordnen kann erfolgen, indem die Kursleitung die Teilnehmer*innen fragt, welche Beispiele Gemeinsamkeiten haben und ob sie sortierbar sind. Alternativ ordnet die Kursleitung die Fragen und bespricht die Sortierung sofort oder in der nächsten Stunde mit der Gruppe.
Falls die Teilnehmer*innen dazu in der Lage sind, lässt die Kursleitung sie ca. 15 Minuten lang einige von den oben genannten Aufgaben rechnen und notiert die auftretenden Rechenwege. Die Ergebnisse geben einen Überblick über den Wissensstand der Teilnehmer*innen und dienen als Grundlage für die Vorbereitung der nächsten Stunden.

[1] Allgemeine Anmerkungen zu den Aufgabenblättern: Für viele Teilnehmer*innen kann die Prozentrechnung besondere Herausforderungen mit sich bringen, daher empfiehlt es sich, die Aufgaben möglichst in der Kursgruppe oder in Kleingruppen lösen zu lassen. Der größte Lerneffekt dürfte in der Lösung im Rahmen einer Mathekonferenz sein. Die Aufgaben können auch einzeln präsentiert werden – nach Schwierigkeitsstufen sortiert – und in sogenannten Lernstationen von den Teilnehmer*innen ausgewählt werden, falls sie ihre Kompetenzen selbst gut einschätzen können.

17.5.2 Mathekonferenz und Kursgespräch – Prozentwert bestimmen

Hier ist als Unterrichtsform „Mathekonferenz und Kursgespräch" angegeben. Grundsätzlich geht es darum, dass die Problemstellungen und die Lösungswege der Teilnehmer*innen den Unterrichtsverlauf leiten. Die verschiedenen Lösungswege werden verglichen. Dabei sollen die Teilnehmer*innen verstehen, welche möglicherweise verschiedenen Rechenwege zu Lösungen des jeweiligen Problems führen – und sie sollen sich möglichst auf effektive bzw. einfache Rechenwege einlassen. Ein Problem dieses Ansatzes – eines Voneinander- und Miteinanderlernens – ist, dass in manchen Kursen ineffektive oder rudimentäre Lösungswege vorgeschlagen werden. Es ist die Aufgabe der Kursleitung, andere Rechenwege vorzuschlagen. Im nachfolgend entwickelten Unterrichtsszenario werden verschiedene Rechenwege vorgestellt, damit die Kursleitung (zumindest in Grundzügen) voraussehen kann, welche Rechenwege auftreten könnten – und ein Repertoire an möglichen Rechenwegen hat.

Durchführung und didaktische Hinweise

AUFGABENBLATT 17.5 a

Die Kursleitung händigt den Teilnehmer*innen **Aufgabenblatt 17.5a** *Alltagssituationen* mit einer Vielfalt von Alltagssituationen aus. Auf einem weiteren Blatt, oder im Raum für alle sichtbar, sollten die zum Ende der vergangenen Stunde von den Teilnehmer*innen genannten Beispiele zu sehen sein.
Die Teilnehmer*innen sollen nun aus den einzelnen Situationen den jeweils gesuchten Wert (Prozentwert *PW*, Prozentsatz *p* oder Grundwert *GW*) ermitteln.
Dann bittet die Kursleitung die Teilnehmer*innen, aus allen Beispielen zum Prozentwert eines auszuwählen, ggf. wählt die Kursleitung ein geeignetes Beispiel der Teilnehmer*innen.

Beispiel:

Der Fahrradladen nebenan hat Fahrräder reduziert. Ein Mountainbike mit 27 Gängen ist um 20 % reduziert. Es hat vorher 598,00 € gekostet.

Welche Fragen lassen sich hierzu formulieren?
Kennen Sie einen oder mehrere Rechenwege zur Beantwortung?

Die Kursleitung notiert die Fragen und Rechenwege an der Tafel und fragt weiter:

Hat jemand eine Idee, wie sich dieser Sachverhalt veranschaulichen lässt?

Falls nicht, zeigt die Kursleitung am Zahlenstrahl folgende Darstellung eines Rabattes von 20 % bis 100 % = 598,00 €:

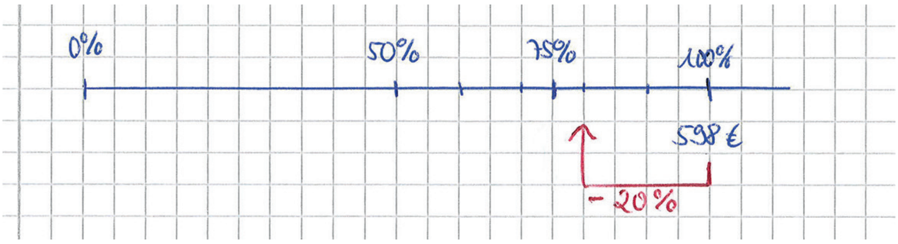


Abbildung 17.5-1: Darstellung Rabatt von 20 % am Zahlenstrahl bis 100 % = 598,00 €

Am Zahlenstrahl[2] von 0 bis 100 für Prozentsätze wurden die vorhandenen Angaben Grundwert 100 % = 598,00 € sowie die Verminderung um 20 % eingetragen. Die Angaben 50 % und 75 % dienen der groben Orientierung.

Haben Sie mit Blick auf die Skizze eine Idee, wie sich der gesuchte Prozentwert ermitteln lässt?

Die Antworten werden an der Tafel notiert.

Hat jemand eine andere Idee zur Darstellung des Sachverhalts?

Falls die folgenden Darstellungen nicht genannt werden, skizziert die Kursleitung die Zerlegung von 100 in gleich große Teile à 20 als Zahlzerlegung und am Zahlenstrahl:

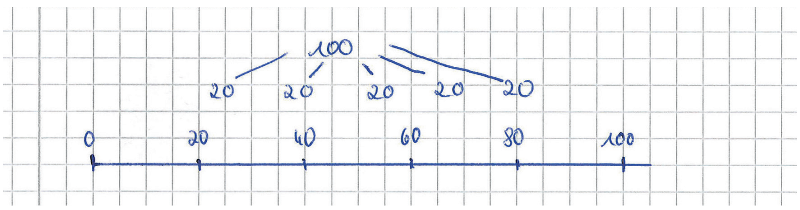


Abbildung 17.5-2: Zerlegung von 100 in gleich große Teile à 20 als Zahlzerlegung und am Zahlenstrahl

Mit Bezug zu **Abschnitt 17.1** *Teile* ist festzustellen, dass 100 in fünf gleich große Teile à 20 zerlegt werden kann. Das lässt sich als Zahlzerlegung in fünf Teile (auch Teilmengen) darstellen oder am Zahlenstrahl, der in fünf gleich große Abschnitte unterteilt ist.

Können Sie mit diesen beiden Abbildungen einen Lösungsweg finden?

Die Antworten werden diskutiert und an der Tafel notiert. Es sollte deutlich werden, dass die 20 genau fünfmal in der 100 enthalten ist oder die 100 in fünf gleich große Teile zu je 20 zerlegt werden kann.

[2] Hier wird der „äquidistante" Zahlenstrahl mit immer gleich großen Abständen an der Linie analog zu immer gleich großen Unterschieden in den notierten Zahlen empfohlen (von 0 % bis 50 % → 5 cm, von 50 % bis 100 % → 5 cm), damit der Aspekt des Teilens in gleich große Teile besser erkennbar wird (1 Kästchen ≙ 5 %).

Welche Schlussfolgerung lässt sich daraus für die Ausgangsfrage nach dem reduzierten Betrag für das Fahrrad ziehen?

Finden die Teilnehmer*innen nicht die richtige Antwort, nennt die Kursleitung sie:
Es wird ersichtlich, dass der Preis um ein Fünftel reduziert wird, denn 20 ist ein Fünftel von 100. Wird also ein Prozentwert für 20 % gesucht, entspricht dies dem Fünftel vom Grundwert.
Mit diesem Wissen lässt sich nun der Anfangswert des Fahrrades durch fünf teilen, um den Prozentwert für den Rabatt von 20 % zu bestimmen:
598,00 € : 5 = 119,60 €.

Gibt es andere Möglichkeiten, den Prozentwert zu ermitteln?

Die Kursleitung sammelt und diskutiert mit den Teilnehmer*innen die Antworten. Dann stellt sie folgende Fragen:

Wie ist es, wenn der Rabatt nicht 20 %, sondern z. B. 19 % beträgt?
Lässt sich der oben beschriebene Weg auch dann anwenden?
Wie würde eine Skizze zur Darstellung des Sachverhaltes aussehen?

Die Kursleitung sammelt wieder Vorschläge der Teilnehmer*innen oder diese zeichnen ihre Ideen an die Tafel. Die Vorschläge werden dann bzgl. ihrer Vorgehensweise und Anwendbarkeit diskutiert.
Eine Skizze könnte die Darstellung am Zahlenstrahl sein:

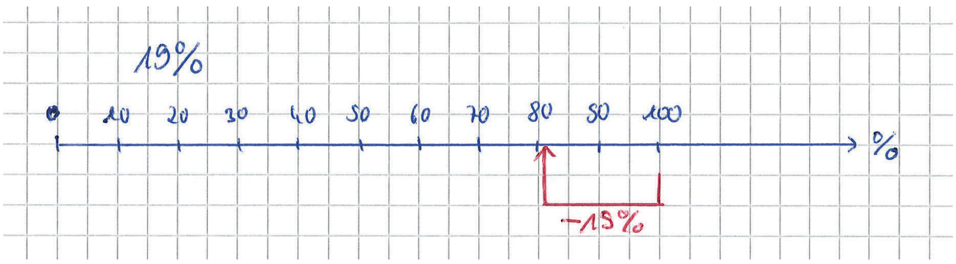


Abbildung 17.5-3: Darstellung Rabatt von 19 % am Zahlenstrahl bis 100

Hat jemand eine Idee, wie anhand dieser Darstellung der Prozentwert ermittelt werden kann?

Tatsächlich ist das nicht so einfach, wenn man den Dreisatz oder die Formel für die Ermittlung des Prozentwertes nicht kennt. Mittels der Darstellung kann der Prozentwert nicht ohne Weiteres ermittelt werden.

Hat jemand eine andere Idee?

Wenn der Gedanke, dass der Sachverhalt sich im Hunderterfeld darstellen lässt, nicht genannt wird, verweist die Kursleitung auf das Hunderterfeld. Darin entspricht ein Feld einem Hundertstel, also einem Prozent. Eine andere Darstellung ist die Zerlegung von 100 in hundert Teile. Ein Einer ist der hundertste Teil eines Hunderters.

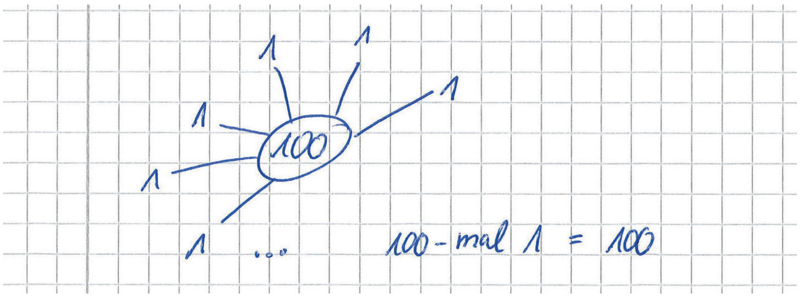


Abbildung 17.5-4: Darstellung 100 zerlegt in 100 Teile

Die Gesamtmenge ist das Ganze, hier auch 100 % genannt. Dann ist der hundertste Teil ein Prozent und umgekehrt 100 · 1 % = 100 %:

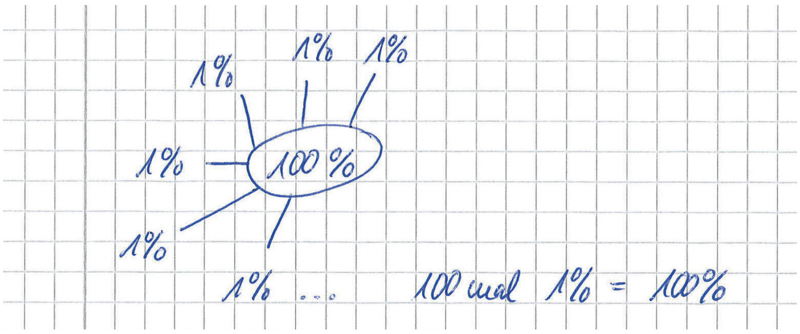


Abbildung 17.5-5: Darstellung 100 % zerlegt in 100 Teile à 1 %

Wird diese Darstellung der 100 nun auf ein Hunderterfeld übertragen, ergibt sich folgendes Bild:

1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	10 %
1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	
1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	
1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	
1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	Das Ganze
1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	100 %
1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	
1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	
1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	
1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	

Abbildung 17.5-6: Zerlegung von 100 % in 100 Teile im Hunderterfeld

Wenn wie im Beispiel 598,00 € der Grundwert ist, entspricht dieser Betrag der Gesamtmenge oder dem Ganzen, hier auch 100 % genannt.

Wie lässt sich der entsprechende Geldwert für 1 % bestimmen?

Finden die Teilnehmer*innen keine Antwort, zeigt die Kursleitung folgende Abbildung:

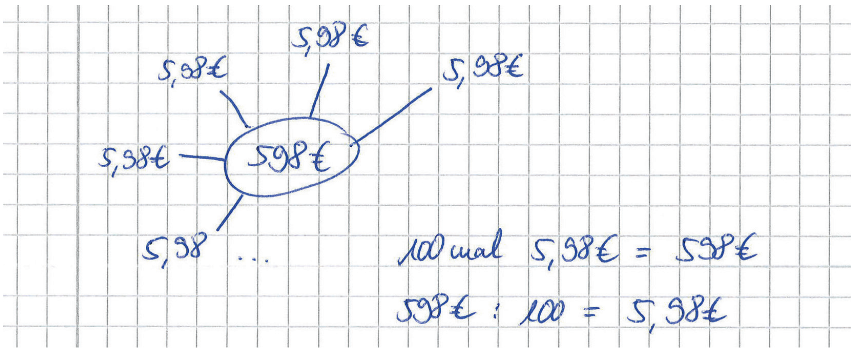


Abbildung 17.5-7: Grundwert 598,00 € in 100 Teile zerlegt

Der Grundwert wird durch 100 geteilt: 598,00 € : 100 = 5,98 €.

Das heißt, der Grundwert wird zerlegt in 100 gleich große Teile, die alle denselben Wert haben, nämlich 5,98 €. Da jedes Kästchen in der Graphik für 1 % steht, entspricht 1 % einem Prozentwert von 5,98 €. Dieser Sachverhalt kann am Beispiel eines Hunderterfeldes wie folgt dargestellt werden:

5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €
5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €
5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €
5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €
5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €
5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €
5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €
5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €
5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €
5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €

Das Ganze
598,00 €

Abbildung 17.5-8: Grundwert 598,00 € in 100 Teile zerlegt (Hunderterfeld)

Wie lässt sich der entsprechende Prozentwert für 2 % ermitteln?

- *Oder für 5 %?*
- *Für 10 %?*
- *Für 20 %?*
- *Und für 19 %?*

Die Kursleitung zeigt dazu folgende Tafelbilder:

5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €
5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €
5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €
5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €
5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €
5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €
5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €
5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €
5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €
5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €

Das Ganze
598,00 €

Abbildung 17.5-9: 2 % vom Grundwert 598,00 € (blau markiert)

An dieser Stelle kann die Kursleitung auch die Teilnehmer*innen nach der Darstellung für 5 % etc. fragen oder aber gleich alle Tafelbilder präsentieren.

5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €
5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €
5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €
5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €
5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €
5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €
5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €
5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €
5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €
5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €

Das Ganze
598,00 €

Abbildung 17.5-10: 5 % vom Grundwert 598,00 € (blau markiert)

5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €
5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €
5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €
5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €
5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €
5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €
5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €
5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €
5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €
5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €

Das Ganze
598,00 €

Abbildung 17.5-11: 10 % vom Grundwert 598,00 € (blau markiert)

5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €
5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €
5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €
5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €
5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €
5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €
5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €
5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €
5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €
5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €	5,98 €

Das Ganze
598,00 €

Abbildung 17.5-12: 20 % vom Grundwert 598,00 € (blau markiert)

5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€
5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€
5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€
5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€
5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€
5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€
5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€
5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€
5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€
5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€	5,98€

Das Ganze
598,00€

Abbildung 17.5-13: 19 % vom Grundwert 598,00 € (blau markiert)

Für die Suche nach dem Prozentwert für einen Rabatt von 19 % gibt es verschiedene Lösungswege. Zunächst sammelt die Kursleitung Lösungsvorschläge an der Tafel und diskutiert diese vergleichend miteinander. Dabei werden die Rechenwege auch bzgl. der Klarheit und Effektivität verglichen. Folgende Lösungswege sollten genannt bzw. ggf. von der Kursleitung vorgestellt werden:

Prozentwert für 2 %:

Hier bietet es sich an, den Prozentwert für 1 % zu verdoppeln: 2 · 5,98 € = 11,96 €.
2 % als Anteil vom Ganzen graphisch dargestellt:

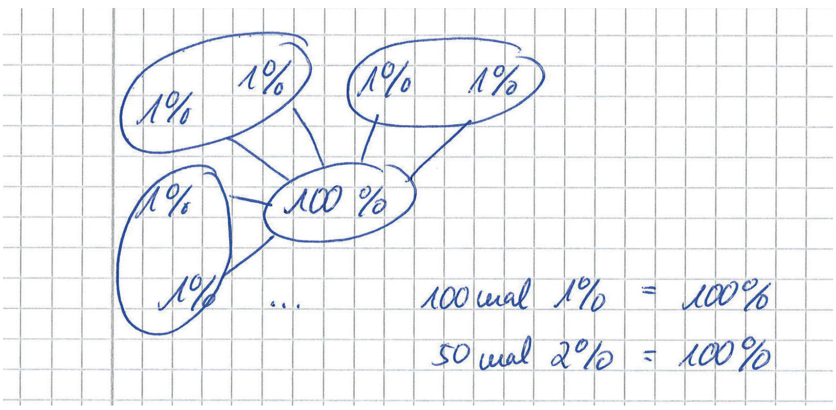


Abbildung 17.5-14: Immer 2 % von 100 ist 50-mal möglich

50 · 2 % = 100 %, dann ist 100 % in 50 gleich große Teile à 2 % zerlegbar, d. h.
100 % : 50 = 2 %. Da also 2 % der fünfzigste Teil von 100 % ist, lässt sich im Beispiel der Grundwert 598,00 € durch 50 dividieren: 598,00 € : 50 = 11,96 €[3].

[3] Diese Möglichkeit erfordert in der Regel einen Taschenrechner, wohingegen sich 2 · 5,98 € noch im Kopf oder schriftlich/halbschriftlich berechnen lässt.

Prozentwert für 5 %:

Analog zu oben ist eine Lösung 5 · 5,98 € = 29,90 €. 5 % ist die Hälfte von 10 %.
Die Multiplikation einer Zahl mit 10 ist leicht zu ermitteln: 10 · 5,98 € = 59,80 €.
Wird dieser Betrag halbiert, ergibt sich der gesuchte Wert für 5 %: 59,80 € : 2 = 29,90 €.

Der Prozentwert für 5 % lässt sich auch ermitteln durch die Kenntnis, dass 5 % zerlegbar ist in 2 % + 2 % + 1 %.

Dann ist ein weiterer Lösungsweg die Verdoppelung des Prozentwertes für 2 % und Addition des Prozentwertes für 1 %:
2 · 11,96 € + 5,98 € = 23,92 € + 5,98 € = 29,90 €.

Prozentwert für 10 %:

Wurde oben ermittelt via 10 · 5,98 € = 59,80 €.

Ein anderer Weg ist die Division des Grundwertes durch 10, da 10 % der zehnte Teil von 100 % ist:
598,00 € : 10 = 59,80 €.

Der Prozentwert für 10 % lässt sich auch ermitteln durch die Kenntnis, dass 10 % zerlegbar ist in 5 % + 5 % oder 2 · 5 %.

Dann ist ein weiterer Lösungsweg die Verdoppelung des Prozentwertes für 5 %:
2 · 29,90 € = 59,80 €.

Prozentwert für 20 %:

20 % ist das Zehnfache von 2 %, daher lässt sich dieser Wert ermitteln durch Multiplikation des Prozentwertes für 2 % mit dem Faktor 10:
11,96 € · 10 = 119,60 €.

20 % ist der fünfte Teil von 100 %, d. h., wird der Grundwert durch 5 geteilt, ergibt sich ebenfalls der gesuchte Prozentwert:
598,00 € : 5 = 119,60 €.

20 % ist das Doppelte von 10 %, also lässt sich der Prozentwert für 10 % verdoppeln:
59,80 € + 59,80 € = 2 · 59,80 € = 119,60 €.

Schließlich führt der Weg 20 · 5,98 € = 119,60 € zum Ziel.

Wie würden Sie nun den Prozentwert für 19 % Rabatt ermitteln?

Die Kursleitung notiert die Lösungswege an der Tafel. In der Gruppe werden die Wege miteinander verglichen und diskutiert.

Folgende Lösungswege sollten genannt bzw. ggf. von der Kursleitung vorgestellt werden:

Prozentwert für 19 %:

Es gilt: 19 ist eins weniger als 20, d. h., sind die Prozentwerte für 20 % und 1 % bekannt, lässt sich der Prozentwert für 19 % Rabatt aus der Differenz der Prozentwerte für 20 % und 1 % ermitteln:
119,60 € – 5,98 € = 113,62 €.

Multiplikation des Prozentwertes für 1 % mit dem Faktor 19:
19 · 5,98 € = 113,62 €.

Die verschiedenen Lösungswege werden von der Kursleitung an der Tafel übersichtlich notiert, z. B. in folgender Darstellungsweise, die auch Zuordnung genannt wird, da jedem Prozentsatz ein Prozentwert zugeordnet werden kann:

a)

Prozentsatz	100 %	1 %	2 %
Prozentwert	598,00 €	5,98 €	11,96 €

Abbildung 17.5-15: Lösungswege für 2 % von 598,00 €

b)

Prozentsatz	100 %	1 %	2 %	5 %	10 %
Prozentwert	598,00 €	5,98 €	11,96 €	29,90 €	59,80 €

Abbildung 17.5-16: Lösungswege für 5 % von 598,00 €

c)

Prozentsatz	100 %	1 %	2 %	5 %	10 %
Prozentwert	598,00 €	5,98 €	11,96 €	29,90 €	59,80 €

Abbildung 17.5-17: Lösungswege für 10 % von 598,00 €

d)

Prozentsatz	100 %	1 %	2 %	5 %	10 %	20 %
Prozentwert	598,00 €	5,98 €	11,96 €	29,90 €	59,80 €	119,60 €

Abbildung 17.5-18: Lösungswege für 20 % von 598,00 €

Dann werden die Teilnehmer*innen befragt:

*Erkennt jemand von den Teilnehmer*innen ein Muster, anhand dessen sich für alle Prozentsätze gleichermaßen der Prozentwert ermitteln lässt?*

Die Teilnehmer*innen sollen andere beliebige Prozentsätze nennen, für die sie in der Gruppe Lösungswege finden und miteinander vergleichen sollen.
Beispielsweise wird 15 % genannt, dann wären mögliche Lösungen über Verdreifachung des Prozentwertes für 5 % oder Addition der Prozentwerte für 5 % und 10 % oder 15 · 1 % etc. Ein anderer Prozentsatz kann 17 % sein.
Lösen die Teilnehmer*innen via 17 · 1 % oder 20 % – 3 % oder 15 % + 2 % usw.?
Hier sollen die Teilnehmer*innen ihr vorhandenes Wissen über die Zahlbeziehungen nutzen, um für sich einfache Wege zu ermitteln.

Welcher Weg ist jeweils leichter?
Können Sie auch für diese Beispiele allgemeingültige Aussagen[4] treffen?

Die Kursleitung sammelt die Aussagen der Teilnehmer*innen an der Tafel (z. B. für Prozentsätze, die aus der 5er-Reihe stammen – 5 %, 10 %, 15 % etc.).

[4] Mögliche Lösungswege werden im nächsten Abschnitt zusammengefasst, um daraus eine Formel für die Ermittlung des Prozentwertes abzuleiten.

17.5.3 Vortrag – Verallgemeinerung und Transfer

Durchführung und didaktische Hinweise

Zusammenfassend lässt sich für die Bestimmung von Prozentwerten festhalten:
Der *Grundwert*, also das Ganze, entspricht 100 % – hier also 598,00 €. Für jeden *Prozentsatz* $p > 1\,\%$ lässt sich der *Prozentwert* mittels Division durch 100 und anschließender Multiplikation mit dem Prozentsatz ermitteln.

Beispiel: p = 2 %

$1\,\% = \frac{1}{100}$, also ermittelt man zunächst den *Prozentwert* für 1 %:

598,00 € : 100 = 5,98 €.

Dann ergibt sich der *Prozentwert* für 2 % durch Multiplikation dieses Ergebnisses mit zwei:
2 · 5,98 € = 11,96 €.

Beispiel: p = 5 %

$1\,\% = \frac{1}{100}$, also ermittelt man zunächst den *Prozentwert* für 1 %:

598,00 € : 100 = 5,98 €.

Dann ergibt sich der *Prozentwert* für 5 % durch Multiplikation dieses Ergebnisses mit zwei:
5 · 5,98 € = 29,90 €.

So führt bei jedem beliebigen Prozentsatz der gleiche Rechenweg zum Ergebnis:

Der Grundwert wird zunächst durch 100 dividiert: $\frac{GW}{100} = \frac{598{,}00\,€}{100} = 5{,}98\,€$.

Das ist der Prozentwert für einen Prozentsatz von p = 1 %.
Im nächsten Schritt wird dieser Wert mit dem jeweiligen Prozentsatz multipliziert: p · 5,98 €, wobei p den Prozentsätzen 2 %, 5 %, 10 %, 19 % und 20 % in den Beispielen a) bis e) entspricht.

Fasst man diese beiden Rechenschritte zusammen, ergibt sich folgende Gleichung:

$$\frac{598{,}00\,€}{100} \cdot p = PW.$$

Wird der Grundwert 598,00 € durch die Variable GW ersetzt, dann wird die allgemeine Gleichung für die Ermittlung des Prozentwertes PW deutlich[5]:

$$PW = \frac{GW}{100} \cdot p \qquad \text{oder} \qquad PW = GW \cdot \frac{p}{100} \qquad \text{oder} \qquad PW = \frac{GW \cdot p}{100}.$$ [6]

[5] In vielen Kursen wurde die Bruchmultiplikation an dieser Stelle (noch) nicht erarbeitet. Hier kann wahrscheinlich nur auf rudimentäre Kenntnisse aus der Schulzeit verwiesen werden. Allerdings benötigt man diese Umformungen auch nicht unbedingt, sie sind eher als Ergänzung für einige Teilnehmer*innen gedacht.

[6] In manchen Formeln wird das Prozentzeichen % in der Formel verwendet: $PW = \frac{GW}{100\,\%} \cdot p\,\%$. Durch die Division von p % durch 100 % hebt sich das Zeichen auf. Hier wird im weiteren Verlauf auf das Zeichen verzichtet.

Mit Blick auf die Ausgangsfrage, wie sich der Prozentwert von 20 % für den Grundwert 598,00 € ermitteln lässt, kann nun auch die Formel direkt verwendet werden:

$$PW = \frac{598{,}00\,€}{100\,\%} \cdot 20\,\% = 598{,}00\,€ \cdot \frac{20\,\%}{100\,\%} = 598{,}00\,€ \cdot 20\,\% = 119{,}60\,€.$$

Bequeme Prozentsätze:

Für bequeme Prozentsätze, wie z. B. 10 %, 20 %, 30 % etc., kann der Bruch $\frac{p}{100}$ in eine Dezimalzahl umgerechnet werden, wenn die Dezimalschreibweise dieses Bruches bekannt ist.

Demnach ist $\frac{10}{100} = 0{,}1$; $\frac{20}{100} = 0{,}2$ etc. Mit diesem Wissen lässt sich der Prozentwert auch durch Multiplikation mit der Dezimalzahl des Prozentsatzes bestimmen:
PW = GW · 0,2.

Für das Beispiel gilt dann: PW = 598,00 € · 0,2 = 119,60 €.

Der gesuchte Prozentwert ist ein Preisnachlass, daher ist dieser Wert vom Grundwert 598,00 € abzuziehen, um schließlich den zu bezahlenden Preis zu bestimmen:

Der Endpreis beträgt also 598,00 € – 119,60 € = 478,40 €.

Ein Blick auf andere Rechenwege lässt weitere Verallgemeinerungen zu:
Im ersten Schritt wurde der Grundwert durch 100 geteilt, um den Prozentwert für p = 1 % zu ermitteln. Dann wurde das Ergebnis mit dem jeweils Vielfachen des Prozentsatzes multipliziert, z. B. mit 5 für p = 5 % oder mit 10 für p = 10 % oder mit 20 für p = 20 %.

Beispiel: Prozentwert 5 %

: 100	100 %	=	598,00 €	: 100
	1 %	=	5,98 €	
· 5	5 %	=	29,90 €	· 5

In dieser Darstellung wird dem jeweiligen Prozentsatz der entsprechende Prozentwert zugeordnet, weshalb diese Vorgehensweise auch „Zuordnung“ genannt wird. Hier wurden drei Zeilen („Sätze“) verwendet, daher auch der Name „Dreisatz“.

In manchen Situationen ist die Beziehung (Relation) zwischen dem Prozentsatz des Grundwertes GW und dem Prozentsatz des Prozentwertes PW, zum Beispiel zwischen p = 100 % und p = 5 %, schnell erkennbar oder leicht ermittelbar. Dies gilt besonders für die sogenannten bequemen Prozentsätze, wie z. B. 5 %, 10 %, 20 %, 25 % oder 50 %.

Ein Prozentsatz von 5 % entspricht $\frac{5}{100}$. 5 ist ein Zwanzigstel von 100, da 100 : 5 = 20. Daher kann man 100 % und damit auch den Grundwert hier direkt durch 20 teilen, um den gesuchten Prozentwert für p = 5 % zu bestimmen:

$$\begin{array}{lrcrl} & 100\,\% & = & 598{,}00\,€ & \\ :20 & & & & :20 \\ & 5\,\% & = & 29{,}90\,€ & \end{array}$$

Weitere leichte Prozentsätze sind z. B. 10 % als $\frac{1}{10}$ oder 20 % als $\frac{1}{5}$ oder 50 % als $\frac{1}{2}$.

AUFGABENBLATT 17.5 a

Die Kursleitung händigt den Teilnehmer*innen **Aufgabenblatt 17.5 a** *Alltagssituationen* aus. Wenn noch Zeit verbleibt, sollte eine der Aufgaben von den Teilnehmer*innen ausgewählt und in der Gruppe besprochen werden, nicht gelöste Aufgaben können die Teilnehmer*innen als Übungsaufgaben für zuhause mitnehmen.

Weitere Übungsaufgaben zur Ermittlung des Prozentwertes können der Sammlung der von den Teilnehmer*innen zusammengetragenen Aufgaben zu Beginn des Abschnittes 17.5 oder **Aufgabenblatt 17.5 b** *Prozentwerte berechnen* (Bearbeitungsdauer je nach Vorkenntnissen 1 bis 3 Stunden) entnommen werden.

17.5.4 Mathekonferenz und Kursgespräch – Prozentsatz bestimmen

Durchführung und didaktische Hinweise

Wird der Prozentsatz p gesucht, sind der Prozentwert PW und der Grundwert GW bekannt.

Die Kursleitung bezieht sich auf die Beispiele der Teilnehmer*innen vom Beginn des **Abschnittes 17.5** und fragt die Teilnehmer*innen, welches Beispiel sie für die Berechnung des Prozentsatzes favorisieren. Falls keine Einigung erzielt wird, wählt die Kursleitung ein Beispiel aus oder nennt die folgenden Beispiele und lässt die Gruppe eines davon auswählen.

Beispiele:

Bei einer **Verkehrskontrolle** wurden 250 LKW überprüft, dabei wurden an 140 LKW erhebliche Mängel festgestellt.

Rabatt beim Einkauf: Sie möchten wissen, wie viel Prozent Preisnachlass Ihr Schnäppchen ausmacht, das vorher 119,00 € kostete und nach der Reduktion nur noch 89,25 €.

Mieterhöhung: Ihr Vermieter erhöht nach zwei Jahren schon wieder Ihre Miete, und zwar von 538,50 € um einen festen Betrag von 118,47 €, ohne den Prozentsatz anzugeben. Sie möchten prüfen, ob die prozentuale Erhöhung im gesetzlichen Rahmen ist.

Anteil verkaufter Zeitungen: Von einer Auflage von 15.000 Zeitungen wurden 12.300 verkauft.

Erfolgsquote: Hannes Müller, Torwart vom FC Backenhausen, musste in seiner Karriere bislang 60-mal zum Elfmeterschießen antreten. Hierbei gelang es ihm, 18 Elfmeter zu halten. Sein Vorgänger Peter Meier hatte in seiner langen Karriere insgesamt 140 Elfmeter gegen sich. Ihm gelang es, hiervon 35 Elfmeter zu halten.

Ratenkauf: Für den Kauf des neuen Tablets finden Sie zwei Angebote für Ratenkauf. Das eine Angebot beläuft sich auf einen Verkaufspreis von 480,00 € bei Sofortkauf und eine Laufzeit von 22 Monaten mit einer Ratenhöhe von 25,00 €. Das andere Angebot lautet: Verkaufspreis 499,00 € bei Sofortkauf, Laufzeit 18 Monate, monatliche Rate von 29,44 €.

Die Teilnehmer*innen einigen sich auf ein Beispiel, anhand dessen der Prozentsatz p bestimmt werden soll. Am Beispiel der Verkehrskontrolle wird nachfolgend eine Vorgehensweise beschrieben, die von der Kursleitung auf das von den Teilnehmer*innen gewählte Beispiel übertragen werden kann. Die Aufgabe wurde **Aufgabenblatt 17.5 a** entnommen und findet sich mit Lösung auch in **Aufgabenblatt 17.5 c** wieder.

Zunächst werden die Teilnehmer*innen nach einer graphischen Darstellung des Sachverhaltes für die Verkehrskontrolle befragt. Die Ideen werden jeweils an der Tafel notiert und dahingehend diskutiert, ob und inwieweit sie bei der Beantwortung der Frage nach dem Prozentsatz hilfreich sind.

AUFGABENBLATT 17.5a

Die Darstellung der Situation kann wie folgt aussehen:

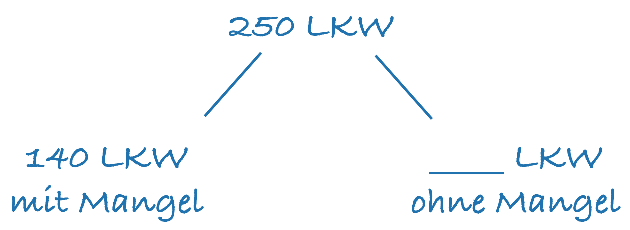


Abbildung 17.5-19: Graphische Darstellung des Beispiels Verkehrskontrolle mittels Zahlzerlegung

Eine andere Möglichkeit der Darstellung ist ein Balken oder Zahlenstrahl:

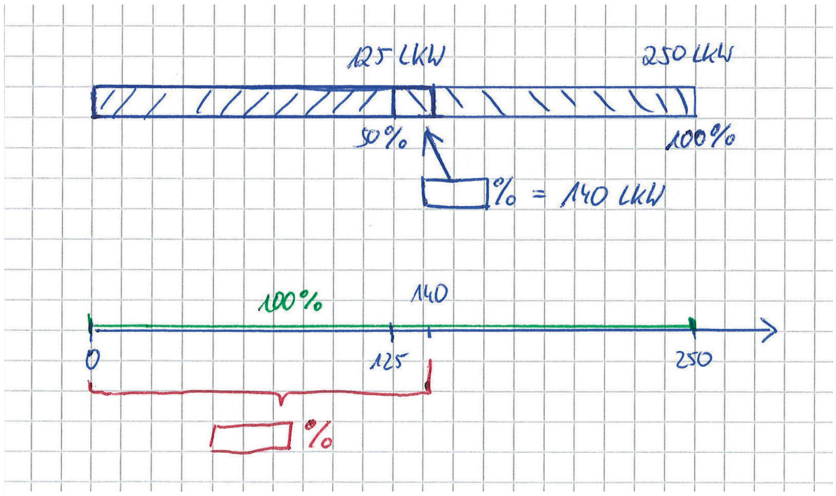


Abbildung 17.5-20: Graphische Darstellungen des Beispiels Verkehrskontrolle mittels Balken und Zahlenstrahl

Welche Fragen lassen sich zu dieser Situation formulieren?
Was wird hier gesucht? Es geht hier um den Prozentsatz wofür?
Hat jemand eine Idee, welcher Schritt nun folgt oder wie sich der Prozentsatz ausrechnen lässt?

Falls die richtige Antwort nicht genannt wird, erläutert die Kursleitung mögliche Fragen zum Prozentsatz:

- Wie hoch ist der prozentuale Anteil der defekten LKW an allen untersuchten Fahrzeugen (Gesucht: Prozentsatz = Anteil der defekten LKW vom Ganzen)?
- Wie viele Fahrzeuge waren ohne Mängel und wie viel Prozent sind das im Vergleich zur Gesamtmenge?

Wird der fehlende Wert für die Anzahl der LKW ohne Defekt für die Beantwortung der ersten Frage benötigt?

Lösung: Nein, denn mit dem Wissen um den Grundwert und den Wert für die Anzahl defekter LKW lässt sich der gesuchte Anteil defekter LKW ermitteln.

Zahlbereich					Rechenoperationen					Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1.000	größer 1.000	Brüche	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Prozent-rechnen	Zahlen	Mengen	Ganzes/Teile	Dezimal-system	

AUFGABENBLATT 17.5 a

Wie lässt sich der gesuchte Wert ermitteln?

Die Kursleitung sammelt die Vorschläge der Teilnehmer*innen an der Tafel. Sie werden bzgl. ihrer Anwendbarkeit und Einfachheit diskutiert.

Die Kursleitung zeigt – falls es nicht genannt wird – folgendes Tafelbild zur Veranschaulichung des Sachverhaltes im Hunderterfeld:

1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %
1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %
1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %
1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %
1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %
1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %
1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %
1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %
1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %
1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %

Das Ganze
(250 LKW = 100 %)

Abbildung 17.5-21: Grundwert 100 % (250 LKW) in 100 Teile zerlegt

Das heißt, dass ein Kästchen für 1 % steht und damit für 2,5 LKW, da $\frac{250}{100} = 2{,}5$:

2,5	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5
2,5	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5
2,5	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5
2,5	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5
2,5	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5
2,5	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5
2,5	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5
2,5	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5
2,5	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5
2,5	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5

Das Ganze
(250 LKW = 100 %)

Abbildung 17.5-22: Grundwert 250 LKW in 100 Teile à 2,5 LKW zerlegt

Zahlbereich					Rechenoperationen					Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1.000	größer 1.000	Brüche	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Prozent-rechnen	Zahlen	Mengen	Ganzes/Teile	Dezimal-system	

Wie lässt sich der gesuchte Wert ermitteln?

Ein Kästchen entspricht dem Wert für 1 % aller LKW. Da 100 % = 250 LKW, ist 1 % = 2,5 LKW. Nun stellt sich die Frage, mit welcher Zahl 2,5 multipliziert werden muss, sodass sich die Anzahl der 140 defekten LKW ergibt, anders formuliert:

____ · 2,5 = 140.

Die gesuchte Anzahl ergibt sich mittels Division: 140 : 2,5 = 56.

Da der Prozentwert 2,5 einem Prozentsatz von 1 % entspricht, entsprechen 140 LKW einem Prozentsatz von 56 %.

Die Kursleitung fragt die Teilnehmer*innen:

Wie würden Sie den Prozentsatz ermitteln?

Vorschläge der Teilnehmer*innen werden an der Tafel notiert und diskutiert. Die Kursleitung erläutert in folgendem Vortrag eine Variante mittels Zuordnung in tabellarischer Darstellung und darauf basierend die Formel für die Bestimmung des Prozentsatzes p. Sie fragt die Teilnehmer*innen, wer die Angaben der Aufgabenstellung übersichtlich an der Tafel darstellen kann. Möglich ist eine Darstellung wie

250 LKW = 100 %

1 LKW = ____ %

140 LKW = ____ %.

Diese Vorgehensweise wird wiederum Dreisatz genannt, da in drei Schritten (Sätzen) das Ergebnis berechnet wird. Die Kursleitung verwendet im Weiteren diese Darstellung oder zeigt in Anlehnung an die Ermittlung der Prozentwerte im Beispiel mit dem Fahrrad für 598,00 € (**s. Abschnitt 17.5.3**) folgendes Tafelbild:

Prozentwert	250	1	140
Prozentsatz	100 %		

Abbildung 17.5-23: Prozentsätze mittels Zuordnung für einen LKW und 140 LKW ermitteln

Die Teilnehmer*innen werden gefragt, ob jemand einen Lösungsweg kennt. Dieser sollte an der Tafel notiert werden, möglichst mit Bezug zu der Darstellung der Teilnehmer*innen oder zur obigen Abbildung. Wenn die Teilnehmer*innen den Weg nicht kennen, erläutert die Kursleitung folgende Vorgehensweise:

Um den Prozentsatz für 140 LKW ermitteln zu können, gilt es zunächst, den Prozentsatz für einen LKW zu bestimmen. Ein LKW ist der 250ste Teil von 250, der entsprechende Prozentsatz wird nun ebenfalls mittels Division von 100 % durch 250 ermittelt: 100 % : 250 = 0,4 %.

AUFGABENBLATT 17.5a

Im zweiten Schritt ist mit 140 zu multiplizieren, um schließlich den gesuchten Prozentsatz für 140 LKW zu erhalten: 0,4 % · 140 = 56 %:

: 250 · 140

Prozentwert	250	1	140
Prozentsatz	100 %	0,4 %	56 %

: 250 · 140

Abbildung 17.5-24: Lösung Prozentsätze mittels Zuordnung für einen LKW und 140 LKW

Obige Zuordnungsschritte sind in der Formel zur Bestimmung des Prozentsatzes p zusammengefasst:

$$p = \frac{100\,\%}{GW} \cdot PW.$$

Die Gleichung kann auch so geschrieben werden:

$$p = \frac{100\,\% \cdot PW}{GW} \text{ oder als } p = \frac{PW}{GW} \cdot 100\,\%.$$

Diese Formel enthält die Schritte des Dreisatzes. Während im Dreisatz die Berechnung in drei Schritten erfolgt, werden in der Formel zeitgleich die bekannten Größen eingesetzt, um die gesuchte Größe zu ermitteln.

Die Kursleitung fragt die Teilnehmer*innen, ob sie diese Formel kennen oder bisher den Prozentsatz mit einer anderen Formel berechnet haben. Sie notiert diese nebeneinander an der Tafel. Gegebenenfalls können die Varianten verglichen und diskutiert werden. Sinnvoll kann es auch sein, mithilfe der unterschiedlichen Formeln die Lösung für die Aufgabe mit den LKW zu berechnen. Falls die folgende Variante nicht von den Teilnehmer*innen genannt wird, erläutert die Kursleitung:

Beispiel: LKW

GW = 250, PW = 140.
Wenn der Prozentsatz für den Grundwert 250 = 100 % ist, dann lässt sich der Prozentsatz für einen LKW mittels Division durch 250 bestimmen:

$$p = \frac{100\,\%}{250} = 0{,}4\,\%.$$

Wenn für 140 LKW der Prozentsatz gesucht wird, ist der Prozentsatz für einen LKW mit 140 zu multiplizieren:

$$0{,}4\,\% \cdot 140 = 56\,\%.$$

Nun konnte der Prozentsatz für die defekten LKW im Verhältnis zu allen geprüften Fahrzeugen ermittelt werden. Dabei war die Anzahl der fahrtüchtigen LKW nicht relevant.
Bleibt noch die zweite Frage zu beantworten:
Wie hoch ist der Prozentanteil der fahrtüchtigen LKW in der Verkehrskontrolle?

Wie würden Sie diese Frage beantworten und rechnerisch lösen?

Die Kursleitung sammelt die Ideen an der Tafel und diskutiert diese in der Gruppe bzgl. der Unterschiede und Vorteilhaftigkeit. In der folgenden Unterrichtssequenz wird diese Frage beantwortet.

17.5.5 Vortrag – Die Summe aller Teile ist das Ganze

Durchführung und didaktische Hinweise

Wie in **Abschnitt 5.1** *Gesamtes und Teile* erläutert, lassen sich Zahlen in Teile zerlegen. Werden alle Teile wieder zusammengefügt, müssen sie wieder das Ganze ergeben. Das gilt gleichermaßen für die Prozentrechnung.

Im Beispiel mit den LKW wird der Grundwert von 250 LKW in zwei Teile à 140 LKW und 110 LKW zerlegt. Diese Teile ergeben zusammengefügt wieder 250 LKW: 140 + 110 = 250.
Zerlegt man gleichermaßen die Prozentsätze in Teile, so müssen auch diese zusammen wieder den Prozentsatz für das Ganze, also 100 %, ergeben. Das wurde bereits deutlich in den **Abbildungen 21** und **22**. Dort wurde die Beispielaufgabe mit den LKW im Hunderterfeld dargestellt: hundert Teilmengen zu je 1 % und 100 Teilmengen zu je 2,5 LKW.

Die analoge Darstellung mithilfe der Zahlzerlegung mit zwei Teilmengen sieht wie folgt aus:

Abbildung 17.5-25: Lösung Prozentsätze mittels Zahlzerlegung für einen LKW und 140 LKW

Da die Summe aller Prozentsätze stets 100 % ergeben muss, muss für dieses Beispiel also gelten:
56 % + ____ % = 100 %.

Die Lösung ergibt sich aus der Differenz der beiden Prozentsätze:
100 % – 56 % = 44 %.

Der komplexere Lösungsweg wäre der über die Ermittlung des Prozentsatzes mithilfe der Gleichung

$p = \frac{PW}{GW} \cdot 100\,\%$.

Werden die Werte 110 für den Anteil der LKW ohne Mängel (250 – 140 = 110) und 250 für die Gesamtmenge der LKW eingesetzt, ergibt sich:

$p = \frac{110}{250} \cdot 100\,\%$ $\qquad$ $p = 0{,}44 \cdot 100\,\% = 44\,\%$.

Zahlbereich					Rechenoperationen					Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1.000	größer 1.000	Brüche	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Prozent-rechnen	Zahlen	Mengen	Ganzes/Teile	Dezimal-system	

Rückschau

Zusammenfassend können folgende verallgemeinerte Rechenwege für die Ermittlung von Prozentsätzen festgehalten werden:

Dreisatz:

$$\begin{array}{lrcll} & 250\text{ LKW} &=& 100\,\% & \\ :250 & 1\text{ LKW} &=& 0{,}4\,\% & :250 \\ \cdot\, 110 & 110\text{ LKW} &=& 44\,\%. & \cdot\, 110 \end{array}$$

Formel:

$$p = \frac{PW}{GW} \cdot 100\,\%.$$

$$p = \frac{110}{250} \cdot 100\,\% = 44\,\%.$$

Die Kursleitung lässt die Teilnehmer*innen zur Übung nun andere Zahlen für die Gesamtmenge und die Menge der defekten LKW nennen. Alternativ können die Teilnehmer*innen auch die Aufgabe mit der Zeitung[7] rechnen. Hier wären zunächst wieder Fragen zu formulieren, Skizzen zur Veranschaulichung der Situation anzufertigen, um schließlich geeignete Rechenwege zu finden.
Die Lösungen und die verwendeten Wege werden nach ca. 15 bis 20 Minuten miteinander verglichen und diskutiert.

Weitere Übungsaufgaben zur Ermittlung des Prozentsatzes können der Sammlung der von den Teilnehmer*innen zusammengetragenen Aufgaben zu Beginn des **Abschnittes 17.5** oder **Aufgabenblatt 17.5 c** entnommen werden.

[7] Siehe Aufgabenbeispiele zu Beginn der Mathekonferenz (Abschnitt 17.5.4).

17.5.6 Mathekonferenz und Kursgespräch – Grundwert für bequeme Prozentsätze

Durchführung und didaktische Hinweise

Immer wieder tauchen im Alltag Situationen auf, in denen der Grundwert GW, also das Ganze oder die Gesamtmenge, nicht angegeben ist.

Kennen Sie Situationen, in denen der Grundwert gesucht wird?

Die Kursleitung sammelt die Beispiele an der Tafel oder lässt die Teilnehmer*innen die Beispiele anschreiben und/oder nennt die folgenden (ggf. ergänzend):

Beispiele:

Rabatt: Es wird angegeben, wie groß der Rabatt in Prozent und der neue Preis ist, z. B. 20 % Rabatt, jetzt nur noch 68,00 €/25,00 €.
Gewinn: Bei einer Tombola sollen 70 % aller Lose Gewinne sein, es gibt 364 Gewinne.
Statistiken:
- Es sind zurzeit 39 Mitarbeiter krank, das sind 26 %.
- Im Kino waren in Saal 1 bei der Abendvorstellung 64 Plätze belegt, das sind 40 %.
- Bei der Wahl für die Stadtverordnetenversammlung betrug die Beteiligung 52 %. Es haben 79.560 Wähler*innen eine gültige Stimme abgegeben.

Lebensmittelkennzeichnungen: Die Deklaration der Zusammensetzung enthält oft Angaben des Tagesbedarfs eines „durchschnittlichen" Erwachsenen in Prozent, z. B. für ein Glas koffeinhaltiger Limonade oder für Schokolade:

Nährwertangaben je:

	100 ml	200 ml	(%*)
Brennwert:	180 kJ	450 kJ	
	42 kcal	105 kcal	(5 %)
Fett	0 g	0 g	(0 %)
davon gesättigte Fettsäuren	0 g	0 g	(0 %)
Kohlenhydrate:	10,6 g	27 g	(10 %)
davon Zucker	10,6 g	27 g	(29 %)
Eiweiß	0 g	0 g	(0 %)
Salz:	0 g	0 g	(0 %)

* Referenzmenge für einen durchschnittlichen Erwachsenen (8400 kJ/2000kcal).

	100 g	16,7 g	%*/16,7 g
davon Zucker	47 g	7,9 g	9 %
Ballaststoffe	3,3 g	0,6 g	–
Eiweiß	8,1 g	1,3 g	3 %
Salz	0,30 g	0,05 g	1 %

Abbildung 17.5-26: Prozentangaben in Nahrungsmitteln zum Tagesbedarf eines „durchschnittlichen" Erwachsenen

Dabei stellt sich z. B. die Frage: Wie viel Schokolade und/oder Limonade darf ein durchschnittlicher Erwachsener zu sich nehmen, wenn die Menge des empfohlenen Tagesbedarfes an Zucker für einen durchschnittlichen Erwachsenen nicht überschritten werden soll.

Die Frage nach dem Grundwert ist die Frage, wie groß die Gesamtmenge ist, z. B. von Losen oder Mitarbeitern oder des empfohlenen Tagesbedarfes an Zucker oder wie hoch der Preis vorher war (bei Rabatten). Die Kursleitung bittet die Teilnehmer*innen, ein Beispiel aus der Aufgabenauswahl zu wählen oder gibt selbst das folgende Beispiel vor. Die Vorgehensweise kann entsprechend auf andere Beispiele übertragen werden.

Beispiel:

Eine Jacke wird im Schlussverkauf angepriesen mit einer Preissenkung von 10 % und einer Ersparnis von 30,00 €. Um zu ermitteln, wie viel die Jacke ursprünglich gekostet hat, um also den Grundwert zu finden, ist es hilfreich, sich die gegebenen Informationen zunächst zu veranschaulichen.

Wie würden Sie diese Veranschaulichung vornehmen?

Die Teilnehmer*innen werden eingeladen, ihre Ideen an der Tafel zu notieren. Die Kursleitung unterstützt ggf. anhand der verbalen Beschreibungen. Mögliche Darstellungen können folgende sein:

Da Prozent übersetzt auch „je Hundert“ bedeutet, bietet sich auch hier die grafische Darstellung in einem Hunderterfeld an.

1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %
1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %
1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %
1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %
1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %
1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %
1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %
1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %
1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %
1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %	1 %

10 %

Das Ganze
100 %

Abbildung 17.5-27: Darstellung eines Rabattes von 10 % im Hunderterfeld

Mit den entsprechenden Prozentwerten je 1 %:

3,00 €	3,00 €	3,00 €	3,00 €	3,00 €	3,00 €	3,00 €	3,00 €	3,00 €	3,00 €
3,00 €	3,00 €	3,00 €	3,00 €	3,00 €	3,00 €	3,00 €	3,00 €	3,00 €	3,00 €
3,00 €	3,00 €	3,00 €	3,00 €	3,00 €	3,00 €	3,00 €	3,00 €	3,00 €	3,00 €
3,00 €	3,00 €	3,00 €	3,00 €	3,00 €	3,00 €	3,00 €	3,00 €	3,00 €	3,00 €
3,00 €	3,00 €	3,00 €	3,00 €	3,00 €	3,00 €	3,00 €	3,00 €	3,00 €	3,00 €
3,00 €	3,00 €	3,00 €	3,00 €	3,00 €	3,00 €	3,00 €	3,00 €	3,00 €	3,00 €
3,00 €	3,00 €	3,00 €	3,00 €	3,00 €	3,00 €	3,00 €	3,00 €	3,00 €	3,00 €
3,00 €	3,00 €	3,00 €	3,00 €	3,00 €	3,00 €	3,00 €	3,00 €	3,00 €	3,00 €
3,00 €	3,00 €	3,00 €	3,00 €	3,00 €	3,00 €	3,00 €	3,00 €	3,00 €	3,00 €
3,00 €	3,00 €	3,00 €	3,00 €	3,00 €	3,00 €	3,00 €	3,00 €	3,00 €	3,00 €

10 % = 30,00 €

Das Ganze
(100 %)

Abbildung 17.5-28: Darstellung eines Rabattes von 10 % mit einem Prozentwert von 30,00 € im Hunderterfeld

In der folgenden Darstellung wurden 10 Zehner markiert, da 10 % der zehnte Teil des Ganzen sind:

10 % = 30,00 €	
10 %	
10 %	
10 %	
10 %	
10 %	90 % = ☐ €
10 %	
10 %	
10 %	
10 %	

100 % = ☐ €

Abbildung 17.5-29: Darstellung eines Rabattes von 10 % im Wert von 30,00 € im Hunderterfeld

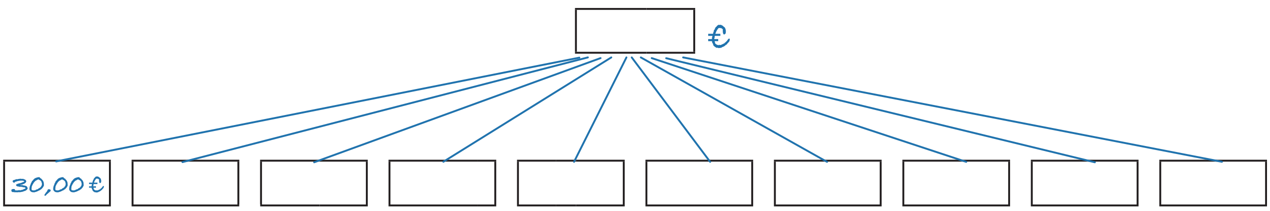


Abbildung 17.5-30: Darstellung eines Rabattes von 10 % im Wert von 30,00 € als Zahlzerlegung

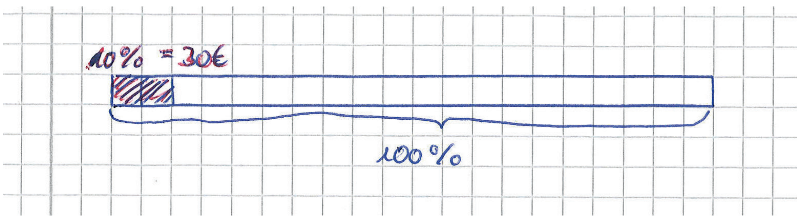


Abbildung 17.5-31: Darstellung eines Rabattes von 10 % als Balken

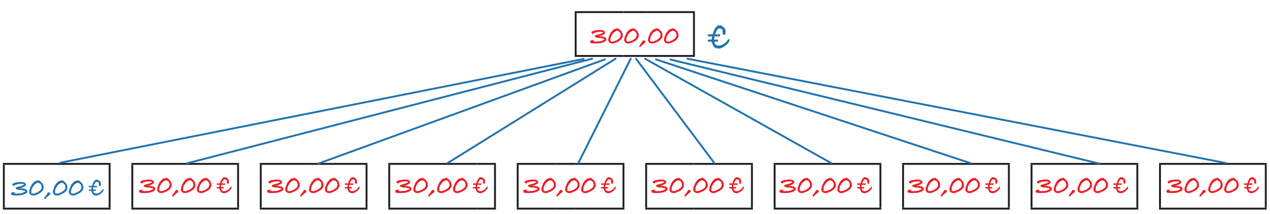
$$10\,\% = 30{,}00\,€$$
$$100\,\% = \boxed{}\,€$$

Abbildung 17.5-32: Darstellung eines Rabattes von 10 % im Wert von 30,00 € als Zuordnung

In den Abbildungen 27 bis 30 wird ersichtlich, aus wie vielen Anteilen von jeweils 10 % das Ganze besteht: Es sind zehn gleich große Teile. Damit wird deutlich, dass eine Verzehnfachung des Prozentwertes von 30,00 € zum Preis vor der Preissenkung (Grundwert) führt:

30,00 €	10 % = 30,00 €	
30,00 €	10 %	
30,00 €	10 %	
30,00 €	10 %	
30,00 €	10 %	
30,00 €	10 %	90 % = $\boxed{270{,}00}$ €
30,00 €	10 %	
30,00 €	10 %	
30,00 €	10 %	
30,00 €	10 %	

$$100\,\% = \boxed{300{,}00}\,€$$



$$10\,\% = 30{,}00\,€$$
$$100\,\% = 300{,}00\,€$$

· 10 · 10

Abbildung 17.5-33: Ermittlung des Grundwertes von 10 % Rabatt im Wert von 30,00 € mit Lösungen

Da 10 % der zehnte Teil vom Ganzen ist, muss auch der Geldbetrag des Rabattes dem zehnten Teil vom Ganzen entsprechen. Und wenn 30,00 € der zehnte Teil ist, dann sind die anderen neun Teile auch jeweils 30,00 € wert, da beim Dividieren die Teilmengen immer gleich groß sind. Damit lässt sich der Grundwert durch Multiplikation von 30,00 € · 10 = 300,00 € bestimmen. Das lässt sich auch im Hunderterfeld veranschaulichen. Wird **Abbildung 17.5-30** in zehn Zehnern zusammengefasst, wird deutlich:

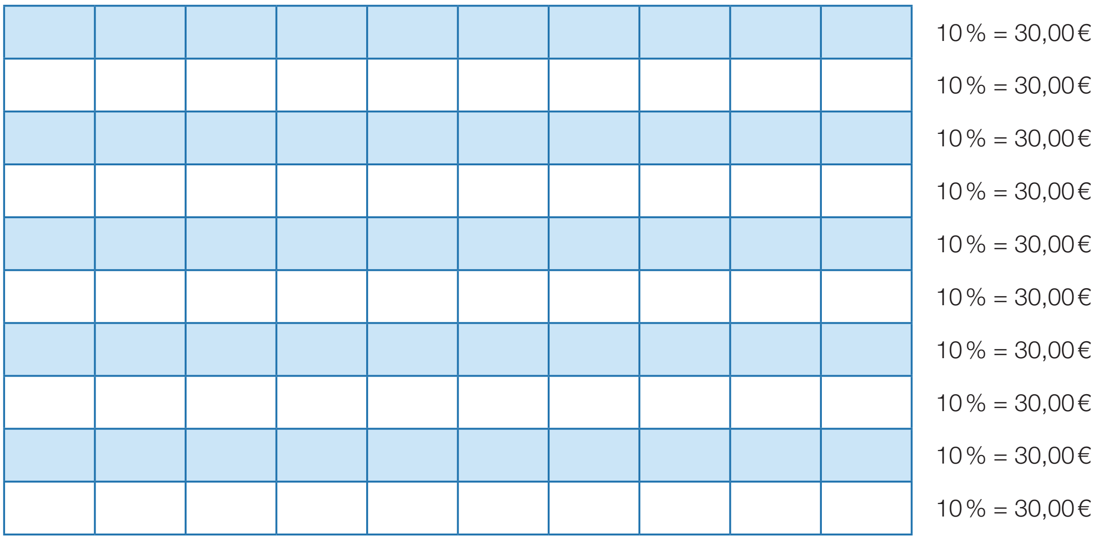


Abbildung 17.5-34: Darstellung von 100 % = 10 · 30,00 €

Die Kursleitung fragt die Teilnehmer*innen nach anderen Beispielen für bequeme Prozentsätze oder notiert die Prozentsätze 2 %, 20 %, 25 % und 50 %, evtl. 75 %, an der Tafel, falls diese nicht genannt werden.

Dann werden Situationen aus dem Alltag der Teilnehmer*innen gesucht, um daraus mit den bequemen Prozentsätzen Aufgaben zu formulieren, die nun als Übungsaufgaben gelöst werden. Wahlweise wird das gleiche Beispiel mit anderen Prozentsätzen verwendet. Je nach Kenntnissen der Teilnehmer*innen kann die Bearbeitung in der Gruppe oder als Einzelarbeit erfolgen.

17.5.7 Vortrag und Kursgespräch – Formel zur Bestimmung des Grundwertes

Durchführung und didaktische Hinweise

Bei dem Beispiel mit 10 % Rabatt und einem Prozentwert von 30,00 € handelt es sich um einen bequemen Prozentsatz. Da 10 % der zehnte Teil vom Gesamten 100 % ist, lässt sich der Prozentwert von 30,00 € verzehnfachen, um den Grundwert zu bestimmen. Doch wie berechnet sich der Wert mittels Formel und bei unbequemen Prozentwerten?

Zur übersichtlichen Darstellung der angegebenen Werte empfiehlt sich wieder die Darstellung mithilfe der Zuordnung:

Prozentsatz	10 %	1 %	100 %
Prozentwert	30,00 €		

Abbildung 17.5-35: Zuordnung Prozentwert von 30,00 € zum Prozentsatz 10 %

Der Prozentwert zu einem Prozentsatz von 100 % entspricht dem Grundwert. Die Kursleitung fragt die Teilnehmer*innen nach einem Lösungsweg. Falls niemand die Antwort weiß, zeigt sie nachfolgendes Tafelbild sofort, sonst im Zuge der Lösung durch die Teilnehmer*innen:

: 10 · 100

Prozentsatz	10 %	1 %	100 %
Prozentwert	30,00 €	3,00 €	300,00 €

: 10 · 100

Abbildung 17.5-36: Zuordnung Prozentwert von 30,00 € zum Prozentsatz von 10 % – Lösung

Im ersten Schritt wurde der Prozentwert für den Prozentsatz p = 1 % ermittelt, indem 10 % durch zehn geteilt wurde. Der alte Prozentwert PW beträgt 30,00 €. Wird dieser Betrag durch zehn geteilt, ergibt sich ein neuer Prozentwert von 3,00 € zu einem Prozentsatz von 1 %, formell ausgedrückt.

Im zweiten Schritt wird der Prozentsatz p = 1 % mit 100 multipliziert, um den Grundwert, also den Preis vor der Preissenkung, zu bestimmen. Der neue Prozentwert muss ebenfalls mit 100 multipliziert werden. So erhält man:

$$GW = \frac{PW}{p} \cdot 100 = \frac{30{,}00\,€}{10} \cdot 100 = 300{,}00\,€.$$

Hier ist PW der in der Aufgabenstellung genannte Prozentwert 30,00 €.

Der Prozentsatz p wird stets in % angegeben und ist gleichbedeutend mit $\frac{p}{100}$. Zum Beispiel sei p = 2 %. Dann ist 2 % gleich $\frac{2}{100}$ oder auch 0,02. Da dieser Wert in der Formel wieder mit 100 multipliziert wird, lässt sich die Formel vereinfacht schreiben als:

$$GW = \frac{PW}{p}.$$

Dabei ist für p der Wert als Dezimalzahl zu verwenden. Im Beispiel:

$$GW = \frac{PW}{p} = \frac{30{,}00\,\text{€}}{0{,}1} = 300{,}00\,\text{€}.$$

Die Kursleitung fragt weiter:

Wie ist es mit einem Prozentsatz von p = 15 %?
Kann jemand den Grundwert hierfür ausrechnen, wenn der Rabatt jetzt 15 % beträgt und die Jacke 30,00 € günstiger ist als vorher?

Falls es die Teilnehmer*innen nicht lösen (können), präsentiert die Kursleitung folgende Lösungswege:

Lösungen

$$\begin{array}{lrll} & 15\,\% = & 30{,}00\,\text{€} & \\ :15 & & & :15 \\ & 1\,\% = & 2{,}00\,\text{€} & \\ \cdot\,100 & & & \cdot\,100 \\ & 100\,\% = & 200{,}00\,\text{€}. & \end{array}$$

Der Grundwert für einen Prozentwert von 30,00 € und einem Prozentsatz von 15 % beträgt 200,00 €.
Die Jacke hat demnach vorher 200,00 € gekostet.

Formel: $GW = \frac{PW}{p} \cdot 100 \qquad GW = \frac{30{,}00\,\text{€}}{15} \cdot 100 = 2{,}00\,\text{€} \cdot 100 = 200{,}00\,\text{€}.$

Weitere Übungsaufgaben können der Sammlung der von den Teilnehmer*innen zusammengetragenen Aufgaben zu Beginn dieses Unterkapitels (Abschnitt 17.5) oder **Aufgabenblatt 17.5b** entnommen werden.

17.5.8 Mathekonferenz – Grundwert für nicht bequeme Prozentsätze bestimmen

Durchführung und didaktische Hinweise

Wie ist die Vorgehensweise mit weniger leichten Prozentsätzen, zum Beispiel bei einem Rabatt von 8 % mit einem Prozentwert von 15,00 €, für den der Grundwert zu ermitteln ist?
*Hat jemand von den Teilnehmer*innen eine Idee, diesen Sachverhalt darzustellen?*
Welche Darstellungsform bietet sich hier an?

Die Kursleitung notiert die Vorschläge der Teilnehmer*innen an der Tafel oder lässt die Teilnehmer*innen die Vorschläge anzeichnen und diskutiert diese bzgl. ihrer Vorteilhaftigkeit. Werden keine Darstellungen/Lösungswege gefunden, zeigt die Kursleitung nachfolgende Darstellungen:

Darstellung als Zuordnung/Dreisatz in einer Tabelle:

	: 8 →	· 100 →	
Prozentsatz	8 %	1 %	100 %
Prozentwert	15,00 €		
	: 8 →	· 100 →	

Abbildung 17.5-37: Zuordnung Prozentwert von 15,00 € zum Prozentsatz von 8 %

: 8 ↓ 8 % = 15,00 € ↓ : 8

1 % = ______ €

· 100 ↓ 100 % = ______ €. ↓ · 100

In beiden Fällen ergibt sich als Lösung ein Prozentwert für 1 % in Höhe von 1,875 €[8].

Wer kann nun den Grundwert ermitteln? Was ist zu rechnen?

Wird die Lösung nicht genannt, löst die Kursleitung: Für die Bestimmung des Grundwertes muss der Prozentwert für 1 % mit 100 multipliziert werden:

1,875 € · 100 = 187,50 €.

[8] Hier wird bewusst die 3. Stelle nach dem Komma mit notiert, obwohl es keine kleinere Währungseinheit als 1 ct gibt. Der Wert wird im nächsten Schritt mit 100 multipliziert und ergibt dann einen realen Prozentwert. Dadurch entsteht kein Rundungsfehler. Würde man hier runden, ergäben sich 1,88 €, mit 100 multipliziert ergäbe das wiederum einen Prozentwert von 188,00 €, also eine Rundungsdifferenz von immerhin 50 ct.

Zahlbereich					Rechenoperationen					Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1.000	größer 1.000	Brüche	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Prozent-rechnen	Zahlen	Mengen	Ganzes/Teile	Dezimal-system	

Wer kann den gesuchten Grundwert mithilfe der Formel ermitteln?
Wer erinnert sich an die Formel?

Die Kursleitung notiert die Formel $GW = \frac{PW}{p} \cdot 100$ und fragt nach den Werten für PW und p.

Lösungen

PW = 15,00 € und p = 8 % oder $\frac{8}{100}$. Eingesetzt in die Formel ergibt sich:

$$GW = \frac{15{,}00\,€}{8} \cdot 100 = 1{,}875\,€ \cdot 100 = 187{,}50\,€$$

Ein weiteres Beispiel: Ein Preisnachlass von 16 % entspricht 42,00 €. Hat jemand eine Idee, wie hierfür der Grundwert auf ähnliche Weise gefunden werden kann?

Eine Form der Darstellung ist die Zuordnung:

16 % = 42,00 €.

Beide Werte durch 16 dividiert, ergibt:

$$1\,\% = \frac{42{,}00\,€}{16} = 2{,}625\,€.$$

Da der Grundwert oder das Ganze, also 100 %, gesucht ist, sind nun beide Werte mit 100 zu multiplizieren:

100 % = 2,625 € · 100 = 262,50 €.

Auch hier ist die direkte Anwendung der Formel für den Grundwert möglich:

Die Verwendung der Formel $GW = \frac{PW}{p} \cdot 100$ ergibt:

$$GW = \frac{42{,}00\,€}{16} \cdot 100 = 2{,}625\,€ \cdot 100 = 262{,}50\,€\,.$$

Die Kursleitung fragt die Teilnehmer*innen nach weiteren unbequemen Prozentsätzen oder nennt selbst welche (z. B. 31 %, 47 % oder 95 %) und lässt die Gruppe gemeinsam Darstellungsformen und Lösungswege finden.

Weitere Übungsaufgaben zur Ermittlung des Grundwertes können der Sammlung der von den Teilnehmer*innen zusammengetragenen Aufgaben zu Beginn dieses Unterkapitels ***(Abschnitt 17.5)*** oder **Aufgabenblatt 17.5 d** (Bearbeitungsdauer je nach Vorkenntnissen 30 bis 90 Minuten) entnommen werden.

17.5.9 Vortrag – Vermehrte und verminderte Grundwerte

Durchführung und didaktische Hinweise

In vielen Situationen steigen oder sinken Preise oder Anteile. Wird nach vermehrten oder verminderten Grundwerten[9] gefragt, dann werden die Werte nach der Erhöhung oder Verringerung gesucht; oder die Werte nach/vor der Preisveränderung sind bekannt und es wird nach dem Prozentsatz für die Veränderung gesucht. Zu den von den Teilnehmer*innen oder der Kursleitung nachfolgend zu nennenden Beispielen bietet es sich an, die Teilnehmer*innen zu befragen, ob sie jeweils den gesuchten Wert benennen und ihre Entscheidung begründen können. Für die Kursleitung sind die Begriffe in Klammern hinter den Beispielen genannt:

Beispiele:

- Der **Energiepreis steigt** um einen Prozentsatz und es wird der neue Preis gesucht ($GW_{vermehrt}$).
- Das **Porto steigt** um einen bestimmten Cent-Betrag, der vermehrte Grundwert ist bekannt, gesucht wird der Prozentsatz der Preissteigerung.
- Eine **Handwerker-Rechnung** enthält die Option, den Rechnungsbetrag mit 3 % Skonto binnen 7 Tagen oder 2 % **Skonto** zwischen 7 und 14 Tagen zu begleichen, gesucht wird der um das Skonto verminderte Grundwert ($GW_{vermindert}$).
- Nach einer **Preissenkung** von 10 % kostet ein Laptop noch 380,00 €, es wird der Preis vorher gesucht, also der Grundwert, wohingegen der verminderte Grundwert bekannt ist.
- **Rabattaktion:** „Wir schenken Ihnen die MwSt."

AB 17.5 e

Einige Beispiele wurden in der Gruppe eingangs gesammelt, weitere Beispiele enthält das **Aufgabenblatt 17.5 e** (Bearbeitungsdauer je nach Vorkenntnissen ca. 1 bis 2 Stunden).
Die Teilnehmer*innen oder die Kursleitung wählen ein Beispiel aus. Nachfolgend werden anhand von ausgesuchten Beispielen

- Grundwerte nach der Veränderung ($GW_{vermindert}$ und $GW_{vermehrt}$),
- Prozentsätze einer Veränderung,
- Grundwerte vor der Veränderung

bestimmt. Die Vorgehensweisen lassen sich auf andere Beispiele übertragen.

[9] Die Begriffe sind für manche Teilnehmer*innen nicht unmittelbar verständlich. Man kann sich Beispiele anschauen, und dann sollen die Teilnehmer*innen Begriffsvorschläge machen. Die Kursleitung stellt zu den Beispielen die üblichen Begriffe vor. Die Begriffe der Teilnehmer*innen können dann im Kurs eine Weile parallel zu den üblichen Begriffen genutzt werden.

17.5.10 Mathekonferenz – Den vermehrten Grundwert bestimmen

Durchführung und didaktische Hinweise

Beispiel:

Ihr Stromanbieter hat Ihnen eine Preiserhöhung angekündigt. Der Preis soll sich von 26 Cent je Kilowattstunde (abgekürzt: ct/kWh) um 10 % erhöhen. Wie hoch ist der Preis nach der Erhöhung?

Wie würden Sie diesen Sachverhalt skizzieren bzw. graphisch veranschaulichen?

Die Kursleitung sammelt die Vorschläge an der Tafel bzw. die Teilnehmer*innen zeichnen sie direkt an und diskutieren diese bzgl. ihrer Eignung, daraus einen Lösungsweg abzuleiten.

Wenn die folgenden Darstellungsmöglichkeiten nicht genannt werden, präsentiert die Kursleitung die Tafelbilder:

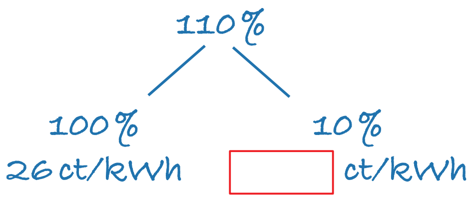


Abbildung 17.5-38: Darstellung Preiserhöhung für Strom mit Zahlzerlegung

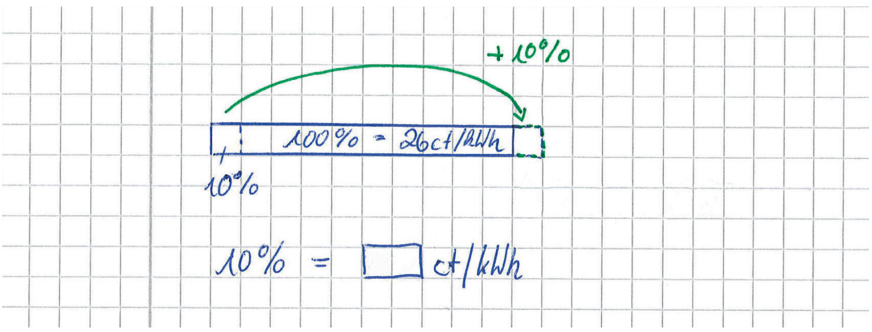


Abbildung 17.5-39: Darstellung Preiserhöhung für Strom im Balkendiagramm

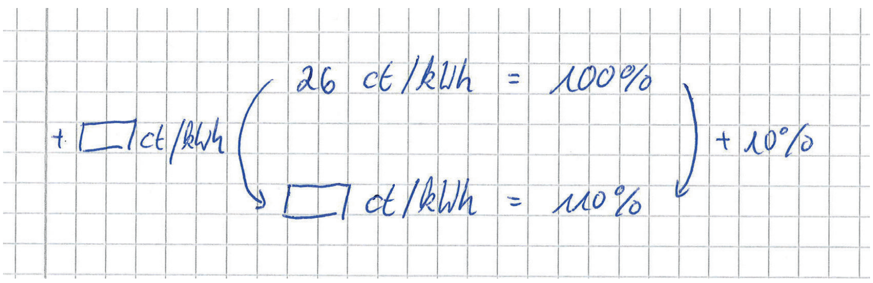


Abbildung 17.5-40: Darstellung Preiserhöhung für Strom als Zuordnung

Welche der Darstellungen bevorzugen Sie für die Ermittlung des vermehrten Grundwertes und warum?
Wie würden Sie nun vorgehen zur Beantwortung der Frage, wie hoch der neue Strompreis sein wird?

Die Kursleitung demonstriert folgende Lösungswege, wenn diese nicht von den Teilnehmer*innen genannt werden (können):

Lösungen

Mithilfe der Zahlzerlegung:

Hier wird deutlich, dass zunächst der Prozentwert für die prozentuale Erhöhung ermittelt werden muss. Da
26 ct/kWh = 100 %, ergibt sich der zehnte Teil davon mittels Division des Grundwertes durch zehn:
26 ct/kWh : 10 = 2,6 ct/kWh.

Die Kosten steigen um 2,6 ct/kWh und werden zum Grundwert addiert:
26 ct/kWh + 2,6 ct/kWh = 28,6 ct/kWh.

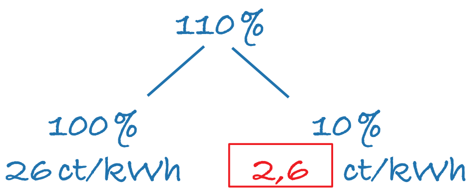


Abbildung 17.5-41: Darstellung Preiserhöhung für Strom mit Zahlzerlegung – Lösung

Mithilfe des Balkendiagramms:

Der Rechenweg ist derselbe: zunächst den Wert für den Anteil von 10 % ermitteln und dann beide Werte addieren.

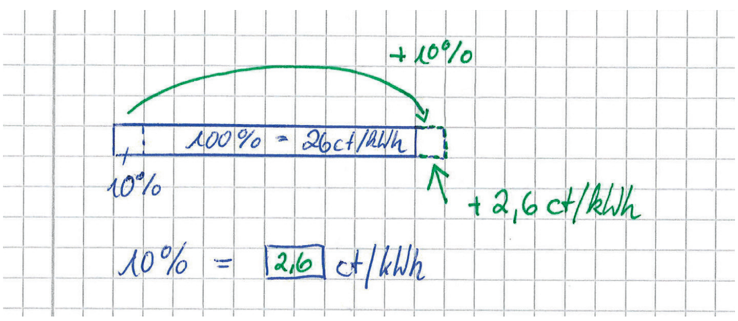


Abbildung 17.5-42: Darstellung Preiserhöhung für Strom im Balkendiagramm – Lösung

Mittels Zuordnung/Dreisatz:

Bei 10 % handelt es sich um einen bequemen Prozentsatz. Daher kann – wer dies erkennt – 100 % durch 10 dividieren und im nächsten Schritt das Ergebnis mit 11 multiplizieren, da 110 das 11-Fache von 10 ist:

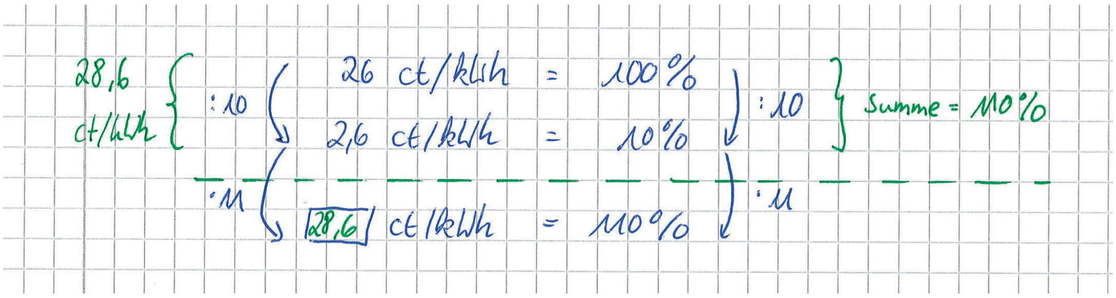


Abbildung 17.5-43: Preiserhöhung für Strom als Zuordnung – Lösung

Hier kann wegen der einfachen Zahlen (bequemer Prozentsatz) die Lösung auch mittels Zweisatz erfolgen, indem direkt der Wert für 100 % mit 1,1 multipliziert wird, denn $\frac{110}{100} = 1{,}1$.

Eine andere mögliche Lösungsvariante:
Die Werte oberhalb der gestrichelten Linie sind die beiden Prozentwerte für jeweils 100 % und 10 %. Wer erkennt, dass dies eine Zerlegung des vermehrten Grundwertes $GW_{vermehrt}$ ist, kann die entsprechenden Ergebnisse für die Stromkosten addieren und erhält ebenfalls die gesuchte Lösung.

Ein weiterer Weg führt über die Formel $GW = \frac{PW}{p} \cdot 100$ zum Ziel. Hierbei ist Folgendes zu beachten:

- Der Prozentwert PW entspricht dem anfänglichen Preis von $26\,\frac{ct}{kWh}$.
- Für p ist der Prozentsatz für den anfänglichen Grundwert einzusetzen, also 100 %.
- Bisher wurde mit 100 % multipliziert, weil das der Prozentsatz für den Grundwert war. Nun ist der Grundwert um 10 % gestiegen, daher ist auch der entsprechende Prozentsatz um 10 % zu erhöhen, also wird mit 100 % + 10 % = 110 % multipliziert: $GW_{vermehrt} = \frac{26\,\frac{ct}{kWh}}{100} \cdot 110$.

Wer über die Kenntnisse zur Umrechnung von Brüchen in Dezimalzahlen verfügt, weiß, dass 110 : 100 = 1,1 gilt, und kann schließlich leichter rechnen: $26\,\frac{ct}{kWh} \cdot 1{,}1 = 28{,}6\,\frac{ct}{kWh}$.

Auf diese Art und Weise lässt sich beispielsweise auch ein um die MwSt. erhöhter Nettobetrag, also der Bruttobetrag, leicht ermitteln. Sei z. B. der Preis eines Produktes 80,00 € netto, dann lässt sich der Bruttopreis wie folgt ermitteln:
bei einer MwSt. von 19 %: 80,00 € · 1,19 = 95,20 €,
bei einer MwSt. von 7 %: 80,00 € · 1,07 = 85,60 €.

17.5.11 Mathekonferenz – Den verminderten Grundwert bestimmen

Durchführung und didaktische Hinweise

Die Kursleitung verteilt **Aufgabenblatt 17.5e** oder wählt aus diesem Aufgabenblatt Aufgabe 4 aus.

Beispiel:

Sie mussten Ihren Wasserhahn in der Küche vom Fachmann reparieren lassen und erhalten die Rechnung des Handwerkers mit einem Rechnungsbetrag von 126,80 € inkl. Mehrwertsteuer (nachfolgend: MwSt.). Wenn Sie den Rechnungsbetrag innerhalb von 7 Tagen überweisen, erhalten Sie Skonto (Preisnachlass) von 3 %, bei Zahlung innerhalb von 8 bis 14 Tagen immerhin noch 2 % Skonto. Wie viel müssen Sie in beiden Fällen bezahlen?

Wie würden Sie diesen Sachverhalt skizzieren bzw. graphisch veranschaulichen?

Die Kursleitung sammelt die Vorschläge an der Tafel bzw. die Teilnehmer*innen zeichnen sie direkt an und diskutieren diese bzgl. ihrer Eignung, daraus einen Lösungsweg abzuleiten. Wenn die folgenden Darstellungsmöglichkeiten nicht genannt werden, präsentiert die Kursleitung die Tafelbilder:

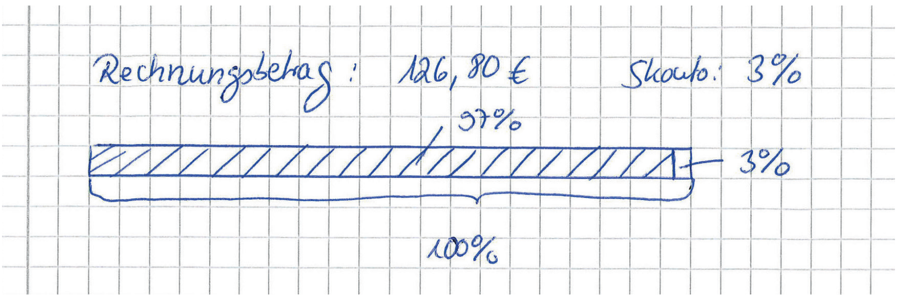


Abbildung 17.5-44: Darstellung Skonto von 3 % im Balkendiagramm

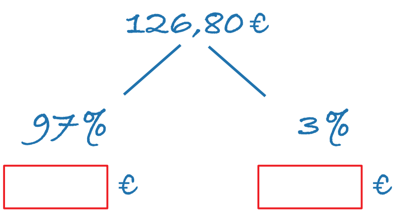


Abbildung 17.5-45: Darstellung Skonto von 3 % als Zahlzerlegung

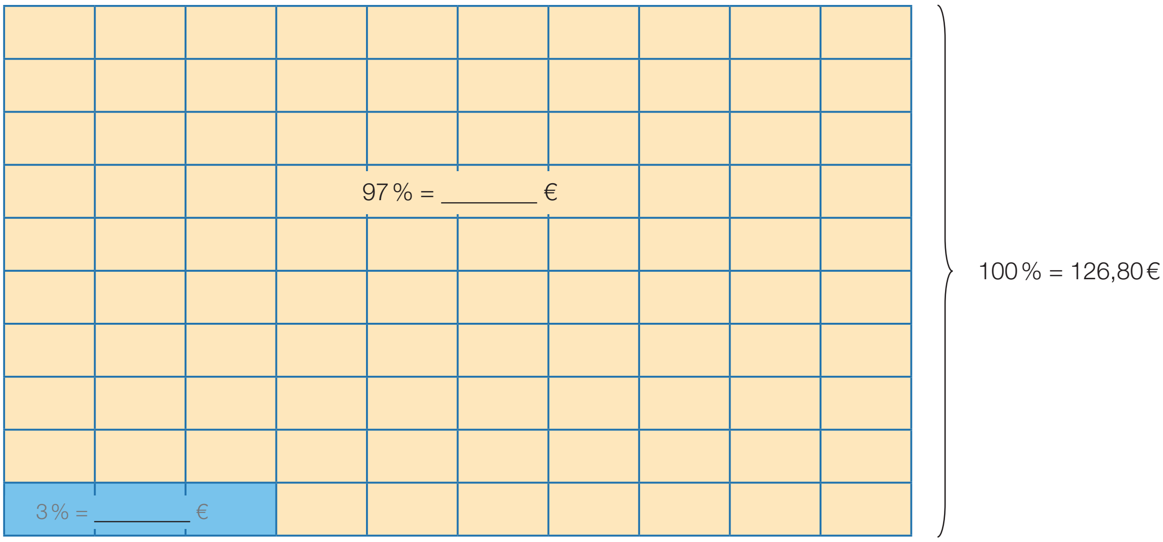


Abbildung 17.5-46: Darstellung Skonto von 3 % im Hunderterfeld

$$\begin{array}{rrcl} & 100\,\% = & 126{,}80\,€ & \\ :100 & 1\,\% = & \_\_\_\_\_\_\,€ & :100 \\ \cdot 97 & 97\,\% = & \_\_\_\_\_\_\,€. & \cdot 97 \end{array}$$

Abbildung 17.5-47: Darstellung Skonto von 3 % mit Zuordnung (Dreisatz)

Welche der Darstellungen bevorzugen Sie für die Ermittlung des verminderten Grundwertes? Begründen Sie Ihre Entscheidung.
Wie gehen Sie nun vor zur Beantwortung der Frage, wie viel Sie dem Handwerker überweisen müssen?

Die Kursleitung demonstriert folgende Lösungswege, wenn diese nicht von den Teilnehmer*innen genannt werden (können).

Formel für Grundwert:

Die Formel für die Bestimmung des Grundwertes lautet $GW = \frac{PW}{p} \cdot 100$. Für das Beispiel ist PW = 126,80 € und p = 100 %. In **Abbildung 17.5-46** lässt sich erkennen, dass PW zunächst durch 100 geteilt und anschließend mit 97 % (Prozentsatz für den verminderten Grundwert) multipliziert wird.

Durch Einsetzen in die Formel erhält man:

$$GW = \frac{126{,}80\,€}{100\,\%} \cdot 97\,\% = 123{,}00\,€.$$

Hat jemand eine andere Idee zur Ermittlung des gesuchten Grundwertes?

Wenn niemand den Zusammenhang erkennt, dass eine Verringerung vom Ganzen um 0,03 gleichbedeutend ist mit 0,97, nennt die Kursleitung folgenden Weg:

Da der Prozentsatz nach der Minderung noch 0,97 (100 % – 3 % = 1,0 – 0,03 = 0,97 oder Umrechnung des Bruches $\frac{97}{100}$ in eine Dezimalzahl: 0,97) ist, ergibt die Multiplikation des Grundwertes mit dem verminderten Prozentsatz ebenfalls das gesuchte Ergebnis:

126,80 € · 0,97 = 123,00 €.

Zuordnung (Dreisatz):

Dieser Rechenweg wird auch bei Betrachtung der Darstellungen mit Zahlzerlegung und Hunderterfeld offensichtlich, da immer erst der Wert für 1 % zu ermitteln ist, um für den nicht bequemen Prozentsatz von 97 % den Prozentwert zu bestimmen:

	100 % =	126,80 €	
: 100			: 100
	1 % =	1,268 €	
· 97			· 97
	97 % =	123,00 €.	

Abbildung 17.5-48: Ermittlung des verminderten Grundwertes mittels Dreisatz

Bei einem Skonto von 3 % beträgt der Rechnungsbetrag 123,00 €, die Ersparnis beläuft sich auf 126,80 € · 0,03 = 3,80 €.

Wer möchte und kann den Prozentwert für 2 % Skonto bestimmen?
Wie groß ist der Unterschied zwischen 2 % und 3 %?

Falls von den Teilnehmer*innen gewünscht, können sie auch versuchen, die letzte Frage in Einzelarbeit zu beantworten. Weitere Übungsaufgaben zum verminderten Grundwert finden sich in **Aufgabenblatt 17.5 e**.

17.5.12 Mathekonferenz – Prozentsatz bei vermehrtem Grundwert bestimmen

Durchführung und didaktische Hinweise

Von den oben genannten Alltagssituationen wird nachfolgend beispielhaft der Ratenkauf näher betrachtet. Die Kursleitung liest das Beispiel vor und notiert die wesentlichen Informationen übersichtlich an der Tafel oder präsentiert folgendes Tafelbild:

Vergleich Tablet-Angebote:

	①	②
Preis Sofortkauf	499,00 €	480,00 €
Ratenanzahl	18	22
Ratenhöhe	29,44 €	25,00 €

Abbildung 17.5-49: Vergleich von zwei Tablet-Angeboten

Mit Absicht ist hier nicht vermerkt, ob es sich um exakt das gleiche Gerät handelt. Im Alltag sind auch verschiedene Geräte im Angebot zu vergleichen – und der Preis bildet nur eine Komponente der Entscheidung.

Die Kursleitung fragt die Teilnehmer*innen nach möglichen Fragestellungen zu diesem Sachverhalt und nach Ideen für die Lösung der Fragen. Beides notiert die Kursleitung an der Tafel. Die Fragen und Vorschläge werden diskutiert und verglichen bzgl. ihrer Vorteilhaftigkeit und Nachvollziehbarkeit.

Falls die folgenden Fragen nicht genannt werden, stellt die Kursleitung sie den Teilnehmer*innen:

> *Welches Angebot ist günstiger, wenn man den Geldbetrag für den Sofortkauf nicht zur Verfügung hat? Lässt sich diese Frage ohne Weiteres beantworten? Falls nein: Unter welchen Umständen lässt sich diese Frage beantworten?*

Die Kursleitung führt die Teilnehmer*innen durch die Beantwortung der einzelnen Fragen gemäß nachfolgender Erläuterungen. Dabei empfiehlt es sich, immer wieder die Teilnehmer*innen in den Lösungsprozess mit Zwischenfragen nach den einzelnen Schritten bzgl. der weiteren Vorgehensweise einzubinden.

Um die erste Frage beantworten zu können, ist zunächst auszurechnen, wie hoch der Grundwert in beiden Angeboten beim Ratenkauf sein wird.

> *Wer weiß, wie die Gesamtkosten im Fall einer Ratenzahlung bestimmt werden, oder hat jemand eine Idee dazu?*

Lösungen

Dafür ist jeweils die Anzahl der Raten mit den Ratenbeträgen zu multiplizieren:

Angebot 1:
18 · 29,44 € = 529,92 €

Angebot 2:
22 · 25,00 € = 550,00 €

Nun lässt sich für beide Angebote der Preisunterschied feststellen, der zwischen dem Sofort- und dem Ratenkauf besteht:

Angebot 1:
529,92 € – 499,00 € = 30,92 €

Angebot 2:
550,00 € – 480,00 € = 70,00 €.

Der Ratenkauf beim zweiten Angebot ist demzufolge teurer (obwohl der Sofortkauf dort billiger ist). Um die Angebote vergleichbar machen zu können, werden zur Beantwortung der zweiten Frage die Prozentsätze der beiden Preissteigerungen benötigt.

Hat jemand eine Idee, wie sich hier die Prozentsätze ermitteln lassen?

Die Zuordnung der Werte für das erste Tablet ergibt:

: 499 · 529,92

Prozentwert	499,00 €	1,00 €	529,92 €
Prozentsatz	100 %		

: 499 · 529,92

Abbildung 17.5-50: Zuordnung für das erste Tablet

100 % : 499,00 ≈ 0,2004 %[10]
0,2004 % · 529,92 ≈ 106,20 %.
Der Preis für das erste Tablet wäre also im Fall des Ratenkaufes um 6 % höher als bei Sofortkauf.

[10] Hier und im weiteren Verlauf der Bestimmung der gesuchten Werte ergeben sich oft Zahlen mit mehr als zwei Nachkommastellen. Damit stellt sich die Frage, wann auf welche Stelle nach dem Komma gerundet werden soll. Hier wird zunächst mit vier Stellen nach dem Komma weitergerechnet und erst im Ergebnis auf die zweite Stelle nach dem Komma gerundet. Eine Rundung bereits zu Beginn der Berechnung kann teilweise deutliche Unterschiede in den Ergebnissen mit sich bringen. Zur Kennzeichnung von gerundeten Ergebnissen, wird das Zeichen „≈" verwendet.
Empfehlung an die Kursleitung: Anhand des ersten Beispiels verschiedene Rundungsvarianten mit den Teilnehmer*innen berechnen, z. B. schon im ersten Schritt wird auf die zweite Stelle gerundet und mit diesem Zwischenergebnis wird weitergerechnet. Im Vergleich dazu wird dann auf die dritte Stelle gerundet usw. Ein Vergleich aller Ergebnisse zeigt den Teilnehmer*innen die Auswirkungen der unterschiedlichen Vorgehensweisen beim Runden. Ziel sollte beim Berechnen stets sein, so nah wie möglich an den exakten Wert ohne Rundung zu gelangen (auch diese Variante sollte mit den Teilnehmer*innen gerechnet werden: Die Ergebnisse im Taschenrechner werden zur Berechnung der weiteren Schritte verwendet).

Für das zweite Angebot ergibt sich analog folgende Zuordnung:

: 480 · 550

Prozentwert	480,00 €	1,00 €	550,00 €
Prozentsatz	100 %		

: 480 · 550

Abbildung 17.5-51: Zuordnung für das zweite Tablet

Die Berechnung ergibt: $100\,\% : 480 \approx 0{,}2083\,\%$ $\quad 0{,}2083\,\% \cdot 550 \approx 114{,}57\,\%$.

Der Preis für das zweite Tablet wäre also im Fall des Ratenkaufes um 14,57 % höher als bei Sofortkauf (gerundet auf zwei Nachkommastellen).

Aus den Berechnungsschritten nach der Zuordnung lässt sich die Formel herleiten.

Die allgemeine Formel für die Bestimmung des Prozentsatzes lautet: $p = \frac{PW}{GW} \cdot 100\,\%$.

Es wurde im ersten Schritt der volle Prozentsatz 100 % durch den ursprünglichen Grundwert geteilt und im zweiten Schritt dieses Zwischenergebnis mit dem vermehrten Grundwert multipliziert (Zwischenergebnis gerundet auf vier Nachkommastellen):

$$p = \frac{100\,\%}{480} \cdot 550 \approx 0{,}2083\,\% \cdot 550 \approx 114{,}57\,\%.$$

Für den Prozentsatz wurde bisher p verwendet.

$p = \frac{100\,\%}{GW} \cdot GW_{vermehrt}$ oder anders geschrieben $p = \frac{GW_{vermehrt}}{GW} \cdot 100\,\%$ (diese Variante wird nachfolgend verwendet).

<u>Angebot 1:</u>

$$p_1\,\% = \frac{529{,}92\,€}{499{,}00\,€} \cdot 100\,\% \approx 106{,}196\,\% \cdot 100\,\% \approx 106{,}196\,\% \approx 106{,}20\,\%$$

<u>Angebot 2:</u>

$$p_2\,\% = \frac{550{,}00\,€}{480{,}00\,€} \cdot 100\,\% \approx 1{,}1457\,\% \cdot 100\,\% \approx \cdot\, 114{,}57\,\%$$

Was sagen uns diese Zahlen? Lässt sich die zweite Frage beantworten? Wie lautet die Antwort?

Lösungen

Die Werte p_1 und p_2 geben die vermehrten Prozentsätze beim Ratenkauf an. Zieht man von diesen Prozentsätzen den Prozentsatz für den Grundwert bei Sofortkauf ab, also 100 %, erhält man die prozentualen Steigerungen:

Das heißt, das erste Tablet wird um 6,20 % teurer, das zweite sogar um 14,57 %.
Die Kursleitung diskutiert mit den Teilnehmer*innen, was das konkret bedeutet.

Wie würden Sie entscheiden?

Zahlbereich					Rechenoperationen					Grundlagen				Alltag
bis 30	bis 100	bis 1.000	größer 1.000	Brüche	addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren	Prozentrechnen	Zahlen	Mengen	Ganzes/Teile	Dezimalsystem	

Bei der Kaufentscheidung spielen neben den persönlichen Präferenzen und der technischen Ausstattung auch die Kosten eine Rolle. Entscheiden sich die Teilnehmer*innen für die geringere Steigerungsrate des Preises bei Ratenkauf?

Weitere Übungsaufgaben zur Ermittlung von Prozentsätzen bei vermindertem oder vermehrtem Grundwert können der Sammlung der von den Teilnehmer*innen zusammengetragenen Aufgaben zu Beginn dieses Unterkapitels (Abschnitt 17.5) oder **Aufgabenblatt 17.5e** entnommen werden.
Im Anschluss bietet sich an, einen Vergleich zwischen Ratenkauf und Aufnahme eines Kleinkredits mit z. B. 6 % Zinsen vs. Überziehung mittels Dispositionskredit (Dispo-Kredit) mit Zinsen von z. B. 10,5 % vorzunehmen.

Rückschau

In diesem Unterkapitel haben die Teilnehmer/-innen anhand von zahlreichen praktischen Alltagssituationen zu unterscheiden gelernt, welcher Wert jeweils gesucht wird:
- Prozentwert,
- Prozentsatz oder
- Grundwert.

Für die Lösung der Aufgabenstellungen wurden zunächst anhand verschiedener Möglichkeiten Darstellungsweisen betrachtet, die mögliche Lösungswege aufzeigen können, wenn die betreffenden, allgemein gültigen Formeln nicht zur Hand sind.
Im Wesentlichen waren die Darstellungsmöglichkeiten
- Zahlzerlegung,
- Balken oder Zahlenstrahl,
- Hunderterfeld und
- die Notation mittels Zuordnung der bekannten und gesuchten Werte.

Für die Berechnung wurden die Formeln
- für den Prozentwert $PW = \frac{GW}{100} \cdot p$ oder $PW = GW \cdot \frac{p}{100}$ oder $PW = \frac{GW \cdot p}{100}$,
- für den Prozentsatz $p = \frac{PW}{GW} \cdot 100\,\%$ und
- für den Grundwert $GW = \frac{PW}{p}$

verwendet.

Auch der Dreisatz bzw. Zweisatz hat sich bei zahlreichen Fragestellungen bewährt. Schließlich wurden noch anhand von Beispielaufgaben Fragen nach verminderten und vermehrten Grundwerten beantwortet.

Deutscher Volkshochschul-Verband e. V.

Obere Wilhelmstraße 32
53225 Bonn

Tel.: 0228 975 69-0
Fax: 0228 975 69-30

info@dvv-vhs.de
www.volkshochschule.de

grundbildung.de

GEFÖRDERT VOM

AlphaDekade 2016 – 2026

Bundesministerium für Bildung und Forschung